

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



СЗ24.2
Б-246

У/И-5

P2 - 7029

1960/2-73

Б.М. Барбашов, В.В. Нестеренко

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ В МОДЕЛИ $\frac{\hbar^2}{4} \varphi^4$
И УРАВНЕНИЯ НА ТРАЕКТОРИЯХ
ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7029

Б.М.Барбашов, В.В.Нестеренко

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ В МОДЕЛИ $\frac{\hbar^2}{4} \varphi^4$
И УРАВНЕНИЯ НА ТРАЕКТОРИЯХ
ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Направлено в ТМО

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Барбашов Б.М., Нестеренко В.В.

P2 - 7029

Приближенные решения в модели $\frac{\hbar^2}{4} \phi^4$ и уравнения на траекториях для функций Грина

Путем введения вспомогательного поля $A(x)$ решение модели с $L_{int} = \frac{\hbar^2}{4} \phi^4$ сводится к нахождению решения в теории $L_{int} = \hbar \phi^2 A$ и последующему функциональному усреднению по полю $A(x)$, имеющему пропагатор $D_A(x-y) = \frac{1}{2} \delta(x-y)$. Исследуется приближенное решение для одночастичной функции Грина и высокоэнергетическое поведение амплитуды упругого рассеяния.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1973

Barbashov B.M., Nesterenko V.V.

P2 - 7029

Approximate Solutions in the $\frac{\hbar^2}{4} \phi^4$ Model and Equations on Trajectories for the Green Functions

By introducing an auxiliary field $A(x)$, the solution of the model with $L_{int} = \frac{\hbar^2}{4} \phi^4$ is reduced to finding of the solution in $L_{int} = \hbar \phi^2 A$ theory and further functional averaging over the $A(x)$ field, having propagator $D_A(x-y) = \frac{1}{2} \delta(x-y)$. An approximate solution for the one-particle Green function and high-energy behaviour of the elastic scattering amplitude are studied.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1973

Введение

В рамках метода функционального интегрирования в теории поля получены приближенные решения для одночастичной функции Грина и амплитуды упругого рассеяния для взаимодействия $\mathcal{L}_{int} = \frac{\hbar^2}{4} \varphi^4(x)$. Вначале с помощью введения вспомогательного поля $A(x)$ с пропагатором, равным $D_A(x-y) = \frac{1}{2} \delta(x-y)$, задача с взаимодействием $\frac{\hbar^2}{4} \varphi^4$ сводится к решению модели с двумя полями $\mathcal{L}_{int} = \hbar \varphi^2 A$, поскольку графы, соответствующие $\mathcal{L}_{int} = \hbar \varphi^2 A$ с виртуальными линиями поля $A(x)$ и $D_A(x-y) = \frac{1}{2} \delta(x-y)$, переходят в графы теории $\frac{\hbar^2}{4} \varphi^4$. В частности, такой пропагатор поля $A(x)$ приводит к тому, что частичный учет поляризационных вкладов в $\hbar \varphi^2 A$ сводится к решению одномерных уравнений на функции Грина, аргументами которых являются фейнмановские траектории, зависящие от одной переменной - собственного времени.

Полученные ранее приближенные решения для $\mathcal{L}_{int} = \hbar \varphi^2 A$, из которых следовало в высокоэнергетической области эйкональное представление для амплитуды $\varphi-\varphi$ рассеяния, используются теперь для решения модели $\frac{\hbar^2}{4} \varphi^4$. Эйкональной формы для амплитуды рассеяния при этом не получается.

§1. Одночастичная функция Грина в модели $\frac{\hbar^2}{4} \varphi^4$

Одночастичная функция Грина определяется как среднее по вакууму следующего вида χ :
 χ / Матричный элемент перехода вакуум-вакуум положим равным единице $\langle 0|S|0\rangle = 1$.

$$G(x, y) = i \langle T(\varphi(x)\varphi(y)) \exp\{i\frac{\hbar^2}{4} \int \varphi^4(z) dz\} \rangle_0.$$

Известно, что усреднение по бозонному вакууму можно заменить функциональным интегрированием по классическим полям $\varphi(x)$ ¹¹. Это позволяет записать $G(x, y)$ в виде функционального интеграла:

$$G(x, y) = i C_1 \int \delta\varphi \exp\left\{\frac{i}{2} \int dz \varphi(z) (\square - m^2) \varphi(z)\right\} \cdot \varphi(x)\varphi(y) \exp\left\{i\frac{\hbar^2}{4} \int \varphi^4(z) dz\right\}. \quad (I.1)$$

Выполнить интегрирование в формуле (I.1) не удастся, так как точно интегрируются функционалы, содержащие в показателе экспоненты полином по φ не выше квадратичного.

Поэтому преобразуем функционал $\exp\{i\frac{\hbar^2}{4} \int \varphi^4(z) dz\}$ с помощью интегрирования по вспомогательному полю $A(z)$ следующим образом:

$$\exp\left\{i\frac{\hbar^2}{4} \int \varphi^4(z) dz\right\} = C \int \delta A \exp\left\{-i \int A^2(z) dz + i\hbar \int \varphi^2(z) A(z) dz\right\}. \quad (I.2)$$

Подставляя (2) в (1) и предполагая возможным менять порядок интегрирования по $\delta\varphi$ и δA , получим:

$$G(x, y) = i C_2 \int \delta A \exp\left\{-i \int A^2(z) dz\right\} \cdot \int \delta\varphi \exp\left\{\frac{i}{2} \int \varphi(z) (\square - m^2) \varphi(z) dz + i\hbar \int \varphi^2(z) A(z) dz\right\},$$

$$C_2 = C_1 \cdot C.$$

Далее, учтем, что

$$C_1 \int \delta\varphi \varphi(x)\varphi(y) \exp\left\{\frac{i}{2} \int \varphi(z) (\square - m^2) \varphi(z) dz + i\hbar \int \varphi^2(z) A(z) dz\right\} = G(x, y | A) S_0(A),$$

