СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 7002

В.М.Лебеденко

СЛЕДЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ ОБОБЩЕННЫХ СДВИГОВ ПЯТИМЕРНОГО ГИПЕРБОЛОИДА

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 7002

В.М.Лебеденко

СЛЕДЫ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУППЫ ОБОБЩЕННЫХ СДВИГОВ ПЯТИМЕРНОГО ГИПЕРБОЛОИДА

Лебеденко В.М. P2 - 7002

Следы представлений группы обобщенных сдвигов пятимерного гиперболоида

Получена формула для следов представлений группы обобщенных сдвигов пятимерного гиперболоида. Она справедлива для всякого оператора T^c_ϕ, соответствующего неприводимому унитарному представлению $T^c(g)$ и функции $\phi(x) \in C_0^\infty$ на ее алгебре Ли $L\,(L \ni X = (x_0, x_1, x_2, x_3))$. Каждый такой оператор имеет конечный след $sp\,T^c_\phi$, равный интегралу Лебега

$$sp\,T^c_\phi = \frac{1}{8} \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_L \phi(X)\, e^{2\pi i(sa+tc,X)} \frac{x_0^3}{sh^3(x_0)}\, dX \Big)\, t\, ds\, dt,$$

где $a = (1,0,0,0)$, $c = (0, c_1, c_2, c_3)$, $\|c\| = 1$.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1973

Lebedenko V.M. P2 - 7002

Traces of Representations of a Group of Generalized Shears of the Five-Dimensional Hyperboloid

The formula is obtained for the traces of representations of a group of generalized shears of the five-dimensional hyperboloid. This formula is valid for any operator T^c_ϕ, corresponding to the irreducible unitary representation $T^c(g)$ and function $\phi(x) \in C_0^\infty$ on its Lie algebra $L\,(L \ni X = (x_0, x_1, x_2, x_3))$. Each of such operators has finite trace $sp\,T^c_\phi$ equal to Lebesgue integral

$$sp\,T^c_\phi = \frac{1}{8} \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int\limits_L \phi(X)\, e^{2\pi i(sa+tc,X)} \frac{x_0^3}{sh^3(x_0)}\, dX \Big)\, t\, ds\, dt,$$

where $a = (1,0,0,0)$, $c = (0, c_1, c_2, c_3)$, $\|c\| = 1$.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1973

1. Введение

В настоящей работе мы продолжаем изучение группы обобщенных сдвигов пятимерного гиперболоида, которая имеет существенное значение для нового подхода в квантовой теории поля, изложенного в статье /1/.

Указанная группа Ли изоморфна четырехпараметрической группе K, состоящей из действительных векторов

$$(x_0, \vec{X}) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

$$(x_i \in (-\infty, +\infty)).$$

Операция умножения в K определяется так:

$$(x_0, \vec{X})(y_0, \vec{Y}) = (x_0 + y_0,\; e^{-y_0}\vec{X} + \vec{Y}).$$

С точки зрения теории групп Ли группа K является некомпактной и экспоненциальной /3/,/2/.

В предыдущей работе /2/ были описаны все, с точностью до эквивалентности, неприводимые унитарные представления группы K.

Найденные представления в пространстве $L^2(-\infty, +\infty)$ имеют вид:

$$T^{c}(g)f(y)=e^{ie^{y+x_0}(\vec{C},\vec{X})}f(y+x_0),$$

где $g=(x_0,\vec{X})\in K$, $c=(0,\vec{C})$, $f(y)\in L^2(-\infty,\infty)$, $(\vec{C},\vec{X})$– скалярное произведение $\vec{C}$ и $\vec{X}$ в E_3.

Каждое такое представление определяется вектором $c=(0,\vec{C})$, которому соответствует орбита Ω_c – подмножество в алгебре линейных функционалов L' над алгеброй Ли L группы K, инвариантное относительно присоединенного представления K.

Орбиты Ω_c представляют собой полуплоскости, состоящие из элементов вида

$$Y=ta+sc\in\Omega_c\subset L', \tag{1}$$

где $t\in(-\infty,+\infty)$, $s\in(0,+\infty)$,

$$a=(1,0,0,0)\in L', \quad c=(0,\vec{C})=(0,c_1,c_2,c_3)\in L'.$$

Заметим еще, что все векторы $c=(0,\vec{C})$ в работе/2/ нормированы условием

$$\|c\|_{E_4}=\|\vec{C}\|_{E_3}=1. \tag{2}$$

Для построения фурье-анализа на группе K необходимо знание следов операторов T_ϕ (см. раздел 2), обозначаемых в дальнейшем $sp\,T_\phi$.

