

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ  
ДУБНА



СЗУ6,46

Д-82

4/VI-73

P2 - 6981

2031/2-73

О.В.Думбрайс, Ф.Никитиу, Ю.А.Щербаков

ПРИМЕНЕНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ  
С УСКОРЕННОЙ СХОДИМОСТЬЮ  
ДЛЯ ФАЗОВОГО АНАЛИЗА УПРУГОГО  
 $\text{P}^{\dagger}$  He<sup>4</sup> -РАССЕЯНИЯ

**1973**

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

P2 - 6981

О.В.Думбрайс\*, Ф.Никитиу\*\*, Ю.А.Шербаков

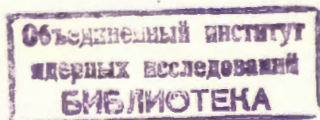
ПРИМЕНЕНИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ  
С УСКОРЕННОЙ СХОДИМОСТЬЮ  
ДЛЯ ФАЗОВОГО АНАЛИЗА УПРУГОГО  
 $\pi^+$  He<sup>4</sup> -РАССЕЯНИЯ

Направлено в *Revue Roumaine de Physique*

---

\* НИИЯФ МГУ

\*\* Институт атомной физики, Бухарест, Румыния



Думбрайс О.В., Никитиу Ф., Шербаков Ю.А. P2 - 6981

Применение разложения с ускоренной сходимостью для фазового анализа упругого  $\pi^\pm \text{He}^4$ -рассеяния

В работе при помощи разложения с ускоренной сходимостью проводится фазовый анализ упругого  $\pi^\pm \text{He}^4$ -рассеяния в области энергий 25 + 180 Мэв. Сравниваются результаты этого анализа с результатами стандартного фазового анализа. Указывается на важность учета высших парциальных волн.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.  
Дубна, 1973

Dumbrais O.V., Nichitiu F., Scherbakov Yu.A.

Application of Accelerated Convergence Expansion for the Phase Shift Analysis of the Elastic  $\pi^\pm \text{He}^4$  Scattering

The phase shift analysis of the elastic  $\pi^\pm \text{He}^4$  scattering in the energy range of 25-180 MeV has been carried out by means of the accelerated convergence expansion. The results of this analysis are compared with those of conventional analysis. The possibility of the more realistic estimation of the higher partial wave contribution is discussed.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.  
Dubna, 1973

Недавно был произведен стандартный фазовый анализ упругого  $\pi^\pm \text{He}^4$ -рассеяния<sup>/1/</sup>. Однако существует и новый метод фазового анализа, основанный на использовании разложения в ряды с ускоренной сходимостью /РУС/<sup>/2-7/</sup>. Целью настоящей работы является повторение фазового анализа, проведенного в работе<sup>/1/</sup>, с использованием нового метода и сравнение результатов обоих анализов.

В стандартном методе фазового анализа амплитуда рассеяния  $f(x \equiv \cos \theta)$  раскладывается по парциальным волнам в ряд по полиномам Лежандра  $P_\ell(x)$

$$f(x) = \sum_{\ell=0}^L a_\ell P_\ell(x), \quad /1/$$

который сходится внутри эллипса Лемана<sup>/8/</sup>. При подгонке ряда к экспериментальным данным его обрывают /например, по критерию  $\chi^2$  / при некотором значении  $L$ . Для того чтобы ускорить сходимость ряда, а следовательно, обойтись меньшим числом параметров при том же значении  $\chi^2$ , следует полностью учесть аналитическую структуру амплитуды рассеяния в  $\cos \theta$ -плоскости. Для случая  $\pi^\pm \text{He}^4$ -рассеяния она представлена на рис. 1, где начала левого и правого разрезов вычисляются согласно следующим формулам:

$$x_- = 1 + \frac{(m_{\text{He}^3} + m_{p(n)})^2}{2k^2} - \frac{(m_{\pi^\pm} - m_{\text{He}^4})^2}{2k^2 S}, \quad /2/$$

$$x_+ = 1 + \frac{2m_{\pi^0}^2}{k^2}, \quad /3/$$

где  $k$  и  $S$  - импульс и квадрат энергии в с.ц.м.