где $G(x, y | A)$ - функция Грина мезона, взаимодействующего с классическим полем A ($\mathcal{L}_{int} = \hbar \varphi^2 A$); $S_0(A)$ - среднее по вакууму поля φ от S - матрицы в этой системе. Теперь исходная функция Грина (I.1) представима в виде:

$$G(x, y) = C \int \delta A \exp\left\{-i \int A^2(z) dz\right\} G(x, y | A) S_0(A). \quad (I.3)$$

Таким образом, задача сводится к вычислению функционального интеграла, определяющего одночастичную функцию Грина ¹¹ поля φ в теории $\mathcal{L}_{int} = \hbar \varphi^2(x) A(x)$ с тем лишь отличием, что усреднение по полю A в формуле (I.3) проводится с весовым функционалом $\exp\{-i \int A^2(z) dz\}$, а не с обычным функционалом $\exp\{\frac{i}{2} \int A(z) (\square - m_A^2) A(z) dz\}$. Это означает, что пропагатор поля $A(x)$ в нашем случае есть $\frac{1}{2} \delta^{(4)}(x-y)$, в то время как из второго функционала следует пропагатор $D_A(x-y)$, подчиняющийся уравнению

$$(\square_x - m_A^2) D_A(x-y) = -\delta^{(4)}(x-y).$$

Следовательно, теперь можно сделать вывод о том, что диаграммы теории $\frac{\hbar^2}{4} \varphi^4(x)$ получаются стягиванием в точку виртуальных линий поля $A(x)$ в диаграммах теории $\hbar \varphi^2(x) A(x)$, что и отражено в формуле (I.3). Далее будем следовать работе ¹², в которой рассматривается $G(x, y)$ в теории $\hbar \varphi^2(x) A(x)$.

Функция $G(x, y|A)$ подчиняется уравнению

$$\{\square_x - m^2 + 2h A(x)\} G(x, y|A) = -\delta^{(4)}(x-y) \quad (I.4)$$

и является функцией Грина уравнения Клейна-Гордона во внешнем поле $A(x)$.

Решение уравнения (I.4) может быть представлено в виде функционального интеграла по фейнмановским траекториям

$$G(x, y|A) = C_V^{-1} \int \delta^4(x-y - 2 \int_0^1 v(q) dq) \exp\{-i \int_0^1 v(q)^2 dq + 2ih \int A(x) j(x) dx\} S_0(A) \quad (I.5)$$

где $j(x) = \int_0^1 \delta^{(4)}(x-y - 2 \int_0^1 v(q) dq)$.

Нормировочная константа C_V^{-1} равна

$$C_V^{-1} = \int \delta^4(x-y - 2 \int_0^1 v(q) dq) \exp\{-i \int_0^1 v(q)^2 dq\}.$$

Подставим (I.5) в (I.3) и заметим следующее. Если пренебречь вкладом от поляризации вакуума поля φ , т.е. положить

$S_0(A) = 1$, то интегрирование по δA в (I.3) легко

выполняется, так как сводится к гауссовой квадратуре.

Для этого достаточно сделать замену функциональной переменной^{/3/}

$$A(x) \rightarrow A(x) + h j(x). \quad (I.6)$$

Если же не пренебрегать $S_0(A)$, то подстановка (I.6) приводит к тому, что от A зависит только S_0 , а

линейный по A член в показателе экспоненты в (I.5) исчезает и заменяется выражением $h^2 \int dx j^2(x)$.

Таким образом, получаем

$$G(x, y) = i \int \delta^4(x-y - 2 \int_0^1 v(q) dq) \exp\{-i \int_0^1 v(q)^2 dq + ih \int j^2(x) dx\} S_0(A+hj). \quad (I.7)$$

Как известно, при разложении по A величин $G(x, y|A)$

и $S_0(A)$ воспроизводятся члены ряда теории возмущений с $\mathcal{L}_{int} = h \varphi^2 A$, где $A(x)$ - внешнее поле. Одночастичная функция Грина $G(x, y|A)$ приводит к графам

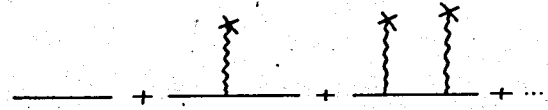


Рис. I.

Диаграммы с замкнутыми петлями (рис.2) возникают из величины

$$S_0(A) = \exp\left\{h \int d^4x \int d^4z G(z, z|A) A(z)\right\} = \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \int dx_1 \dots dx_n \prod_n(x_1, \dots, x_n) A(x_1) \dots A(x_n)\right\} \quad (I.8)$$

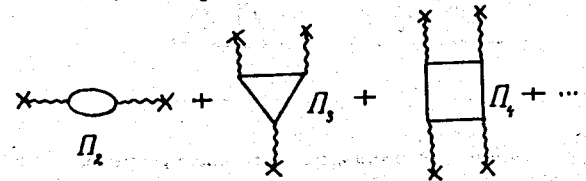


Рис.2.

