

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА



С324.1а
Н-972

14/v-

P2 - 6996

Н.Е. Ньюнко , Ю.Н. Тюхтяев, Р.Н. Фаустов

1664/2-73

ИНФРАКРАСНЫЕ ОСОБЕННОСТИ
И СВЕРХТОНКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ В ПОЗИТРОНИИ

1973

**ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ**

P2 - 6996

Н.Е. Ньюнко*, Ю.Н.Тюхтяев*, Р.Н. Фаустов

ИНФРАКРАСНЫЕ ОСОБЕННОСТИ
И СВЕРХТОНКОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ В ПОЗИТРОНИИ

* Саратовский государственный университет

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

Нюнько Н.Е., Тюхтяев Ю.Н., Фаустов Р.Н.

P2 - 6996

Инфракрасные особенности и сверхтонкое расщепление в позитронии

В рамках квазипотенциального подхода в квантовой теории поля исследован вклад мягких (инфракрасных) фотонов в сверхтонкий сдвиг уровней энергии позитрония. Показано, что частичный выход за массовую поверхность с помощью параметра полной энергии позволяет полностью устранить инфракрасные расходимости и тем самым более строго подтвердить результаты предыдущих вычислений.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1973

Nyunko N.E., Tyukhtyaev Yu.N., Faustov R.N. P2 - 6996

Infrared Singularities and Hyperfine Splitting in Positronium.

The contribution of the soft (infrared) photons to the hyperfine shift of the positronium energy levels is studied in the framework of the quasipotential approach in quantum field theory.

It is shown that the partial departure off the mass shell with the help of the total energy parameter allows the infrared divergences to be completely eliminated and, thereby, to confirm more rigorously the results of the previous calculations.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1973

Расщепление основного уровня позитрония с точностью до α^5 было впервые вычислено с помощью уравнения Бете-Солпитера^{1/}. В этой работе устранение особенностей соответствующих интегралов в инфракрасной области осуществлялось путем введения обрезания величины виртуального трехимпульса.

В результате последующего более строгого исследования было показано, что область трехимпульсов, не рассмотренная вследствие обрезания, не вносит конечного вклада в сверхтонкий сдвиг основного уровня позитрония^{2/}.

Хорошо известно, что квазипотенциальный подход в квантовой теории поля является наиболее эффективным методом для вычисления уровней энергии связанного состояния двух частиц^{3,4/}. Однако и здесь возникает необходимость в отдельном рассмотрении вклада в сверхтонкое расщепление позитрония от соответствующих диаграмм в инфракрасной области. Инфракрасные особенности^{5/} появляются лишь при переходе на массовую поверхность. Квазипотенциал строится^{3/} с помощью амплитуды рассеяния двух частиц вне массовой поверхности, а сдвиг уровней энергии определяется^{4/} матричными элементами квазипотенциала между волновыми функциями связанного состояния, т.е. вне физической области рассеяния. Таким образом, инфракрасные особенности в этом случае,

вообще говоря, не должны были бы возникать^{5/}. Однако, как правило, на практике вычисление матричных элементов удается выполнить лишь в так называемом приближении рассеяния^{6/}, когда импульсы частиц переводятся фактически на массовую поверхность. Эта процедура приводит, с одной стороны, к упрощению соответствующих выражений, с другой - к отсутствию радиационных (собственно-энергетических) поправок для внешних линий диаграмм Фейнмана^{5/}.

Кроме того, существует проблема правильного учета многократного обмена мягкими (инфракрасными) фотонами в виртуальных промежуточных состояниях двух частиц. Дело в том, что обычное разложение по постоянной тонкой структуры здесь неприменимо, и поэтому необходимо производить суммирование бесконечной последовательности соответствующих диаграмм. Это, в свою очередь, приводит к учету эффекта связанности и устранению инфракрасных расходимостей. Такое суммирование проще всего осуществить с помощью нового уравнения типа Дайсона для двухчастичной функции Грина, полученного в работе^{7/}.