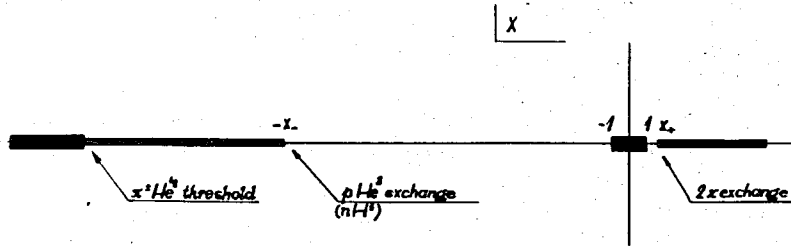


Рис. 1. Аналитическая структура амплитуды  $\pi^+ He^4$ -рассеяния в  $x$ -плоскости.

В /2,9/ показано, что для максимального ускорения сходимости ряда /1/ надо конформно отобразить всю  $x$ -плоскость внутрь эллипса в  $z$ -плоскости так, чтобы физическая область  $-1 \leq x \leq 1$  совпала с отрезком  $-1 \leq z \leq 1$ , а разрывы разместились на эллипсе. После этой процедуры, алгоритм которой дан в /2/, амплитуду можно разложить в ряд по ортонормированным полиномам  $P_n(z)$  в  $z$ -плоскости:

$$f(z) = \sum_{n=0}^N b_n P_n[z(x)]. \quad /4/$$

Подгоняя /4/ к экспериментальным данным, можно найти коэффициенты  $b_n^*$ . Работать, однако, с новыми "парциальными волнами"  $b_n$  очень неудобно. Во-первых, они не имеют прямой, наглядной физической интерпретации, во-вторых, их аналитические свойства как функция от энергии очень сложны, поскольку они содержат сингулярности второго листа Римана, и, наконец, они в отдельности не удовлетворяют условию унитарности. Поступим поэтому следующим образом - выразим парциальные волны  $a_\ell$  из /1/ через коэффициенты  $b_n$ :

$$a_\ell = \sum_{n=0}^N C_{\ell n} b_n, \quad /5/$$

где

$$C_{\ell n} = \frac{2\ell+1}{2} \int_{-1}^1 P_\ell(x) P_n[z(x)] dx. \quad /6/$$

\* Всегда имеет место неравенство  $N \leq L$ , оно тем сильнее, чем больше  $L$ .

С другой стороны, решая /5/ относительно  $b_n$ , имеем

$$b_n = \sum_{\ell=0}^N C_{\ell n}^{-1} a_\ell. \quad /7/$$

Подставим  $b_n$  снова в /5/. Тогда

$$a_\ell = \sum_{n=0}^N C_{\ell n} C_{kn}^{-1} a_k. \quad /8/$$

Коэффициенты  $a_{\ell \leq N}$  назовем низшими парциальными волнами, а  $a_{\ell > N}$  - высшими. Для  $\ell \leq N$  выражение /8/ является просто тождеством, но для  $\ell > N$  оно выражает очень любопытный факт - парциальные волны не являются независимыми, как это обычно полагают, а высшие парциальные волны выражаются через линейную комбинацию низших волн\*.

Следует отметить, что высшие парциальные волны могут оказаться в принципе не унитарными. Это может случиться из-за того, что либо значения низших парциальных волн выбраны неправильно, либо ряд /4/ оборван неправильно. В таком случае приходится "подправлять рукой" высшие парциальные волны на унитарность, следуя, например, методу "кратчайшего пути" - перенося кратчайшим путем конец вектора парциальной волны на окружность унитарности /3,7/.

Итак, схема нового метода фазового анализа такова:

- 1/ производится конформное отображение \*\*;
- 2/ вычисляются коэффициенты  $C_{\ell n}$ ;
- 3/ подгонкой /4/ к экспериментальным данным находятся низшие парциальные волны;
- 4/ по /8/ вычисляются высшие парциальные волны и производится поправка на унитарность, если это необходимо.

Используемые нами экспериментальные данные по  $\pi^+ He^4$ -рассеянию, а также явный вид выражения для амплитуды приведены в /1/. Следует отметить, что в фазовом анализе, проведенном в /1/, а также в настоящей работе, наряду с данными по  $d\sigma/d\Omega$  использовалось ограничение  $y = \sigma_\ell / \sigma_{tot}$ , где

\* Если бы парциальные волны были независимыми, то сечения испытывали бы флуктуации Эриксона /10/. Поскольку эти флуктуации не наблюдаются в природе, то амплитуды парциальных волн должны быть скоррелированы. Выражение /8/, полученное фактически на основе аналитичности, как раз и отражает это обстоятельство.