Теперь сделаем первое упрощающее предположение, а именно, опустим в $S_0(A+hj)$ в формуле (I.7) функциональную переменную A . Тем самым из $G(x,y)$ будет выброшена определенная совокупность диаграмм, которые получаются из диаграмм на рис.2 заменой двух свободных концов поля $A(x)$ пропагатором D_A (в нашем случае $D_A(x) = \frac{1}{2} \delta(x)$). Именно к этой замене сводится процедура интегрирования по A в каждом члене ряда теории возмущений. Таким образом, выбрасываются так называемые многопетлевые графы в теории $h\varphi^2 A$, в том числе графы перехода вакуум-вакуум (см. рис.3).



Рис.3.

Теперь $S_0(hj)$ содержит только диаграммы, представленные на рис.2, причем все концы этих диаграмм связаны с основной линией j :



Рис.4.

В результате такого приближения интегрирование по A в (I.7) легко выполняется и, переходя к импульсному представлению для функции Грина $G(x,y)$, получаем выражение

$$(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p-q) G(p) = \int e^{ipx - iqy} G(x,y) dx dy = \\ = i \int dy e^{i(p-q)y} \int_0^\infty d\tau e^{i(p^2 - m^2)\tau} C_V \int d^4z e^{-i \int \varphi^2 dz} \cdot \exp\{i h^2 \int j^2(z) dz\} S_0(hj), \quad (I.9)$$

где ток $j(z)$ равен

$$j(z) = \int_0^\infty d\xi \delta^{(4)}(z-y - 2p\xi - 2 \int_0^\xi v(\eta) d\eta). \quad (I.10)$$

Множитель $\exp\{i h^2 \int j^2(z) dz\}$ в (I.9) для теории $h\varphi^2 A$, в которой поле A имеет пропагатор $D_A(x-y)$, принимает вид:

$$\exp\{i h^2 \int j(z_1) D_A(z_1 - z_2) j(z_2) dz_1 dz_2\}$$

и при разложении по h^2 воспроизводит (после интегрирования по γ) следующие диаграммы теории возмущений:

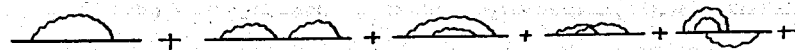


Рис.5.

Поскольку в нашем случае $D_A(z) = \frac{1}{2} \delta^{(4)}(z)$, то волнистые линии на рис. 3,4 и 5 стягиваются в точку и эти диаграммы переходят в диаграммы теории $\frac{h^2}{4} \varphi^4$ соответственно:



Рис.3а.



Рис.4а.



Рис.5а.

Появление на рис.5а замкнутых петель, присоединенных одной точкой к линии j , связано с тем, что в нашем подходе не учитывается нормальное произведение операторов в лагранжиане $\mathcal{L}_{int}(x) = \frac{\hbar^2}{4} \varphi^2(x)$. Поэтому вклад таких диаграмм требуется вычитать.

При сравнении опущенных графов в S_0 (рис. 3а) и учтенных в $i\hbar^2 \int j^2(x) dx$ (рис.5а), видим, что некоторые из них совпадают (второй на рис.3а и пятый на рис. 5а). Такое совпадение имеет место и в более высоких порядках по \hbar^2 . Таким образом, принцип разбиения на однопетлевые графы, которые мы учитываем в теории $\hbar \varphi^2 A$ (рис.4), и многопетлевые, неучитываемые нами (рис.3), теряет силу в теории $\frac{\hbar^2}{4} \varphi^4$. Как мы видели выше, часть графов

воспроизводится членом $i\hbar^2 \int j^2(x) dx$, а другая часть этих же графов выброшена нами при отбрасывании A в аргументе $S_0(A + \hbar j)$ в (I.7). Следовательно, некоторые из графов входят в решение (I.9) с заниженными коэффициентами. Вернемся к решению (I.9). Для $S_0(\hbar j)$, согласно (I.8), имеем

$$S_0(\hbar j) = \exp \left\{ \hbar^2 \int_0^1 dg \int_0^{\tau} dx G(x, x | ghj) j(x) \right\} = \exp \left\{ \hbar^2 \int_0^1 dg \int_0^{\tau} dx G[y + x c(g), y + x c(g) | ghj] \right\}, \quad (I.11)$$

где через

$$x(c) = 2p\xi + 2 \int_0^{\xi} \varphi(\eta) d\eta \quad (I.12)$$

обозначена фейнмановская траектория частицы поля φ . Используя трансляционное свойство функции Грина во внешнем поле^{14/}

$$G(x+a, y+a | A(x)) = G(x, y | A(x+a)),$$

формулу (I.11) можно представить так:

$$S_0(\hbar j) = \exp \left\{ \hbar^2 \int_0^1 dg \int_0^{\tau} dx G[x c(g), x c(g) | ghj(x+y)] \right\},$$

где ток $j(x+y)$, согласно (I.10) и (I.12), равен

$$j(x+y) = \int_0^{\tau} dx \delta^{(4)}(x - 2p\xi - 2 \int_0^{\xi} \varphi(\eta) d\eta) = \int_0^{\tau} dx \delta^{(4)}(x - x(c)). \quad (I.13)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению функции Грина мезона $G[x(\xi), x(\xi') | ghj]$ во внешнем поле ghj , причем аргументы этой функции не произвольны, а лежат на мезонных траекториях $x(\xi)$ (I.2), заданных как функции собственного времени ξ .

