СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 7047

В.А. Мещеряков

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ УРАВНЕНИЯ ЧУ-ЛОУ

(продолжение)

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7047

В.А. Мещеряков

ИНВАРИАНТНЫЕ МНОГООБРАЗИЯ УРАВНЕНИЯ ЧУ-ЛОУ

(продолжение)

В предыдущей работе /I/ задача решения уравнения Чу-Лоу сведена к решению системы автономных нелинейных разностных уравнений. Фазовое пространство этой системы трехмерно, что связано с наличием трёх каналов в P -волновом πN - рассеянии. Система имеет следующий вид:

$$
\begin{aligned}
&x' = F(x,y), \quad F(x,y) = \frac{x + 2x^2 - xy - 2y^2}{1+3(x+y)-2x^2-3xy-2y^2}\\
&y' = -F(y,x), \quad x(w) = -x(-w),\ y(w) = y(-w),\ x' = x(w+1),\ y' = y(w+1)\\
&S, S_1'(1-2y+x)(1-2y'-x') = 1 \qquad S_1(w) = S_1(-w).
\end{aligned} \tag{I}
$$

Было доказано существование у системы (I) двумерного локально-инвариантного многообразия - инвариантной поверхности /I/. Движение точки по этой поверхности задаётся двумя первыми уравнениями системы (I), которые независимы от последнего уравнения системы. Решение этих уравнений представляет самостоятельную задачу и будет рассмотрено ниже.

Эвристические соображения.

Выпишем исходную систему уравнений

$$
\begin{aligned}
&x' = F(x,y)\\
&y' = -F(y,x)
\end{aligned}
\qquad F(x,y) = \frac{x+2x^2-xy-2y^2}{1+3(x+y)-2x^2-3xy-2y^2} = \sum q_{m,n} x^m y^n \tag{2}
$$

$$
x' = x(w+1),\ y' = y(w+1),\ x(w) = -x(-w),\ y(w) = y(-w). \tag{3}
$$

Уравнения (2) имеют три различных точки покоя. Остановимся ниже на точке с координатами $x = y = 0$. Если ограничиться рассмотрением действительных значений w , то функции $x(w)$ и $y(w)$ также действительны. Поэтому на уравнения (2) удобно смотреть как на преобразование плоскости x, y . Проследим за движением произвольной точки из окрестности $x=y=0$ под действием преобразования (2). С точностью до членов второго порядка малости по x, y оно имеет вид:

$$x'=x-(x^2+4xy+2y^2)+O(x,y)$$
$$y'=-y+(2x^2+4xy+y^2)+O(x,y). \qquad (4)$$

Ясно, что в линейном приближении движение точки сводится к отражениям относительно оси x, и исходная точка не приближается к началу координат. Положение точки относительно начала координат будет определяться членами высших порядков по x, y, а в достаточно малой окрестности начала координат - членами второго порядка. Для того, чтобы исключить осцилляции за счёт линейных членов, удобно рассмотреть итерированное преобразование

$$x''=x-2(x^2+2y^2)+O(x,y)$$
$$y''=y-8xy+O(x,y). \qquad (5)$$

Вопрос о том, по каким направлениям точки могут приближаться или удаляться от начала координат легче всего решается в полярных координатах/2/, переходя к которым получим:

$$\Delta r=-2r^2\cos\varphi(1+5\sin^2\varphi)+O(r)$$
$$r\Delta\varphi=-2r^2\sin\varphi(5\cos^2\varphi-2)+O(r). \qquad (6)$$

Из формул (6) видно, что существует три таких направления, с уравнениями

$$y=0$$
$$y=\pm\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,x. \qquad (7)$$