Действительно, формула Планшереля и формула обращения для некоторых функций $\phi(g)$ на группе G имеют вид (см. /3/):

$$\int_G|\phi(g)|^2dg=\int_{\hat{G}}sp[(T_\phi^\lambda)^*T_\phi^\lambda]d\mu(\lambda),$$

$$\phi(g)=\int_{\hat{G}}sp[(T_g^\lambda)^*T_\phi^\lambda]d\mu(\lambda),$$

где $d\mu(\lambda)$ – мера (мера Планшереля) на множестве орбит $\hat{G}$.

Настоящая работа посвящена получению формулы для вычисления следов представлений группы K.

2. Операторы T_ϕ

Пусть $T(g)$ – слабо непрерывное унитарное представление некоторой группы G в гильбертовом пространстве H.

Тогда для любой функции $\phi=\phi(g)\in L^1(G)$ можно определить новый оператор T_ϕ как операторный интеграл:

$$T_\phi=\int\phi(g)T(g)dg.$$

Иными словами, для любых ξ, $h\in H$ скалярное произведение

$$(T_\phi\xi,h)=\int\phi(g)(T(g)\xi,h)dg.$$

3. Общая формула следа

Ввиду экспоненциальности рассматриваемой группы функции на K можно отождествить с функциями $\phi(X)$

на ее алгебре Ли L. Кроме того, для всех функций ϕ из C_0^∞ (C_0^∞ – пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем) операторы T_ϕ имеют конечный след, который можно вычислить по формуле (см. /3/)

$$sp\, T_\phi = \int_\Omega \Big(\int_L \phi(X)\, p_\Omega^{-1}(X)\, e^{2\pi i (F,X)} dX \Big) d\beta_\Omega(F). \qquad (3)$$

В этой формуле Ω – орбита, соответствующая представлению $T(g)$, $F \in \Omega$, dX – мера Лебега на L. Подлежат определению функции $p_\Omega(X)$ $(X \in L)$ и меры на орбитах $d\beta_\Omega(F)$.

В нашем случае все орбиты Ω_c имеют размерность 2, то есть являются орбитами максимальной размерности. Поэтому в качестве $p_\Omega(X)$ можно взять универсальную функцию (см. /3/)

$$p_\Omega(X) \equiv q(X) = \det R(ad\, X),$$

где

$$R(t) = \frac{sh(\frac{t}{2})}{\frac{t}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\frac{t}{2})^{2k}}{(2k+1)!}. \qquad (4)$$

4. Вычисление функций $p_\Omega(X)$

Пусть $X = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in L$. Найдем $q(X)$ (см. (4)). Матрицы $(adX)^n$ имеют вид (см. /2/)

$$adX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & x_0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & x_0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & x_0 \end{pmatrix},$$

$$(adX)^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ (\frac{-x_1}{x_0})x_0^n & x_0^n & 0 & 0 \\ (\frac{-x_2}{x_0})x_0^n & 0 & x_0^n & 0 \\ (\frac{-x_3}{x_0})x_0^n & 0 & 0 & x_0^n \end{pmatrix},$$

при $x_0 \neq 0$ и

$$adX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -x_1 & 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 0 & 0 \\ -x_3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (adX)^n = 0 \ (n > 1)$$

при $x_0 = 0$.

Если $x_0 \neq 0$, то, подставив матрицы $(adX)^{2k}$ в ряд (4), получим, что $R(adX)$ – треугольная матрица с диагональными элементами

$$1, \quad \frac{sh(\frac{x_0}{2})}{\frac{x_0}{2}}, \quad \frac{sh(\frac{x_0}{2})}{\frac{x_0}{2}}, \quad \frac{sh(\frac{x_0}{2})}{\frac{x_0}{2}}.$$

Следовательно,

$$q(X) = \det(R(adX)) = 8\,\frac{sh^3(\frac{x_0}{2})}{x_0^3}.$$

Если $x_0 = 0$, то

$$R(adX) = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и $\det R(adX) = 1$.

Так как $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{8\, sh^3\left(\frac{t}{2}\right)}{t^3} = 1$, то будем считать, что эта функция доопределена при $t = 0$.