Рассмотрим амплитуду рассеяния электрона и позитрона вне массовой поверхности, изображенную на рис. I

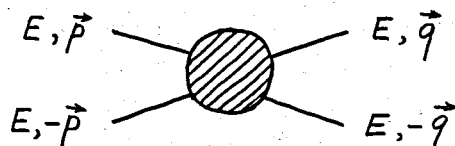


Рис. I

Переход на массовую поверхность, очевидно, соответствует

$$E^2 = p^2 + m^2 = q^2 + m^2 \quad (1)$$

В случае задачи на связанные состояния полная энергия системы $2E$ в первом приближении определяется нерелятивистскими кулоновскими уровнями энергии:

$$2E = 2m - \frac{\alpha^2 m}{4n^2}, \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

В конкретных расчетах сверхтонкой структуры позитрония обычно бывает достаточно с нужной точностью положить

$$\vec{p} \cong \vec{q} \cong 0, \quad E \cong m.$$

Однако при этом немедленно возникают инфракрасные расходимости на промежуточных этапах вычислений. И хотя в суммарном выражении для сверхтонкого расщепления основного уровня эти расходимости взаимно компенсируются, инфракрасные особенности требуют более аккуратного рассмотрения.

С этой целью удобно использовать прием частичного выхода за массовую поверхность. При таком подходе мы полагаем

$$\vec{p} \cong \vec{q} \cong 0, \quad E \neq m, \quad (3)$$

а величина $2E$ определяется соотношением (2). Тогда все интегралы по виртуальным импульсам становятся конечными. Таким образом, этот прием играет роль физической регуляризации интегралов в инфракрасной области.

В качестве примера рассмотрим вклад в сверхтонкий сдвиг S -уровней энергии (2) диаграмм двухфотонного обмена с точностью до членов порядка α^5 . Соответствующее выражение^{4/} имеет вид:

$$\Delta E_{hfs}^{2\gamma} = |\tilde{\Psi}_0(0)|^2 \langle T_{par}^{2\gamma}(E) + T_{cr}^{2\gamma}(E) - 2V_C F(E) V_{hfs}^{\gamma} \rangle, \quad (4)$$

где квадрат модуля кулоновской волновой функции в начале координат

$$|\tilde{\Psi}_0(0)|^2 = \frac{(\alpha m)^3}{8\pi n^3}, \quad V_C(k) = -\frac{e^2}{k^2},$$

диаграммы с двумя параллельными и перекрестными фотонными линиями дают вклад:

$$T_{par}^{2\gamma}(E) = (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{\alpha^2}{m^2} \int_0^{\infty} dk \left[\frac{-2m}{2mk + m^2 - E^2} + \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} + \frac{8m^2}{3\sqrt{k^2 + m^2}(k^2 + m^2 - E^2)} \right] = (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{\alpha^2}{m^2} \left[\frac{4\pi m^2}{3m\sqrt{m^2 - E^2}} + \ln \frac{m^2 - E^2}{m^2} - \frac{8}{3} \right],$$

$$T_{cr}^{2\gamma}(E) = (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{\alpha^2}{m^2} \int_0^{\infty} dk \left[\frac{2m}{2mk + m^2 - E^2} - \frac{1}{\sqrt{k^2 + m^2}} + \frac{5m^2}{3(k^2 + m^2)^{3/2}} \right] = (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{\alpha^2}{m^2} \left[\ln \frac{m^2}{m^2 - E^2} + \frac{5}{3} \right],$$

а вычитаемая итерация членов низшего порядка

$$2V_C F(E) V_{hfs}^{\gamma} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3k \frac{e^2}{k^2} \frac{m}{(k^2 + m^2 - E^2)} \frac{e^2}{6m^2} (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) = (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{8\alpha^2}{3m} \int_0^{\infty} \frac{dk}{k^2 + m^2 - E^2} = (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{4\pi\alpha^2}{3m\sqrt{m^2 - E^2}}.$$