Все точки в правой полуплоскости под действием преобразования F^2 приближаются к началу координат, а в левой - удаляются (рис. I). Более полное представление о движении произвольной точки q_0 в окрестности начала координат можно получить, если наряду с её изображением $q_1=F^2(q_0)$, рассмотреть бесконечную последовательность точек вида

$$q_2=F^2(q_1),\ q_3=F^2(q_2),\dots,\ q_n=F^2(q_{n-1}),\dots$$

Ломаная линия со звеньями $[q_n, q_{n+1}]$ аппроксимирует решение итерированной системы (I) (рис. I). Естественно поставить вопрос о дифференциальном уравнении, описывающем это решение в окрестности точки покоя $(0,0)$. Такие уравнения непосредственно вытекают из формул (5) и следующих приближённых соотношений

$$dx\simeq\Delta x=x(w+2)-x(w)$$
$$dy\simeq\Delta y=y(w+2)-y(w) \qquad (8)$$
$$dw\simeq\Delta w=2.$$

Они имеют вид

$$\frac{dx}{dw}=-(x^2+2y^2)\ ;\ \frac{dy}{dw}=-4xy. \qquad (9)$$

Отсюда следует, что вид траектории определяется уравнением

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4xy}{x^2+2y^2}, \qquad (10)$$

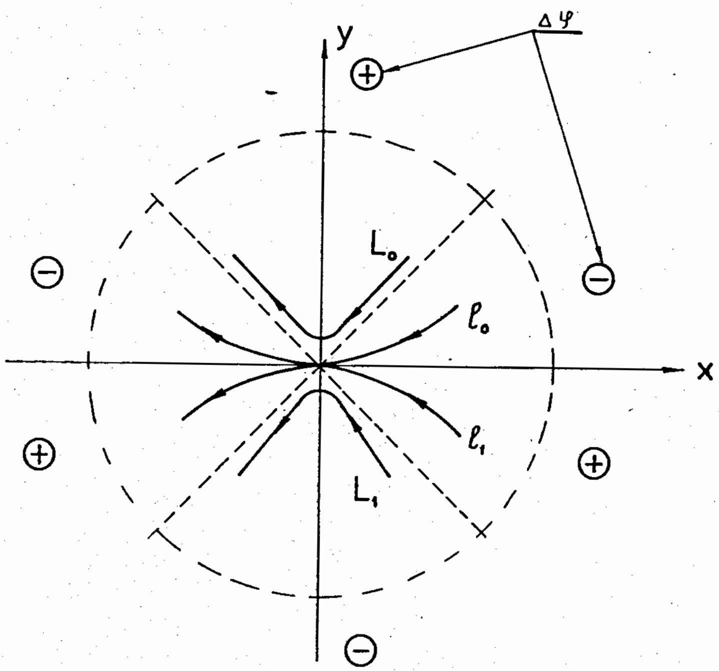

Рис. I.

которое может быть проинтегрировано в элементарных функциях и подтверждает ранее полученную картину траекторий в окрестности начала координат (рис. I).

Все траектории разбиваются на два типа. К первому относим траектории параболического типа, входящие или выходящие из начала координат; будем обозначать траектории этого типа буквой ℓ . Ко второму отнесём траектории гиперболического типа; их обозначение – L . Траектории гиперболического типа не входят в начало координат. Все вышеприведённое исследование имеет приближённый характер. Однако оно служит хорошей основой для вполне строгих рассуждений.

Ряды $x^{(k)}$ и $y^{(k)}$

Поведение решений в окрестности точки $(0,0)$ изучалось с помощью последовательности итераций произвольной точки q_0 согласно формуле $q_n = F^2(q_{n-1})$. Понятно, что эквивалентные результаты получаются при изучении последовательных итераций преобразования (2), которые приводят к выражениям для $F^{(2)}, F^{(3)}, \dots$ и следующим формулам $q_n = F^{(k)}(q_0)$. Выражения $F^{(k)}(x,y)$ достаточно сложны и более удобно представить их в виде рядов по возрастающим степеням x и y. Очевидно, что они имеют вид

$$x^{(k)} = x + \sum_{m+n\geq 2} a_{m,n}(k)\, x^m y^n$$

$$y^{(k)} = (-1)^k y + \sum_{m+n\geq 2} b_{m,n}(k)\, x^m y^n, \qquad \text{(II)}$$