Следствием этого является тот факт, что интегральное уравнение для $G(x, y | ghj)$ в 4-мерном пространстве

$$G[x, y | ghj] = D^c(x-y) + 2gh^2 \int d^4z D^c(x-z) j(z) G[z, y | ghj] \quad (I.14)$$

сводится к одномерному интегральному уравнению на траекториях $x(\xi)$. Подставляя (I.13) в (I.14), получаем

$$G[x(\xi), x(\xi') | ghj] = D^c[x(\xi) - x(\xi')] + 2gh^2 \int_0^{\xi} d\alpha D^c[x(\xi) - x(\alpha)] G[x(\alpha), x(\xi') | ghj]. \quad (I.15)$$

Уравнение (I.15) получилось одномерным именно в результате рассмотрения модели $\frac{1}{4} \varphi^4$. Если для $S_0(A)$ использовать то же самое приближение в теории $h\varphi^2 A$, где поле A имеет пропагатор $D_A(x-y)$, то задача сводится к нахождению функции Грина мезона φ во внешнем поле более сложного вида, чем $hj(x)$, а именно, в поле, равном $h \int d^4z j(z) D_A(z-x)$. Поэтому интегральное уравнение на $G[x, y | gh \int d^4z_1 j(z_1) D_A(z_1 - z)]$ останется четырехмерным.

Уравнение (I.15) было впервые получено в работе¹⁵⁾ в рамках предложенного авторами биллокального формализма в квантовой теории поля.

Точно решить уравнение (I.15) при произвольных $x(\xi)$ нельзя. Поэтому поступим следующим образом. Усредним по

траекториям $x(\xi)$ в формуле (I.9), используя приближение прямолинейных путей¹⁶⁾

$$G(p) = i \int_0^{\infty} d\tau e^{i(p^2 - m^2)\tau} \exp\{i h^2 \langle \int_0^{\tau} j^2(z) dz \rangle + h^2 \int_0^{\tau} d\xi \int_0^{\xi} d\xi' \langle G[x(\xi), x(\xi') | ghj] \rangle\}, \quad (I.16)$$

где используется обозначение $\langle F[\tau] \rangle \equiv C_V \int d^4v \exp\{i \int_0^{\tau} v^2 dz\} \langle G[x(\xi), x(\xi') | ghj] \rangle$, согласно (I.15), равно

$$\langle G[x(\xi), x(\xi') | ghj] \rangle = \langle D^c(x(\xi) - x(\xi')) \rangle + 2gh^2 \int_0^{\xi} d\alpha \langle D^c(x(\xi) - x(\alpha)) G[x(\alpha), x(\xi') | ghj] \rangle. \quad (I.17)$$

При вычислении среднего от правой части (I.17) заменим $\langle D^c G \rangle$ на $\langle D^c \rangle \langle G \rangle$. Это приближение отбрасывает корреляционные члены $\kappa_1 \kappa_2$ в выражении $\langle D^c G \rangle$.

В результате получаем одномерное интегральное уравнение с разностным ядром на конечном промежутке

$$G(\xi, \xi') = D(\xi - \xi') + 2gh^2 \int_0^{\xi} d\alpha D(\xi - \alpha) G(\alpha, \xi'), \quad (I.18)$$

где введены обозначения

$$G(\xi, \xi') = \langle G[x(\xi), x(\xi') | ghj] \rangle, \quad D(\xi - \xi') = \langle D^c(x(\xi) - x(\xi')) \rangle = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} \frac{\exp\{2i p x(\xi - \xi') + i h^2 j^2(\xi)\}}{m^2 - \kappa^2}. \quad (I.19)$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении учет вклада $S_0(hj)$ в функцию Грина сводится к решению одномерного интегрального уравнения (I.18) с разностным ядром (I.19) на конечном интервале $(0, \tau)$.

Уравнение (I.18) в математическом отношении проще (I.17) и при $\tau \rightarrow \infty$ (инфракрасная область для функции Грина) переходит в уравнение Винера-Хопфа¹⁷⁾. В этом случае его формальное решение может быть выписано, как это сделано в работе¹⁵⁾. Однако, следует отметить, что ядро этого уравнения $D(\{f-f'\})$ и свободный член (I.19) являются сингулярными функциями (при $f-f' \rightarrow 0$ $D(\{f-f'\})$ логарифмически расходится). Поэтому решение уравнения (I.18) оказывается зависящим от параметра регуляризации. Так как разработанной процедуры перенормировок вне рамок теории возмущений нет, то обратимся к методу итераций уравнения (I.15). Найденное таким путем решение усредним по траекториям $x(\xi)$. В результате в показателе экспоненты (I.16) возникает следующий ряд по константе связи

$$h^2 \langle \int j^2(z) dz \rangle + h^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2h^2)^{n-1}}{n} \int_0^\tau d\xi \langle G_n[x(\xi), x(\xi)] g h j(z) \rangle, \quad (I.20)$$

где G_n — n -я итерация уравнения (I.15). Каждый член этого ряда отвечает определенной совокупности графов Фейнмана. Первый член в (I.20) при разложении экспоненты (I.16) в ряд воспроизводит в приближении $k, k' = 0$ диаграммы, представленные на рис. 5а.

Как уже отмечалось ранее, в функциональном подходе не учитывается нормальное произведение операторов в лагранжиане взаимодействия. Поэтому вычтем из $h^2 \langle \int j^2(z) dz \rangle$ выражение, отвечающее вкладу замкнутой петли $h^2 \tau D^c(0)$.^{x)} В результате имеем:

$$\langle \int j^2(z) dz \rangle - \tau D^c(0) = -i\pi^2 \left[\tau \int_0^\tau \frac{d\alpha}{\alpha^2} (e^{-i\alpha p^2} - e^{-i\alpha m^2}) - \int_0^\tau \frac{d\alpha}{\alpha} e^{-i\alpha p^2} - \tau \int_0^\infty \frac{d\alpha}{\alpha^2} e^{-i\alpha p^2} \right]. \quad (I.21)$$

Первый логарифмически расходящийся член в (I.21), пропорциональный τ , приводит к перенормировке массы $\tau \delta m^2$ в (I.16). Как и должно быть, при $\beta^2 = m^2$ $\delta m^2 = 0$.