Поскольку $(m^2 - E^2) \sim m^2 \alpha^2$, то везде, где это не приводило к расходимостям интеграла, мы положили $m^2 - E^2 = 0$. Тем самым мы отбросили члены высших порядков по α , которые и не должны учитываться в рассматриваемом здесь приближении. В результате, подставляя приведенные выше выражения в равенство (4), мы найдем сдвиг S -уровней

$$\Delta E_{hfs}^{2\gamma} = -|\tilde{\Psi}_0(0)|^2 \frac{\alpha^2}{m^2} \langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle = -\frac{\alpha^5 m}{8\pi n^3} \langle \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2 \rangle, \quad (5)$$

совпадающий с результатом работы⁴.

Из выражения (5) видно, что все члены порядка α^{-1} и $\ln \alpha$ взаимно уничтожились, и остались лишь члены порядка α^5 . Однако, как уже указывалось выше, необходимо еще рассмотреть возможный вклад многократного обмена мягкими кулоновскими фотонами, учитывающий эффект связанности в промежуточных виртуальных состояниях электрона и позитрона. Используя метод, предложенный в работе^{7/}, мы найдем, что следует рассмотреть вклад двух диаграмм, изображенных на рис.2, где пунктирной линией обозначены кулоновские фотоны.

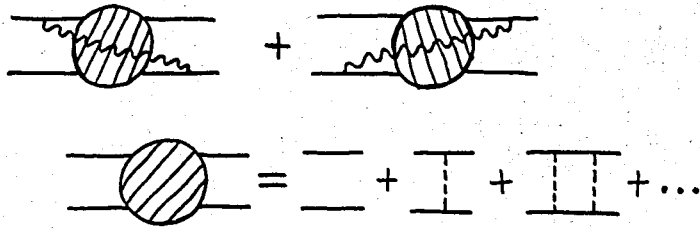


Рис. 2

Поскольку энергия связи позитрония (2) мала, то все эффекты связанности проявляются лишь при малых импульсах виртуального фотона. Параметр, ограничивающий низкочастотную область, λ , следует выбрать таким, чтобы

$$\alpha^2 m \ll \lambda \ll m. \quad (6)$$

На практике удобно взять $\lambda \sim \alpha m$. В области $k < \lambda$ мы можем воспользоваться функцией Грина нерелятивистского уравнения Шредингера с кулоновским потенциалом:

$$G_C^{NR}(\vec{p}, \vec{q}; E) = \sum_n \frac{\Psi_n(\vec{p}) \Psi_n^*(\vec{q})}{E - E_n + i0}. \quad (7)$$

Соответствующий вклад в сверхтонкий сдвиг S -уровней энергии имеет вид:

$$\Delta E_{hfs}^< = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\vec{p} d\vec{q} \Psi_0^*(\vec{p}) \left\{ 2T_<(\vec{p}, \vec{q}; E_0) - 2[V_C F(E_0) V_{hfs}^>]_< \right\} \Psi_0(\vec{q}), \quad (8)$$

где

$$T_<(\vec{p}, \vec{q}; E) = (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{e^2}{6m^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k < \lambda} d^3k k \sum_n \frac{\Psi_n(\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{k}) \Psi_n^*(\vec{q} + \frac{1}{2}\vec{k})}{k + E_n - E_0 - i0},$$

$$[V_C F(E_0) V_{hfs}^>]_< =$$

$$= (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{e^2}{6m^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k < \lambda} d^3k \frac{e^2}{(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k})^2} \frac{m}{[(\vec{q} + \vec{k})^2 + m^2 - E_0^2]}.$$

Воспользуемся теперь тождеством

$$\frac{k}{k + E_n - E_0} = 1 + \frac{E_0 - E_n}{k} + \frac{(E_n - E_0)^2}{k(k + E_n - E_0)} \quad (9)$$

