ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
ДУБНА

Р2 - 6979

Дао Вонг Дык

КОНФОРМНЫЕ ТОЖДЕСТВА УОРДА И МАССОВЫЙ РАДИУС π-МЕЗОНА

1973

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 6979

Дао Вонг Дык

КОНФОРМНЫЕ ТОЖДЕСТВА УОРДА И МАССОВЫЙ РАДИУС π-МЕЗОНА

Направлено в ЯФ

1. Если считать тензор энергии-импульса $\theta_{\mu\nu}$ источником гравитационного поля, то можно судить о распределении массы внутри частицы, изучая матричные элементы между ее состояниями. Возникающие при этом формфакторы называются массовыми /или гравитационными/ форм-факторами /1-3/.

Как известно, изучая электромагнитные форм-факторы π-мезона, можно получить сведения о его электромагнитном радиусе, при этом основным методом является метод теории аналитических функций /например, /4/ /. Здесь же оказывается, что в рамках теории конформной инвариантности, используя свойства тензора энергии импульса, можно дать оценку значения массового радиуса π-мезона, который пропорционален производной соответствующего массового форм-фактора при $t = 0$.

Настоящая работа посвящается изучению массового форм-фактора π-мезона и его производных. На этой основе получена оценка его массового радиуса. Для этого применяется метод, основанный на тождествах Уорда, выводимых для T-произведений, включающих масштабный и конформный токи /5-7/ и ЧСАТ, которое используется при выводе низкоэнергетической теоремы для матричного элемента с мягким пионом, как это делается в методе теории алгебры токов.

2. Рассмотрим T-произведения масштабного и конформного токов и поля $\phi_i(x)$:

$$T\{D_\rho(x)\phi_1(x_1)\dots\phi_n(x_n)\} \quad \text{и} \quad T\{K_{\rho\mu}(x)\phi_1(x_1)\dots\phi_n(x_n)\}, \qquad /1/$$

где токи $D_\rho(x)$ и $K_{\rho\mu}(x)$ выражаются через тензор энергии-импульса следующим образом /6/:

$$D_\rho(x) = -x^\nu\theta_{\rho\nu}(x), \qquad /2/$$

$$K_{\rho\mu}(x) = 2x_\mu x^\nu\theta_{\rho\nu} - x^2\theta_{\rho\mu}. \qquad /3/$$

Исходя из законов преобразования полей

$$[D(x_0), \phi(x)] = -i(\ell_\phi - x^\nu \partial_\nu)\phi(x) \qquad /4/$$

$$[K_\mu(x_0), \phi(x)] = -i(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x^2 \partial_\mu - 2\ell_\phi x_\mu - 2ix^\nu \Sigma^{(\phi)}_{\mu\nu})\phi, \qquad /5/$$

где D и K_μ генераторы, соответствующие токам D_ρ и $K_{\rho\mu}$, $\Sigma^{(\phi)}_{\mu\nu}$ и ℓ_ϕ - спиновая матрица и масштабная размерность поля ϕ, стандартным методом можно получить следующие тождества Уорда:

$$\Gamma^{(\phi_1\ldots\phi_n\theta)}(p_1,\ldots,p_{n-1}, -\sum_{j=1}^{n-1} p_j) = -i[\ell_{\phi_n} + 4(n-1) + \sum_{j=1}^{n-1}(\ell_{\phi_j} + p_j^\nu \frac{\partial}{\partial p_j^\nu})] \times$$

$$\times \Gamma^{(\phi_1\ldots\phi_n)}(p_1,\ldots,p_{n-1}), \qquad /6/$$

$$\frac{\partial \Gamma^{(\phi_1\ldots\phi_n\theta)}}{\partial k^\mu}(p_1,\ldots,p_{n-1}, -\sum_{j=1}^{n-1} p_j - k)\Big|_{k=0} = -i\sum_{j=1}^{n-1}\{(4+\ell_{\phi_j})\frac{\partial}{\partial p_j^\mu} +$$

$$+ p_j^\nu \frac{\partial^2}{\partial p_j^\nu \partial p_j^\mu} - \frac{1}{2} p_{j\mu} \Box(p_j) + i\,\Sigma^{(\phi_j)}_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial p_{j\nu}}\}\,\Gamma^{(\phi_1\ldots\phi_n)}(p_1,\ldots,p_{n-1}), \qquad /7/$$