Второе слагаемое в (I.21), которое расходится также логарифмически, устраняется перенормировкой функции $G(\beta)$ (константа Z_2). Таким образом, (I.21) принимает следующий вид:

$$\langle \int j^2(z) dz \rangle - \tau D^c(0) = \tau \delta m^2 - \ln \frac{M^2}{\rho^2} - (1 + i\tau \beta^2) Ei(-i\beta^2 \tau) - e^{-i\beta^2 \tau}, \quad (I.22)$$

^{x)} Следует отметить, что такое вычитание полностью не устраняет в высших порядках по h^2 петли, имеющие всего одну вершину. Чтобы полностью исключить такие диаграммы, необходимо с самого начала вместо лагранжиана $\mathcal{L}_{int} = \frac{h^2}{4} \varphi^4$ рассматривать $\mathcal{L}_{int} = \frac{h^2}{4} [\varphi^4 - G \varphi^2 D^c(0) + 4(D^c(0))^2]$ (см. 18/).

где M - регуляризирующая масса, $E_i(z)$ - интегральная показательная функция [9].

Вклады от $S_0(h) = \exp\left\{h^2 \int d^4x \int d^4y \langle G[x(x), x(y)] g h_j \rangle\right\}$ в (I.16) начинаются членом $h^2 \tau D^c(0)$, который описывает замкнутые линии, выходящие и оканчивающиеся в одной вершине. Поэтому опустим этот член. Последующие члены по h^2 получаемые итерациями уравнения (I.15), соответствуют диаграммам на рис. 4а. Выделяя вклад в перенормировку массы и в константу Z_2 , получим для первой итерации

$$h^4 \int_0^\tau d\xi_1 d\xi_2 \langle D^c[x(\xi_1) - x(\xi_2)] D^c[x(\xi_2) - x(\xi_1)] \rangle = h^4 \left[(1 - i\beta^2 \tau) E_i(i\beta^2 \tau) - e^{-i\beta^2 \tau} \right]. \quad (I.23)$$

Ограничиваясь этим приближением, видим, что выражения (I.22) и (I.23) в инфракрасной области $p^2 \rightarrow m^2$ ($\tau \rightarrow \infty$) не содержат логарифмических особенностей (что следовало ожидать при рассмотрении массовой теории), и при $\tau \rightarrow \infty$ экспоненциально убывает. Таким образом, в рассматриваемом приближении функция Грина $G(p)$ в инфракрасной области имеет следующий вид (для сравнения см. [2]):

$$G(p) = \lim_{p^2 \rightarrow m^2} Z_2 \int_0^\infty d\tau e^{i(p^2 - m^2)\tau + F_2(h, \tau)} \xrightarrow{p^2 \rightarrow m^2} \frac{Z_2}{p^2 - m^2},$$

так как $F_2(h, \tau) \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow \infty$.

§2. Амплитуда рассеяния

Амплитуда упругого рассеяния в модели $\frac{h^2}{4} \varphi^4$ также представима в виде функционального интеграла по траекториям рассеивающихся частиц. Введем, как и в § I), интегрирование по вспомогательному полю A (I.2), записывая двухчастичную функцию Грина, аналогично одночастичной в виде

$$G(q_1, q_2; p_1, p_2) = C \int \delta A e^{-\int A^2(x) dx} G(q_1, q_2; p_1, p_2 | A) S_0(A), \quad (2.1)$$

где $G(q_1, q_2; p_1, p_2 | A)$ - двухчастичная функция Грина поля φ , взаимодействующего с классическим полем A : $S_{int} = h \varphi^2 A$.

Как известно, $G(q_1, q_2; p_1, p_2 | A)$ связано с одночастичными функциями следующим образом:

$$i^{-2} G(q_1, q_2; p_1, p_2 | A) = G(q_1, p_1 | A) G(q_2, p_2 | A) + (p_1 \leftrightarrow p_2) + (p_1 \leftrightarrow -q_2). \quad (2.2)$$

Используя для $G(q_i, p_i | A)$ представление с помощью функционального интеграла (I.5) и сдвигая в (2.2) и (2.1) поле A

$$A(x) \rightarrow A(x) + h j_1(x) + h j_2(x),$$

получим из (2.1) после перехода на массовую поверхность $p_i^2 = q_i^2 = m^2$ выражение для амплитуды T :

$$T(q_1, q_2; p_1, p_2) = \prod_{\sigma=1}^2 (C_{\sigma} \int \delta v_{\sigma} e^{-i \int_{-\infty}^{\infty} v_{\sigma}(\tau) d\tau + i h^2 \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_{\sigma}(\tau) d\tau} \int d^4 b e^{i(q_1 - p_1) \cdot b} [2h^2 \delta^{(4)}(b) + \Pi_{12}(b)] \int d\lambda \cdot \quad (2.3)$$

$$\cdot \exp \left\{ 2i h^2 \lambda \int j_1(\tau) j_2(\tau) d\tau + \Pi [h(j_1 + j_2)] \right\} + (t \leftrightarrow u) + (t \leftrightarrow s),$$

где токи $j_i(\tau)$ имеют вид:

$$j_i(\tau) = \int d^4 f \delta^{(4)}(\tau - x_i - 2 \int_{\tau}^f v_i(\tau) d\tau - 2 \mathcal{F} [p_i \cdot \theta(-\mathcal{F}) + q_i \cdot \theta(\mathcal{F})]),$$

($i=1,2$), $x_1 - x_2 = b$.