где $a_{m,n}(k)$ и $b_{m,n}(k)$ – известные функции k . Покажем, что эти функции могут быть вычислены шаг за шагом, начиная с $m+n=2$. Подставляя в правые части формул (II) ряды $x^{(1)}$,

$y^{(1)}$ из формул (2), получим

$$x^{(k+1)} = x^{(1)} + \sum_{m+n\geq 2} a_{m,n}(k)\, x^{(1)m} y^{(1)n}$$

$$y^{(k+1)} = (-1)^k y^{(1)} + \sum_{m+n\geq 2} b_{m,n}(k)\, x^{(1)m} y^{(1)n} \tag{I2}$$

С другой стороны, для $x^{(k+1)}$ и $y^{(k+1)}$ имеем выражение

$$x^{(k+1)} = x + \sum_{m+n\geq 2} a_{m,n}(k+1)\, x^m y^n$$

$$y^{(k+1)} = (-1)^{k+1} y + \sum_{m+n\geq 2} b_{m,n}(k+1)\, x^m y^n . \tag{I3}$$

Сравним в (I2) и (I3) коэффициенты у одинаковых степеней $x^m y^n$ при условии, что $m+n=2$; в результате получим ряд разностных уравнений по переменной k

$$\begin{aligned}
&a_{2,0}(k+1) - a_{2,0}(k) = -1 \qquad && b_{2,0}(k+1) - b_{2,0}(k) = (-1)^k 2 \\
&a_{1,1}(k+1) + a_{1,1}(k) = -4 && b_{1,1}(k+1) + b_{1,1}(k) = 4(-1)^k \\
&a_{0,2}(k+1) - a_{0,2}(k) = -2 && b_{0,2}(k+1) - b_{0,2}(k) = (-1)^k .
\end{aligned} \tag{I4}$$

Решение этих уравнений, с естественным граничным условием имеет вид

$$\begin{aligned}
&a_{2,0}(k) = -k , \quad a_{1,1}(k) = -2[1-(-1)^k] , \quad a_{0,2}(k) = -2k \\
&b_{2,0}(k) = 1-(-1)^k , \; b_{1,1}(k) = -4(-1)^k k , \quad b_{0,2}(k) = \tfrac{1}{2}[1-(-1)^k] .
\end{aligned} \tag{I5}$$

Явные выражения для функций $a_{m,n}(k), b_{m,n}(k)$ при $m+n=2$ позволяют сделать следующий шаг: вычислить эти функции при значении $m+n=3$

$$\begin{aligned}
&a_{3,0}(k+1) - a_{3,0}(k) = 5 + (-2)a_{2,0}(k) + (2)a_{1,1}(k) + (0)a_{0,2}(k) \\
&a_{2,1}(k+1) + a_{2,1}(k) = 18 + (-8)a_{2,0}(k) + (5)a_{1,1}(k) + (-4)a_{0,2}(k) \\
&a_{1,2}(k+1) - a_{1,2}(k) = 20 + (-4)a_{2,0}(k) + (5)a_{1,1}(k) + (-2)a_{0,2}(k) \\
&a_{0,3}(k+1) + a_{0,3}(k) = 6 + (0)a_{2,0}(k) + (-2)a_{1,1}(k) + (-2)a_{0,2}(k) .
\end{aligned} \tag{I6}$$

Уравнения для функций $b_{m,n}(k)$ весьма похожи на таковые для $a_{m,n}(k)$

$$\begin{aligned}
&b_{3,0}(k+1) - b_{3,0}(k) = -6(-1)^k + (-2)b_{2,0}(k) + (2)b_{1,1}(k) + (10)b_{0,2}(k) \\
&b_{2,1}(k+1) + b_{2,1}(k) = -20(-1)^k + (-8)b_{2,0}(k) + (5)b_{1,1}(k) + (-4)b_{0,2}(k) \\
&b_{1,2}(k+1) - b_{1,2}(k) = -18(-1)^k + (-4)b_{2,0}(k) + (5)b_{1,1}(k) + (-8)b_{0,2}(k) \\
&b_{0,3}(k+1) + b_{0,3}(k) = -5(-1)^k + (0)b_{2,0}(k) + (-2)b_{1,1}(k) + (-2)b_{0,2}(k) .
\end{aligned} \tag{I7}$$

Симметрия уравнений (I6)-(I7) сохранится и в высших порядках.