\*\* В принципе надо производить отдельно два отображения - одно для мнимой части амплитуды, второе - для реальной части, поскольку хорошо известно, что область аналитичности у  $Im f(x)$  больше, чем у  $Re f(x)$ . В данной работе ради простоты мы использовали выражения /2/ и /3/ как для реальной, так и для мнимой частей амплитуды.

число  $u$  задавалось определенным образом /см. /1/ на основе существующей экспериментальной информации.

Что же получено при помощи нового метода с использованием РУС? Надо сразу сказать, что отличия от результатов стандартного анализа невелики. Это и не удивительно, если учесть, что данный анализ проводился при низких энергиях /25 - 150 Мэв/, где основной вклад в  $d\sigma/d\Omega$  дают только  $S$ -,  $P$ - и  $D$ -волны, следовательно,  $L=2$ . С другой стороны, основное назначение РУС - сокращение числа свободных параметров. Однако в нашем случае ожидать сокращения числа параметров даже на один, т.е.  $N=1$  не следует, поскольку это явилось бы сокращением их числа более чем на 30%, что маловероятно\*. Тем не менее укажем на ряд различий в результатах анализов, проведенных с помощью обоих методов.



Рис. 2. Величина  $\chi^2$  как функция числа параметров в разложении дифференциального сечения  $\pi^-He^4$ -рассеяния при 75 Мэв по полиномам Лежандра в  $x$ -плоскости и в  $z$ -плоскости.

\* Другая ситуация имеет место в случаях, когда  $L$  велико, например, для  $pp$ -рассеяния при 330 Мэв  $L=14$ , а  $N=10^{3/}$ .

Во-первых, РУС дает, как правило, несколько меньшее значение  $\chi^2$  для описания тех же экспериментальных данных с тем же числом параметров. Например, для данных по  $\pi^-He^4$ -рассеянию при 75 Мэв /11/ старый метод дает значение  $\chi^2$ /число степеней свободы / = 3,1, новый метод -  $\chi^2$ /число степеней свободы / = 2,4 /см. рис. 2//. Вторым и, пожалуй, самым интересным результатом является возможность оценки величин высших парциальных волн. Разложение /1/ к ним нечувствительно, поскольку уже при  $L=3$  величины всех коэффициентов этого разложения получаются больше их средних значений, что указывает на слишком большое количество свободных параметров. С другой стороны, оборвав /4/ при  $N=2$  и вычислив по /8/ высшие парциальные волны  $F$  и  $G$ , обнаруживаем, что они отличны от нуля и дают ощутимый вклад в полное сечение\*. Следовательно, ими пренебрегать нельзя /см. рис.3/.

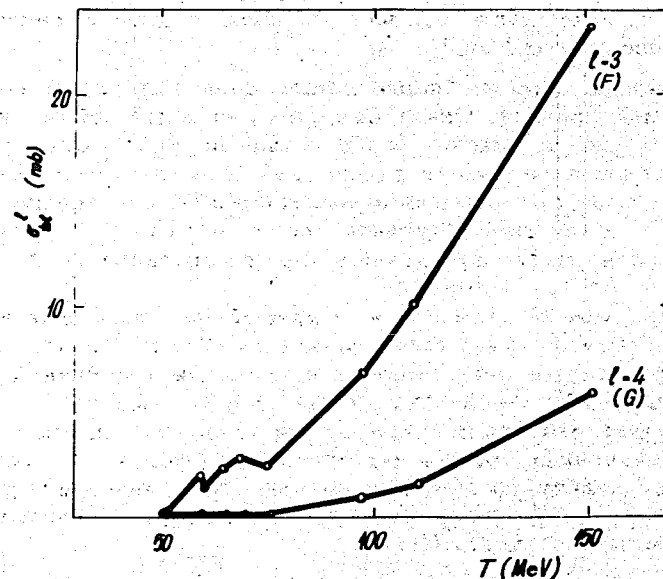


Рис. 3. Вклад  $F$ - и  $G$ -волн в полное сечение, как функция энергии пиона.