Вклад от поляризации вакуума Π в (2.3), согласно

(I.1), равен

$$\Pi [h(j_1 + j_2)] = h^2 \int d^4 g \int d^4 x G[x, x | g h(j_1 + j_2)] [j_1(x) + j_2(x)]. \quad (2.4)$$

Та часть Π , которая описывает взаимодействие рассеивающихся мезонов, обозначена через Π_{12} .

Интегрирование по $d\lambda$ в (2.3) выполняет вычитание несвязных диаграмм (рис.6), которые не дают вклада в амплитуду рассеяния.

Каждый член в формуле (2.3) ответственен за учет определенного класса диаграмм теории возмущений.

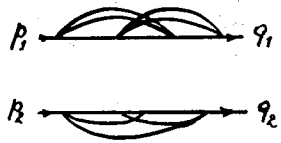


Рис.6.

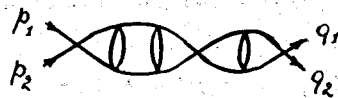


Рис.7.

Выражение $\exp \{ 2i h^2 \lambda^2 \int j_1(\tau) j_2(\tau) d\tau \}$ описывает вклад в амплитуду рассеяния тех диаграмм, которые получаются заменой $D_{\mu\nu}^c(\alpha - \gamma) \rightarrow \delta^c(\alpha - \gamma)$ в лестничных диаграммах со всевозможными перекрестиями в теории $h\varphi^2 A$ (рис.7).

Множители $\exp \{ i h^2 \lambda^2 \int_{\sigma}^2 \zeta_{\sigma}(\tau) d\tau \}$ учитывают радиационные поправки к линиям рассеивающихся частиц (рис.6). Остальные диаграммы возникают при разложении в ряд выражения $\exp \{ \Pi \}$ (рис.8).

Интегрирование по $d^4 x$ в (2.4) переводит аргументы функции Грина мезона \mathcal{F} во внешнем поле $g h(j_1 + j_2)$ $G[x, x | g h(j_1 + j_2)]$ на траектории рассеивающихся частиц:

$$\Pi [h(j_1 + j_2)] = h^2 \int d^4 g \int d^4 f \left\{ G[x_1(\mathcal{F}), x_1(\mathcal{F}) | g h(j_1 + j_2)] + G[x_2(\mathcal{F}), x_2(\mathcal{F}) | g h(j_1 + j_2)] \right\}, \quad (2.5)$$

где траектории $x_i(\mathcal{F})$ как функции собственного времени \mathcal{F} задаются следующим образом:

$$x_i(\mathcal{F}) = 2 \int_{\tau}^{\mathcal{F}} v_i(\tau) d\tau + 2 \mathcal{F} [p_i \cdot \theta(-\mathcal{F}) + q_i \cdot \theta(\mathcal{F})], \quad (i=1,2).$$

Таким образом, в отличие от формулы (I.16) предыдущего параграфа, в (2.3) входит две функции Грина мезона \mathcal{F} во внешнем поле $g h(j_1 + j_2)$. Аргументы этих функций лежат соответственно на траекториях первой $x_1(\mathcal{F})$ и второй $x_2(\mathcal{F})$ рассеивающихся частиц.

В интегральное уравнение для $G[x_1(\mathcal{F}), x_2(\mathcal{F}) | g h(j_1 + j_2)]$

$$\begin{aligned}
 G[x_1(\xi), x_2(\xi) | gh g_i + j_i] &= D[x_1(\xi) - x_2(\xi)] + \\
 + 2gh^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi D[x_1(\xi) - x_2(\xi)] G[x_1(\xi), x_2(\xi) | gh g_i + j_i] + \\
 + 2gh^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi D[x_2(\xi) - x_1(\xi)] G[x_2(\xi), x_1(\xi) | gh g_i + j_i]
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

входит "недиагональная" функция Грина во внешнем поле $G[x_1, x_2 | gh g_i + j_i]$, аргументы которой лежат на траекториях разных мезонов $x_1(\xi)$ и $x_2(\xi)$.

Поэтому (2.6) необходимо дополнить уравнением на

$$\begin{aligned}
 G[x_2, x_1 | gh g_i + j_i] : \\
 G[x_2(\xi), x_1(\xi) | gh g_i + j_i] &= D[x_2(\xi) - x_1(\xi)] + \\
 + 2gh^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi D[x_2(\xi) - x_1(\xi)] G[x_1(\xi), x_2(\xi) | gh g_i + j_i] + \\
 + 2gh^2 \int_{-\infty}^{\infty} d\xi D[x_1(\xi) - x_2(\xi)] G[x_2(\xi), x_1(\xi) | gh g_i + j_i].
 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Для функции $G[x_2(\xi), x_1(\xi) | gh g_i + j_i]$ имеем систему уравнений, аналогичную (2.6), (2.7).

Усредняя показатель экспоненты в (2.3), представим амплитуду рассеяния в виде:

$$\begin{aligned}
 T(p_1, p_2; p_1', p_2') &= \int d^4b e^{i(p_2 - p_1) \cdot b} \left[\frac{1}{(2h)^2} \delta(b) + \Pi_{12}(b) \right] \int d\lambda \\
 \exp \{ &2i h^2 \lambda \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\xi' \langle G[x_1(\xi), x_1(\xi') | gh g_i + j_i] \rangle + \\
 &+ h^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\xi d\xi' \langle G[x_2(\xi), x_2(\xi') | gh g_i + j_i] \rangle \}.
 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для нахождения $\langle G[x_1, x_1 | gh g_i + j_i] \rangle$ и $\langle G[x_2, x_2 | gh g_i + j_i] \rangle$ поступим так же, как и в §1, т.е. усредним систему уравнений (2.6) и (2.7) по траекториям рассеивающихся частиц, используя при этом приближение $\langle D[x_i - x_i] G[x_1, x_2 | gh g_i + j_i] \rangle \approx \langle D \rangle \langle G \rangle$.