Таким образом, мы получили, что при любом

$X = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in L$

$$P_\Omega(X) = q(X) = \frac{8\, sh^3\left(\frac{x_0}{2}\right)}{x_0^3}. \tag{5}$$

5. Определение меры $d\beta_\Omega(F)$

Руководствуясь методом, изложенным в работе [3], мы получаем, что в нашем случае элемент поверхности на орбите Ω_c должен иметь вид:

$B_{\Omega_c}(F)(\xi_X, \xi_Y) = (F, [X, Y])$,

где

$\xi_X = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in \Omega_c$

при

$X = (x_0, x_1, x_2, x_3) \in L$.

Найдем теперь явное выражение для $d\beta_{\Omega_c}(F)$.

Пусть F, ξ_X, $\xi_Y \in \Omega$ (см. (1)) и $F = sa + tc\ (t > 0)$,

$\xi_X = s_1 a + t_1 c \quad (t_1 > 0)$,

$\xi_Y = s_2 a + t_2 c\ (t_2 > 0)$, $a = \xi_{\hat{a}}$, $c = \xi_{\hat{c}}$,

$\hat{a}, \hat{c} \in L$.

Тогда

$[X, Y] = [s_1\hat{a} + t_1\hat{c},\ s_2\hat{a} + t_2\hat{c}] =$

$= s_1 t_2 [\hat{a}, \hat{c}] + s_2 t_1 [\hat{c}, \hat{a}] =$

$= (s_1 t_2 - s_2 t_1)[\hat{a}, \hat{c}]$.

Коммутатор $[\hat{a}, \hat{c}] = ad\,\hat{a}(\hat{c}) =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \hat{c}.$$

Следовательно,

$[X, Y] = (s_1 t_2 - s_2 t_1)\hat{c}$

и

$(F, [X, Y]) = (s_1 t_2 - s_2 t_1)(F, \hat{c}) =$

$= (s_1 t_2 - s_2 t_1)(F, c)_L =$

$= (s_1 t_2 - s_2 t_1)(sa + tc, c)_L =$

$$= t(s_1 t_2 - s_2 t_1) = t \begin{vmatrix} s_1 & t_1 \\ s_2 & t_2 \end{vmatrix},$$

так как $(a, c) = 0$, $(c, c) = \|c\|^2 = 1$

(см. (1), (2)).

В координатах (s, t) на Ω_c определитель

$$\begin{vmatrix} s_1 & t_1 \\ s_2 & t_2 \end{vmatrix} -$$

обычный элемент площади на евклидовой плоскости.

Поэтому меру $d\beta_{\Omega_c}(F)$ можно записать так:

$$d\beta_{\Omega_c}(F) = t\, ds\, dt, \tag{6}$$

где $ds\,dt$ – мера Лебега.

6. Окончательный результат

Теперь, после того, как определены $p_{\Omega_c}(X) = q(X)$ и $d\beta_{\Omega_c}(F)$, формуле (3) можно придать конкретный вид. Именно, для любого неприводимого представления $T^c(g)$ группы K, соответствующего орбите $\Omega_c \ni sa + tc$ $(a = (1,0,0,0)$, $c = (0, c_1, c_2, c_3)$, $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1)$, и любой функции $\phi \in C_0^\infty$ оператор T_ϕ имеет конечный след

$$sp\, T_\phi^c = \frac{1}{8} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Big(\int_L \phi(x) e^{2\pi i(sa+tc,X)} \frac{x_0^3}{sh^3\left(\frac{x_0}{2}\right)} dX \Big)\, t\, ds\, dt \tag{7}$$

(интеграл в смысле Лебега).

В заключение автор выражает глубокую благодарность В.Г.Кадышевскому за инициирование этой работы и Д.П.Желобенко за ценные советы.

Литература

1. В.Г.Кадышевский. Квантовая теория с неевклидовым пространством относительных импульсов. Препринт ОИЯИ, Р2-5717, Дубна, 1971.
2. В.М.Лебеденко. Описание неприводимых унитарных представлений некомпактной группы обобщенных сдвигов пятимерного гиперболоида. Препринт ОИЯИ, Р2-6033, Дубна, 1971.
3. А.А.Кириллов. Элементы теории представлений. Москва, "Наука", 1972.

Рукопись поступила в издательский отдел 19 марта 1973 года.