\* Они оказались унитарными, поэтому никаких поправок вводить не приходилось.

В таблице 1 в качестве примера приведены значения фаз, сечений и реальной части амплитуды рассеяния вперед, полученные обоими методами анализа данных по упругому  $\pi^- \text{He}^4$ -рассеянию при 110 Мэв <sup>/12/</sup>.

И, наконец. Существенным пороком фазового анализа является его неоднозначность - наличие различных /но одинаковых по  $\chi^2$ / решений. В новом же методе эта неоднозначность уменьшается по двум причинам: во-первых, как правило /но, как уже отмечалось, не в нашем случае/, требуется меньшее количество параметров, во-вторых, оказывается, что в случае обычного метода некоторые решения являются искусственными. Когда к этим решениям добавлялись высшие парциальные волны, решения становились хуже, вместо того, чтобы стать лучше. Для примера в таблице III показан вклад парциальных волн в полное сечение для двух решений при энергиях 51,3 и 59,7 Мэв <sup>/11/</sup>. Видно, что только первое решение можно считать физическим, поскольку во втором решении F- и G-волны дают аномально большие вклады в полное сечение по сравнению с D-волной\*.

Значения высших парциальных волн интересны еще по следующей причине. Оказалось, что они ведут себя с энергией так же, как и низшие парциальные волны: проявляется их резонансное поведение в районе 145 Мэв /рис. 4/ - они также меняют знак и становятся отрицательными. Это хорошо согласуется с известной картиной, согласно которой происходит сдвиг резонансного поведения в ядре по сравнению с  $\Delta_{33}$ -резонансом в  $\pi N$ -рассеянии\*\*.

Итак, можно сказать, что применение фазового анализа с РУС, даже в случае столь низких энергий позволило выявить некоторые новые закономерности - наличие ненулевых значений F- и G-волн и нефизичность некоторых решений.

Следует сказать несколько слов об оценке ошибок значений фаз, полученных новым методом\*\*\*. Оценить их истинные значения крайне трудно. Можно надеяться, что здесь помогут новые методы и программы минимизации, разрабатываемые для нелинейных задач <sup>/15/</sup>.

\*Любопытно отметить, что также и в энергозависающем фазовом анализе <sup>/11/</sup> приемлемым оказалось только первое решение.

\*\* См., например, <sup>/13/</sup> где этот эффект обнаружен для  $\pi C^{12}$ -рассеяния.

\*\*\* В таблицах мы приводим ошибки, выданные стандартной программой FUMILI <sup>/14/</sup>.

Таблица I

	Стандартный метод	Метод с использованием РУС
$\delta_0$	$-19,85 \pm 1,83$	$-18,72 \pm 6,05$
$\gamma_0$	$0,306 \pm 0,025$	$0,515 \pm 0,176$
$\delta_1$	$16,41 \pm 0,44$	$21,77 \pm 1,97$
$\gamma_1$	$0,958 \pm 0,026$	$0,832 \pm 0,180$
$\delta_2$	$10,45 \pm 0,42$	$8,68 \pm 1,18$
$\gamma_2$	$0,790 \pm 0,028$	$0,819 \pm 0,081$
$\delta_3$	0	$1,412 \pm 0,299$
$\gamma_3$	1	$0,958 \pm 0,014$
$\delta_4$	0	$0,264 \pm 0,059$
$\gamma_4$	1	$0,989 \pm 0,004$
$G_{el}$	$74,20 \pm 1,50$	$80,22 \pm 2,39$
$G_{tot}$	$172,62 \pm 18,50$	$212,1 \pm 52,6$
$\chi^2$ Re $\delta(0)$	$1,41 \pm 0,07$	$1,09 \pm 0,29$
число степеней свободы	2,99	1,27

Таблица II

Частичальный вклад в $Z_{tot}$ ( $6 \text{ мкк}$ )	Решение I		Решение II	
	51,3 МэВ	59,7 МэВ	51,3 МэВ	59,7 МэВ
	$Z^0$	29,12	26,22	27,90
$Z^1$	21,20	26,79	20,60	27,30
$Z^2$	4,60	5,02	0,40	0,78
$Z^3$	0,27	0,36	5,70	5,68
$Z^4$	0,02	0,03	0,38	0,48