Решение уравнений (I6)-(I7) не представляет труда, неизвестные константы определяются, как и прежде, из условия $x^{(0)}=x$ $y^{(0)}=y$. После решения уравнений (I6)-(I7) можно продолжить вычисление функций $a_{m,n}(k), b_{m,n}(k)$ для значений $m+n=4$ и т.д. Ниже рассмотрим общую структуру функций $a_{m,n}(k)$. Уравнение на них имеет вид:

$$a_{m,n}(k+1) - (-1)^n a_{m,n}(k) = q_{m,n} + P_{m,n}[k,(-1)^k] . \tag{I8}$$

Числа $q_{m,n}$ определяются разложением функции $F(x,y)$ в двойной ряд по степеням $x^m y^n$ (см. формулу (2)). Коэффициенты полинома $P_{m,n}$ вычисляются с помощью функций $a_{\alpha\beta}(k)$, $b_{\alpha,\beta}(k)$ при $\alpha+\beta < m+n$.

В силу линейности уравнения (I8) общее решение будет суперпозицией решений, соответствующих отдельным слагаемым в правой части. Поэтому рассмотрим следующее уравнение с правой частью:

$$a_{m,n}(k+1) - (-1)^n a_{m,n}(k) = d\, k^{\gamma} (-1)^k . \tag{I9}$$

Перейдём к новым функциям $a_{m,n}(k)=(-1)^k\,\overline{a}_{m,n}(k)$, после чего получим:

$$\overline{a}_{m,n}(k+1)+(-1)^n\,\overline{a}_{m,n}(k)=-d\,k^{\gamma}. \tag{20}$$

Удобно выделить два случая: чётных и нечётных значений n.

Для нечётных значений $n=2r+1$ частное решение неоднородного уравнения (20) представляется полиномом по k степени $\gamma+1$, т.е.

$$\overline{a}^{\,o}_{m,2r+1}(k)=\sum_{\ell=1}^{\gamma+1} c_\ell\, k^\ell. \tag{21}$$

Коэффициенты c_ℓ находятся из уравнений

$$\begin{aligned}
&(\gamma+1)\,c_{\gamma+1} = -d\\
&\frac{\gamma+1}{2}\,c_{\gamma+1}+\gamma\, c_\gamma = 0\\
&\dots\dots\dots\\
&c_{\gamma+1}+c_\gamma+\dots+c_1 = 0.
\end{aligned} \tag{22}$$

Уравнения (22) позволяют последовательно найти $c_{\gamma+1}, c_\gamma, \dots$.

Общее решение уравнения (20) в первом случае имеет вид

$$\overline{a}_{m,2r+1}(k)=\overline{a}^{(0)}_{m,2r+1}(k)+c. \tag{23}$$

Для чётных значений $n=2r$ частное решение уравнения (20) представляется полиномом по k степени γ, т.е.

$$\overline{a}^{(0)}_{m,2r}(k)=\sum_{\ell=0}^{\gamma} c_\ell\, k^\ell. \tag{24}$$