В результате получим:

$$\begin{aligned}
 G_{11}(\xi, \xi') &= D_{11}(\xi, \xi') + \lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha D_{11}(\xi, \alpha) G_{11}(\alpha, \xi') + \lambda_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha D_{22}(\xi, \alpha) G_{21}(\alpha, \xi'), \\
 G_{21}(\xi, \xi') &= D_{21}(\xi, \xi') + \lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha D_{21}(\xi, \alpha) G_{11}(\alpha, \xi') + \lambda_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha D_{22}(\xi, \alpha) G_{21}(\alpha, \xi'), \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

где $G_{i\kappa}(\xi, \xi') = \langle G[x_i(\xi), x_\kappa(\xi') | gh g_i + j_i] \rangle$, $\lambda_i = 2gh^2$, $D_{i\kappa}(\xi, \xi') = \langle D[x_i(\xi) - x_\kappa(\xi')] \rangle$, $(i, \kappa = 1, 2)$.

Для G_{22} имеем подобную систему уравнений. Поэтому далее будем рассматривать только уравнения (2.9).

При рассеянии вперед ($p_i = q_i$, $i = 1, 2$)

ядра D_{11} и D_{22} в (2.9) становятся зависящими от разности аргументов. В этом случае из системы (2.9) легко получить одно интегральное уравнение для функции G_{11} .

Для этого найдем G_{21} из второго уравнения (2.9), считая $D_{21}(\xi, \xi') + \lambda_2 \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha D_{22}(\xi, \alpha) G_{11}(\alpha, \xi') = F(\xi, \xi')$ свободным членом. Преобразованием Фурье рассматриваемое уравнение решается относительно G_{21} точно, так как является интегральным уравнением с разностным ядром на бесконечной прямой:

$$\begin{aligned}
 G_{21}(\xi, \xi') &= F(\xi, \xi') + \lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha D_{22}(\xi - \alpha) G_{21}(\alpha, \xi'), \\
 G_{21}(\xi, \xi') &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega \xi} F(\omega)}{1 - \sqrt{2\pi} \lambda_1 D_{22}(\omega)}, \quad (2.10)
 \end{aligned}$$

где $F(\omega)$ - фурье-образ $F(\xi, \xi')$ по первому аргументу. Подставляя (2.10) в (2.9), получим:

$$G_{11}(\xi, \xi') = D_{11}(\xi - \xi') + \lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha D_{11}(\xi - \alpha) G_{11}(\alpha, \xi') + \lambda_2 \mathcal{K}(\xi, \xi') + \lambda_2^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \mathcal{K}(\xi, \alpha) G_{11}(\alpha, \xi'), \quad (2.11)$$

где

$$\mathcal{K}(\xi, \xi') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta D_{12}(\xi, \beta) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega\beta}}{1 - \sqrt{2}\lambda_2 D_{12}(\omega)} \int_{-\infty}^{+\infty} d\gamma e^{i\omega\gamma} D_{21}(\gamma, \xi').$$

Уравнение (2.11) представляет собой одномерное интегральное уравнение на бесконечной прямой. Каждое слагаемое в этом уравнении учитывает диаграммы определенного типа. Примеры таких диаграмм приведены на рис.8, причем диаграммы следуют в том же порядке, что и соответствующие им слагаемые в правой части уравнения (2.11).

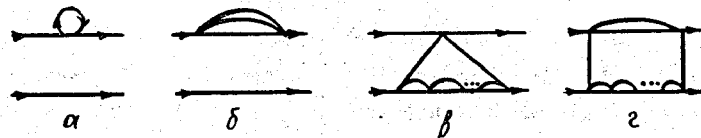


Рис.8.

С помощью разностного ядра $D_{11}(\xi - \alpha)$ в (2.11) учитываются радиационные поправки к линии первого рассеивающегося мезона (рис.8б). Неразностное ядро $\mathcal{K}(\xi, \xi')$ в (2.11) описывает обмен квантами между мезонами и радиационные поправки к линии второго мезона (рис.8в).

Таким образом, проблема учета этих диаграмм в рассматриваемом приближении сведена к решению одномерных интегральных уравнений (2.11) и аналогичного уравнения для G_{22} .

Так как одно из ядер $\mathcal{K}(\xi, \xi')$ уравнения (2.11) неразностное, то получить в замкнутом виде решение этого уравнения не удается.

С точки зрения высокоэнергетического поведения амплитуды рассеяния представляет интерес исследование, хотя бы по теории возмущений тех членов в G_{11} , которые описывают взаимодействие рассеивающихся мезонов друг с другом.

Вклад в G_{11} эффектов обмена в низшем порядке по \hbar^2 равен

$$G_{11}(\xi, \xi') = \lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\beta D_{12}(\xi, \beta) D_{21}(\beta, \xi').$$

Вместе с членом $\langle \int j_1(z) j_2(z) dz \rangle$ в показателе экспоненты в (2.8) такое приближение для G_{11} ($i=1,2$) суммирует диаграммы, представленные на рис.9.