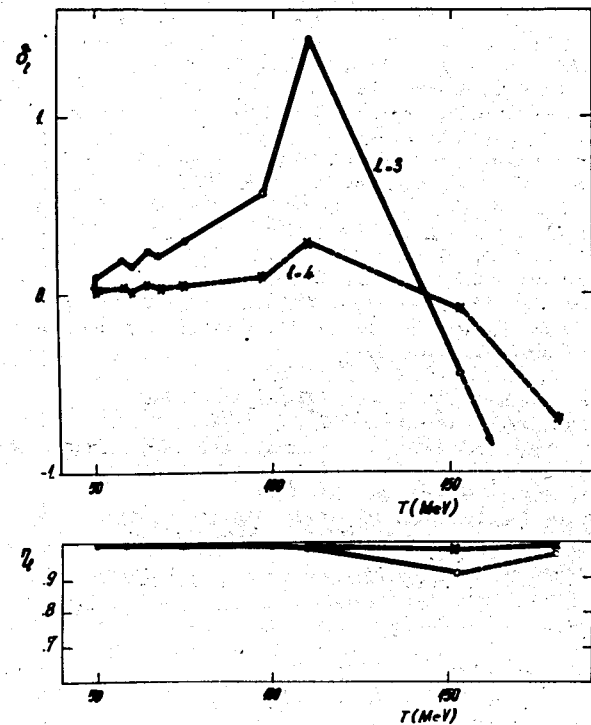


Рис. 4. Зависимость величины фазовых сдвигов  $\delta_l$  и параметров неупругости  $\eta_l$  от энергии пиона.

В заключение следует рекомендовать применение /особенно при больших энергиях/ метода фазового анализа с РУС, поскольку он максимально полно использует аналитические свойства амплитуды и поэтому приводит к нетривиальным результатам\*. При этом было бы целесообразно объединить его с новой идеей исследования траекторий нулей частичных амплитуд /см., например, <sup>17-20</sup>/.

\* Лучше всего производить его параллельно со стандартным методом, поскольку неосторожное использование РУС может привести к неверным результатам. По этому поводу см. <sup>16</sup>/, где дается некоторая критика РУС.

## Литература

1. I.V.Falomkin et al., JINR preprint EI-6534, Dubna, 1972.
2. R.E.Cutkosky, B.B.Deo, Phys.Rev., 174, 1859 (1968).
3. Yung-An Chao. Phys.Rev.Lett., 25, 309 (1970).
4. R.C.Miller et al. Nucl.Phys., B37, 401 (1972).
5. M. de Roo, F.Wagner. Rutherford Laboratory Report, RHEL/R (1972).
6. R.E.Cutkosky, C.C.Shih. Phys.Rev., D4, 2750 (1971).
7. Yung-An Chao, Ph.D. Thesis Carnegie-Mellon University, Pittsburgh (1970).
8. H.Lehman. Nuovo Cimento., 10, 579 (1958).
9. S.Ciulli. Nuovo Cimento., 61, 787 (1969); 62, 301 (1969).
10. S.Frautschi. Nuovo Cimento., 12A, 133 (1972).
11. K.M.Crowe et al., Phys.Rev., 180, 1349 (1969).
12. F.Binon et al. Contribution to 4th Int. Conf.on High Energy Physics and Nucl. Structure. Dubna 7-11, Sept., 1971.
13. F.Binon et al., Nucl.Phys., B17, 168 (1970).
14. S.N.Sokolov, I.N.Silin. JINR preprint D-810, Dubna, 1961.
15. L.Alexandrov. JINR preprint P5-5515, Dubna, 1970.
16. C.Iovellece. Rapporteur talk at NAL-Chicago Happening on High Energy Phys., Sept., 1972.
17. E.Barrelet. Nuovo Cimento., 8A, 331 (1972).
18. T.P.Coleman, T.D.Spearman. Phys.Lett., 39B, 240 (1972).
19. F.Nichitiu. JINR preprint E2-6890, Dubna, 1973.
20. A.J. Van Horn. LBL-1370 (1972).

Рукопись поступила в издательский отдел  
7 марта 1973 года.