и уравнением Шредингера для кулоновской волновой функции:

$$F^{-1}(E) \Psi = V_C \Psi$$

$$\text{или} \quad \frac{1}{m} (E^2 - m^2 - p^2) \Psi(\vec{p}) = -\frac{e^2}{(2\pi)^3} \int d\vec{q} \frac{\Psi(\vec{q})}{(\vec{p} - \vec{q})^2}. \quad (10)$$

В силу ограничения (6) на обрезание импульса виртуального фотона и оценки

$$(E_n - E_0) \sim m\alpha^2$$

последний член в разложении (9) не дает вклада в принятом приближении.

Используя уравнение (10), можно показать, что во втором члене разложения (9) величина $(E_0 - E_n)$ заменяется на

$$\frac{1}{2m} (\vec{p} - \vec{q} - \vec{k}) \cdot \vec{k},$$

и с учетом условия полноты волновых функций

$$\sum_n \Psi_n(\vec{p} - \frac{1}{2}\vec{k}) \Psi_n^*(\vec{q} + \frac{1}{2}\vec{k}) = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k}).$$

этот член тождественно обращается в нуль.

Таким образом, выражение (8) принимает вид:

$$\Delta E_{hfs}^< = \frac{1}{(2\pi)^6} \int d\vec{p} d\vec{q} \Psi_0^*(\vec{p}) (\vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2) \frac{4\pi\alpha}{3m^2} \left\{ \int_{k < \lambda} d^3k \delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k}) - \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k < \lambda} d^3k \frac{e^2}{(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k})^2} \frac{m}{[(\vec{q} + \vec{k})^2 + m^2 - E_0^2]} \right\} \Psi_0(\vec{q}). \quad (II)$$

Второе слагаемое в равенстве (II) преобразуем с помощью уравнения (IO) для волновой функции:

$$\int d\vec{p} \Psi_0^*(\vec{p}) \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{k < \lambda} d^3k \frac{e^2}{(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k})^2 [(q + k)^2 + m^2 - E_0^2]} = \int d\vec{p} \Psi_0^*(\vec{p}) \int_{k < \lambda} d^3k \delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k}).$$

Таким образом, оба слагаемых в выражении (II) взаимно уничтожаются, и, следовательно, в рассматриваемом приближении вклад многократного обмена кулоновскими фотонами в сверхтонкий сдвиг S -уровневой энергии обращается в нуль:

$$\Delta E_{hfs}^< = 0.$$

Выход за массовую поверхность с помощью введения параметра полной энергии $2E \neq 2m$ целесообразен еще и потому, что это позволяет отказаться от необходимости последовательного интегрирования по нулевой и пространственным компонентам виртуального четырехимпульса, которое гораздо сложнее ковариантных методов параметризации интегралов.

Рассмотрим, например, диаграмму обменного взаимодействия с вершинной частью третьего порядка, изображенную на рис.3

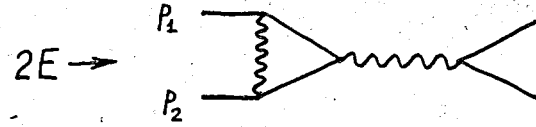


Рис.3

После проведения процедуры перенормировки выражение для вершинной части в нужном нам приближении имеет вид:

$$\Gamma_{\mu}^R(E) = \gamma_{\mu} \frac{2\alpha}{i\pi^2} \int \frac{k^2 dk d\omega}{\omega^2 - k^2} \left\{ \frac{\omega^2 - \frac{1}{3}k^2 - 2m^2}{[(\omega + E)^2 - k^2 - m^2][(\omega - E)^2 - k^2 - m^2]} + \frac{\omega^2 + k^2 - 2\omega m - 2m^2}{[(\omega + E)^2 - k^2 - m^2]^2} \right\} = \gamma_{\mu} \rho(E). \quad (I2)$$