Коэффициенты c_ℓ определяются из уравнений

$$\begin{aligned}
&2c_\ell = d\\
&c_\ell+2c_{\ell-1}=0\\
&\frac{\ell(\ell-1)}{2}c_\ell+(\ell-1)c_{\ell-1}+2c_{\ell-2}=0\\
&\dots\dots\dots\\
&c_\ell+c_{\ell-1}+\dots+2c_0=0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Общее решение уравнения (20) во втором случае имеет вид

$$\overline{a}_{m,2r}(k)=\overline{a}^{\,o}_{m,2r}(k)+c(-1)^k. \tag{26}$$

Произвольная постоянная c в решениях (23), (26) определяется из начальных условий $\overline{a}_{m,n}(0)=0$, которые следуют из естественного требования $X^{(0)}=X$. При построении функций $a_{m,n}(k)$ и $b_{m,n}(k)$ помимо уравнений (I9) встретится аналогичное уравнение, в котором правая часть не содержит множителя $(-1)^k$. Уравнения такого типа решаются способом, описанным для уравнения (20).

Приведённое выше рассмотрение дословно переносится на функции $b_{m,n}(k)$.

Таким образом, можно утверждать, что функции $a_{m,n}(k), b_{m,n}(k)$ в разложении (II) суть полиномы по переменным $k, (-1)^k$.

Легко убедиться в том, что множество степеней преобразования образует бесконечную абелеву группу G со следующим законом умножения

$$F^{(m)}\cdot F^{(n)}=F^{(m+n)}. \tag{27}$$

В координатах x, y групповой закон умножения выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
&x^{(n)}(x^{(m)},y^{(m)})=x^{(m)}(x^{(n)},y^{(n)})=x^{(m+n)}(x,y)\\
&y^{(n)}(x^{(m)},y^{(m)})=y^{(m)}(x^{(n)},y^{(n)})=y^{(m+n)}(x,y).
\end{aligned} \tag{28}$$

Выделим в группе G подгруппу G_1, соответствующую чётным степеням исходного преобразования. Подгруппа G_1 обладает важным свойством, отличающим её от всей группы, а именно: в пределах подгруппы G_1 справедливо равенство $(-1)^k = 1$. Поэтому ряды (II) представляют полиномы по степеням x, y, k, которые тождественно удовлетворяют уравнениям (28). Вследствие этого ряды (II) в подгруппе G_1 можно рассматривать не только при целых значениях k, но и при любых действительных. Иными словами, формулы (II) для чётных k образуют однопараметрическую группу непрерывных преобразований с аддитивным параметром $r = \frac{k}{2}$. Из соотношений (28) немедленно следуют групповые уравнения

$$\frac{dx^{(2r)}}{d(2r)} = \delta x(x^{(2r)}, y^{(2r)}); \quad \delta x(x^{(2r)}, y^{(2r)}) = \frac{d^2 x^{(2\ell)}(x^{(2r)}, y^{(2r)})}{d2\ell}$$

$$\frac{dy^{(2r)}}{d(2r)} = \delta y(x^{(2r)}, y^{(2r)}); \quad \delta y(x^{(2r)}, y^{(2r)}) = \frac{dy^{(2\ell)}(x^{(2r)}, y^{(2r)})}{d2\ell}. \quad (29)$$

Отсюда уже легко получить аналог уравнения (10), который имеет вид

$$\frac{dx^{(2r)}}{dy^{(2r)}} = \frac{\delta x(x^{(2r)}, y^{(2r)})}{\delta y(x^{(2r)}, y^{(2r)})}. \quad (30)$$

До сих пор не обсуждался вопрос о сходимости рядов $x^{(k)}, y^{(k)}$, поэтому заключения, основанные на равенствах (28)-(30), носят формальный характер. Факт существования области сходимости устанавливается на базе частного решения задачи, найденного ранее /2/. Результат может быть представлен в следующей форме

$$x^{(2r)} = \frac{x}{1+2rx}, \quad y^{(2r)} = (x^{(2r)})^2. \quad (31)$$

Отсюда следует, что в пространстве x, y, r существует область сходимости, включающая точку $(0,0,0)$. Ближайшая к началу координат точка этой области задаётся соотношением

$$R^2 = a + \frac{1}{4a} + a^2, \quad (32)$$

где a – единственный действительный корень уравнения $(2a)^3 + (2a) - 1 = 0$. В области, определённой равенствами

$$|x| < \sqrt{a}, \quad |y| < a, \quad r < \frac{1}{2\sqrt{a}}, \quad a \simeq \frac{3}{8} \quad (33)$$