где через Γ обозначаются фурье-образы вакуумных средних от соответствующих T-произведений:

$$\Gamma^{(\phi_1\ldots\phi_n)}(p_1,\ldots,p_{n-1}) = \int dx_1\ldots dx_{n-1}\, e^{i\sum_{j=1}^{n-1} p_j x_j} \langle 0|T\{\phi_1(x_1)\ldots\phi_{n-1}(x_{n-1}) \times \phi_n(0)\}|0\rangle, \qquad /8/$$

$$\Gamma^{(\phi_1\ldots\phi_n\theta)}(p_1,\ldots,p_n) = \int dx_1\ldots dx_n\, e^{i\sum_{j=1}^{n} p_j x_j} \langle 0|T\{\phi_1(x_1)\ldots \times \phi_n(x_n)\theta^\mu_\mu(0)\}|0\rangle. \qquad /9/$$

В частности, для случая $n=2$ и $\phi_1 = \phi_2^+ \equiv \phi$ уравнения /6/ - /8/ позволяют связать $\theta\phi\phi^+$-вершину с соответствующим фейнмановским пропагатором

$$\tilde{\Delta}_F(p) \equiv \int dx\, e^{ipx} \langle 0|T\{\phi(x)\phi^+(0)\}|0\rangle. \qquad /10/$$

Имеем

$$\Gamma^{(\phi\phi^+\theta)}(p,-p) = -i[2\ell_\phi + 4 + p^\nu \frac{\partial}{\partial p^\nu}]\tilde{\Delta}_F(p), \qquad /11/$$

$$\frac{\partial \Gamma^{(\phi\phi^+\theta)}}{\partial p'^\mu}(p,-p')\Big|_{p'=p} = -i\{(4+\ell_\phi)\frac{\partial}{\partial p^\mu} + p^\nu \frac{\partial^2}{\partial p^\nu \partial p^\mu} - \frac{1}{2} p_\mu \Box(p) + i\,\Sigma^{(\phi)}_{\mu\nu}\frac{\partial}{\partial p_\nu}\}\tilde{\Delta}_F(p). \qquad /12/$$

3. Формулы /11/ и /12/ могут быть использованы для изучения массового форм-фактора π-мезона, который определяется как матричный элемент от $\theta^\mu_\mu(0)$ между однопионными состояниями:

$$\langle \pi^0(p)|\theta^\mu_\mu(0)|\pi^0(p')\rangle \equiv \theta(p^2, p'^2; t), \quad t \equiv (p'-p)^2. \qquad /13/$$

Рассмотрим сначала /нековариантную/ функцию Грина:

$$T(p^2, p'^2; t) \equiv -(p^2 - m_\pi^2)(p'^2 - m_\pi^2)\int dx\, dy\, e^{ipx - ip'y} \langle 0|T\{\Phi(x)\Phi(y)\theta^\mu_\mu(0)\}|0\rangle, \qquad /14/$$

где Φ - полевой оператор, соответствующий π^0-мезону. Матричный элемент /13/ получается из /14/ путем замены нековариантного T-произведения ковариантной T^*-функцией, построенной по методу, изложенному в работе [8]. Для этого необходимо знать одновременные коммутационные соотношения между $\theta_{\mu\nu}$ и Φ /например, [9]/. Оказывается, что [2,10]:

$$T^*\{\Phi(x)\Phi(y)\theta^\mu_\mu(z)\} = T\{\Phi(x)\Phi(y)\theta^\mu_\mu(z)\} + i\ell_\Phi T\{\Phi(x)\Phi(y)\}[\delta^{(4)}(z-x) + \delta^{(4)}(z-y)]. \qquad /15/$$