Перенормировка производится в точке

$$P_1^2 = P_2^2 = E^2, \quad (P_1 + P_2)^2 = 0,$$

что обеспечивает отсутствие инфракрасных расходимостей и радиационных поправок для внешних линий. Наиболее удобным методом выполнения интегрирования по виртуальному импульсу в выражении (I2) является метод, использовавшийся в статье^{8/}. Для $\rho(E)$ с его помощью можно получить:

$$\rho(E) = m^2 \frac{2\alpha}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dz}{(z + m^2 - E^2) \sqrt{(z + m^2 - E^2)^2 + 4zm^2}} \approx \frac{\alpha}{\pi} \left[\frac{\pi m}{\sqrt{m^2 - E^2}} - 2 \right]; \quad \omega = i\sqrt{z} \sin \theta, \quad k = \sqrt{z} \cos \theta.$$

(I3)

Соответствующий вклад в сверхтонкий сдвиг S -уровней энергии ^{4/} равен:

$$\Delta E_{hfs}^{\Gamma} = \langle \vec{S}^2 \rangle |\tilde{\Psi}_0^{\Gamma}(0)|^2 \left[2 \frac{e^2}{4m^2} \rho(E_0) - 2 V_c F(E_0) \frac{e^2}{4m^2} \right], \quad (I4)$$

где $\vec{S} = \frac{1}{2}(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$, $\vec{S}^2 = \frac{1}{2}(3 + \vec{\sigma}_1 \cdot \vec{\sigma}_2)$,

$$V_c F(E_0) = \frac{e^2 m}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{k^2 + m^2 - E_0^2} = \frac{\alpha m}{\sqrt{m^2 - E_0^2}}.$$

Подставляя выражение (13) для $\rho(E)$ в равенство (I4), мы найдем:

$$\Delta E_{hfs}^{\Gamma} = - \frac{4\alpha^2}{m^2} |\tilde{\Psi}_0^{\Gamma}(0)|^2 \langle \vec{S}^2 \rangle = - \frac{\alpha^5 m}{2\pi h^3} \langle \vec{S}^2 \rangle. \quad (I5)$$

что также согласуется с результатом работы ^{4/}.

Таким образом, выход за массовую поверхность с помощью параметра полной энергии $2E \neq 2m$ позволяет провести в рамках квазипотенциального подхода корректное рассмотрение вклада мягких (инфракрасных) фотонов и тем самым более строго подтвердить результаты вычислений сверхтонкого сдвига S -уровней энергии позитрония, полученные в работе ^{4/}. Кроме того, в отличие от метода нековариантного обрезания интегралов в области малых трехимпульсов, предложенный выше прием дает возможность использовать более удобные в релятивистской теории ковариантные способы интегрирования по виртуальным импульсам, что существенно облегчает вычисление вклада порядка α^6 в сверхтонкое расщепление основного уровня энергии позитрония ^{8/}.

В заключение авторы выражают благодарность Н.Н.Боголюбову, А.А.Логонову, Л.Д.Соловьеву, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодорову и О.А.Хрусталеву за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература:

1. R.Karplus, A.Klein, Phys.Rev. 87, 848 (1952).
2. T.Fulton, R.Karplus, Phys.Rev. 93, 1109 (1954).
3. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, Nuovo Cim. 29, 380 (1963).
4. Р.Н.Фаустов. Препринт ОИЯИ Р-1572, Дубна (1964).
ЭЧАЯ 3, вып. I, 238 (1972).
5. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей, ГИТТЛ, Москва, 1957.
6. R.Mills, N.Kroll. Phys.Rev. 98, 1489 (1955).
7. Р.Н.Фаустов, препринт ОИЯИ Е2-6939, Дубна, 1973.
8. Н.Е.Ньнько, Д.Н.Тухтаев, ТМФ 12, 56 (1972).

Рукопись поступила в издательский отдел
16 марта 1973 года.