ряды (II) сходятся абсолютно и равномерно, а функции $\delta x(x^{(2r)}, y^{(2r)})$, $\delta y(x^{(2r)}, y^{(2r)})$ представляются сходящимися рядами, определяющими непрерывные функции своих аргументов. Применяя теорему существования и единственности к уравнению (30), можно утверждать, что в малой окрестности начала координат плоскости x, y, исключая само начало координат, через каждую точку x_0, y_0 проходит только одна интегральная кривая. С помощью рядов (II) эта интегральная кривая может быть исследована в малой окрестности начала координат.

Таким образом, изучая множество степеней преобразования F мы пришли к выводу о том, что с подгруппой чётных степеней можно связать некоторую группу непрерывных преобразований с аддитивным параметром. Последняя приводит к системе кривых, входящих в окрестность точки покоя $x=y=0$ (рис.I). Любая точка из окрестности точки покоя под действием чётных степеней преобразования F движется вдоль этих кривых, приближаясь или удаляясь от начала координат.

Заключительным вопросом, который будет рассмотрен ниже, является вопрос о поведении системы интегральных кривых под действием преобразования F.

Для ответа на него возьмём произвольную точку $q_0(x_0, y_0)$ и ее образ $q_1 = F(q_0)$, $q_1(x_0^{(1)}, y_0^{(1)})$. Через точки q_0 и q_1 проходят кривые ℓ_0 и ℓ_1, определённые рядами (II). Будем различать параметры этих кривых, обозначая их через r и r' соответственно $(k=2r)$. Произведём над кривой ℓ_0 преобразование F, после чего она перейдёт в кривую ℓ_0'. Эвристические соображения указывают на то, что кривые ℓ_0' и ℓ_0 тождественны. Для того, чтобы установить этот факт, необходимо доказать эквивалентность рядов, представляющих кривые ℓ_0 и ℓ_0'.

$$x'(r) = F[x^{(2r)}, y^{(2r)}], \quad y' = -F[y^{(2r)}, x^{(2r)}] \tag{34}$$

$$x(r') = x^{(2r')}(x_0', y_0'), \quad y(r') = y^{(2r')}(x_0', y_0'). \tag{35}$$

Ряды (34),(35) эквивалентны, если существует функция $r' = R(r)$, переводящая ряд (35) в предыдущий,(34).

Поступим более экономным способом и воспользуемся групповым уравнением (27), в котором положим $n=1$ и $m=2r$, после чего оно примет вид

$$F^{(2r)} \cdot F^{(1)} = F^{(2r+1)}. \tag{36}$$

Здесь обе части равенства могут быть представлены рядами по x, y и r, так как $(-1)^{2r} = 1$. Для всех целых значений $2r$ уравнение (36) справедливо и может рассматриваться также для любых r. Сходимость рядов в левой части уравнения (36) была доказана выше. Точно таким же способом убеждаемся в сходимости ряда в правой части уравнения (36), что и завершает доказательство.

Картина движения точки в окрестности начала координат состоит в следующем. Если начальная точка расположена в параболическом секторе, то всегда найдётся две таких траектории ℓ_0, ℓ_1, вдоль которых под действием преобразования F начальная точка приближается (удаляется) к началу координат, перескакивая с одной траектории на другую. Если начальная точка расположена в гиперболическом секторе, то всегда найдётся две таких траектории L_0 и L_1, вдоль которых под действием преобразования F начальная точка совершает своё движение, перескакивая с одной траектории на другую.

<u>Литература:</u>

I. Мещеряков В.А. Препринт ОИЯИ, Р2-5906, 1971.

2. Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. Гостехиздат, М-Л, 1947 .

Рукопись поступила в издательский отдел
30 марта 1973 года.