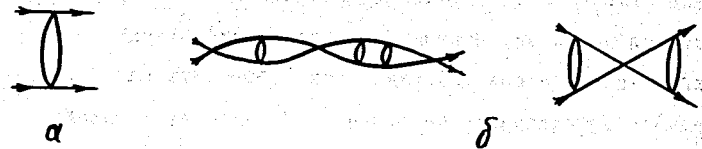


Рис.9.

Амплитуда рассеяния, соответствующая данному классу диаграмм, имеет вид:

$$T(q_1, q_2; p_1, p_2) = \int d^4b e^{i(p_1 - q_1)b} [2\hbar^2 \delta^{(4)}(b) + \Pi_{12}(b)] \cdot \int_0^1 d\lambda \exp\{2i\hbar^2 \lambda \langle \int j_1(z) j_2(z) dz \rangle + 2\hbar^4 \int d^4d' D_{12}(\xi, \xi') D_{21}(\xi', \xi) \} + (t \leftrightarrow s) + (t \leftrightarrow u), \quad (2.12)$$

где $\Pi_{12}(\theta)$ - вклад в амплитуду рассеяния за счет обмена одной петлей (рис.9а):

$$\Pi_{12}(\theta) = -h^4 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{i k \theta} \int_0^1 dx d\alpha \frac{k^2 (1-2x)}{1 - \frac{k^2}{m^2} x(1-x)},$$

$$\langle \int j_1(z) j_2(z) dz \rangle = - \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left[\frac{1}{(k^2 - 2kq_2)(k^2 + 2kq_2)} + \right. \quad (2.13)$$

$$\left. + \frac{1}{(k^2 + 2k\rho_2)(k^2 - 2k\rho_2)} + \frac{1}{(k^2 - 2kq_1)(k^2 - 2k\rho_1)} + \frac{1}{(k^2 + 2k\rho_1)(k^2 + 2kq_1)} \right],$$

$$\int \int d\alpha d\beta D_{12}(\alpha, \beta) D_{21}(\beta, \alpha) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int \frac{d^4k_1 d^4k_2 d\alpha d\beta}{(k_1^2 - m^2)(k_2^2 - m^2)} e^{-i(k_1 - k_2)\theta} \quad (2.14)$$

$$\cdot \exp\{2i(k_1 - k_2)\rho_2 \alpha - \rho_2 \beta\}$$

Из-за δ - функции в (2.12) сумма рассматриваемого класса диаграмм не представима в эйкональной форме [6, 12]. δ - функция ответственна за "контактное" взаимодействие между рассеивающимися мезонами. Поэтому отсутствие эйкональной формулы для данного класса диаграмм можно объяснить наличием δ - образного эффективного потенциала [13], соответствующего диаграммам "контактного" мезон-мезонного взаимодействия (рис.9б).

Если в (2.12) ограничиться членом, пропорциональным $\delta^{(4)}(\theta)$, то для регуляризованных значений (2.13) и (2.14) получаем

$$\langle \int j_1(z) j_2(z) dz \rangle \xrightarrow{R, S \rightarrow \infty} C_1(h^2 s + h^2 u),$$

$$\left(\int \int d\alpha d\beta D_{12} D_{21} \right) \xrightarrow{R, S \rightarrow \infty} h^4 C_2(h^2 s + h^2 u).$$

Амплитуда рассеяния $T(s, u)$ в этом случае не зависит от t и принимает вид

$$T(s, u) = 2h^2 \exp\{h^2 C_1(h^2 s + h^2 u) + h^4 C_2(h^2 s + h^2 u)\}, \quad (2.15)$$

где C_1 и C_2 - некоторые отрицательные константы ($C_1 = -\frac{1}{4\pi^2}$).

Разложение в ряд (2.15) воспроизводит асимптотическое поведение диаграмм на рис.7 и 9.

Вопрос о том, можно ли получить эйкональное представление для суммы диаграмм, не учитывающих контактное взаимодействие, требует дальнейшего исследования.

В заключение авторы считают своим приятным долгом поблагодарить А.В.Ефремова, И.Ф.Гинзбурга и В.Н.Первушина за полезные обсуждения затронутых здесь вопросов.

Литература

1. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей, М., Гостехиздат, 1957.
2. Б.М.Барбашов, ЖЭТФ 48, 607 (1965).
3. В.М.Barbashov, S.P.Kulashov, V.A.Matveev, V.N.Pervushin, A.N.Sissakian, JINR comun.Е2-5827 (1971).
4. Н.Н.Боголюбов, Вестник МГУ (сер.физ. и астр.) № 4-5, 115 (1955).
5. И.А.Баталин, Е.С.Фрадкин, Труды ФИАН, т.57, стр.29, "Наука", М., 1972.
6. В.М.Barbashov, S.P.Kuleshov, V.A.Matveev, V.N.Pervushin, A.N.Sissakian, A.^N.Tavkhelidze, Phys.Lett., JJV, 484; ТМФ 13, 178 (1972).
7. М.Г.Крейн, УМН 13, 3 (1958).
8. А.Н.Васильев, ТМФ 13, 178 (1972).
9. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, "Наука", М., 1971.
10. Г.А.Миляхин, Е.С.Фрадкин, ЖЭТФ 45, 1926 (1963).
11. Б.М.Барбашов, М.К.Волков, ЖЭТФ 50, 660 (1966).
В.А.Матвеев, А.Н.Тавхелидзе, ТМФ 9, 44 (1971).
12. Б.М.Барбашов, С.П.Кулешов, В.А.Матвеев, А.Н.Сисакян, ТМФ, 3, 342 (1970).
13. В.Н.Первушин. Сообщение ОИЯИ P2-5990 (1971).

Рукопись поступила в издательский отдел
26 марта 1973 года.