Следовательно, $\theta(p^2, p'^2; t)$ и $T(p^2, p'^2; t)$ связаны между собой соотношением

$$\theta(p^2, p'^2; t) = T(p^2, p'^2; t) - i\ell_\Phi (p^2 - m_\pi^2)(p'^2 - m_\pi^2)[\tilde{\Delta}_F(p) + \tilde{\Delta}_F(p')]. \qquad /16/$$

В частности, на массовой поверхности отсюда следует:

$$\theta(m_\pi^2, m_\pi^2; t) = T(m_\pi^2, m_\pi^2; t). \qquad /17/$$

Тождество /11/, применимое к функции Грина /14/, дает

$$T(p^2,p^2;0)=i(p^2-m_\pi^2)^2[2\ell_\Phi+4+p^\nu\frac{\partial}{\partial p^\nu}]\tilde{\Delta}_F(p). \qquad /18/$$

Используя представление Челлена-Лемана для $\tilde{\Delta}_F(p)$,

$$\tilde{\Delta}_F(p)=i\int da^2\frac{\rho(a^2)}{p^2-a^2+i\epsilon},$$

$$\rho(a^2)=\delta(a^2-m_\pi^2)+\sigma(a^2),\quad \sigma(a^2)\equiv(2\pi)^3\sum_{n\neq\pi^0}\delta^{(4)}(p_n-a)|\langle 0|\Phi(0)|n\rangle|^2, \qquad /19/$$

перепишем /18/ в виде:

$$T(p^2,p^2;0)=2(p^2-m^2)^2\{\frac{m_\pi^2-(\ell_\Phi+1)(p^2-m_\pi^2)}{(p^2-m_\pi^2+i\epsilon)^2}+\int_{(3m_\pi)^2}^{\infty}da^2\frac{\sigma(a^2)}{(p^2-a^2+i\epsilon)^2}\times \qquad /20/$$

$$\times[a^2-(\ell_\Phi+1)(p^2-a^2)].$$

В частности, при $p^2\to m_\pi^2$ и $p^2\to 0$ мы получим отсюда:

$$T(m_\pi^2,m_\pi^2;0)=2m_\pi^2, \qquad /21/$$

$$T(0,0;0)=2m_\pi^2(\ell_\Phi+2)[1+m_\pi^2\int_{(3m_\pi)^2}^{\infty}da^2\frac{\sigma(a^2)}{a^2}]. \qquad /22/$$

Отметим, что результат /21/ может быть также получен сразу из /17/, так как на массовой поверхности

$$\langle\pi(p)|\theta_\mu^\mu(0)|\pi(p)=2m_\pi^2. \qquad /23/$$

Применим теперь тождество /12/. Из определения /9/ и /14/ имеем:

$$\frac{\partial\Gamma^{(\Phi\Phi\theta)}}{\partial p'^\mu}(p,-p')|_{p'=p}=\frac{2p_\mu}{(p^2-m_\pi^2)^3}T(p^2,p^2;0)-\frac{2p_\mu}{(p^2-m_\pi^2)^2}\frac{\partial T(p^2,p'^2;0)}{\partial p'^2}|_{p'=p} \qquad /24/$$

Уравнения /12/, /18/ и /24/ вместе дают:

$$2p_\mu\frac{\partial T(p^2,p'^2;0)}{\partial p'^2}|_{p'=p}=i(p^2-m_\pi^2)\{(p^2-m_\pi^2)[(4+\ell_\Phi)\frac{\partial}{\partial p^\mu}+$$

$$+p^\nu\frac{\partial^2}{\partial p^\nu\partial p^\mu}-\frac{1}{2}p_\mu\Box(p)]+2p_\mu(2\ell_\Phi+4+p^\nu\frac{\partial}{\partial p^\nu})\}\tilde{\Delta}_F(p). \qquad /25/$$

Отсюда, используя представление /19/, мы можем получить после некоторых простых преобразований:

$$\frac{\partial T(p^2,p'^2;0)}{\partial p'^2}|_{p'^2=p^2}=\frac{\partial T(p'^2,p^2;0)}{\partial p'^2}|_{p'^2=p^2}=$$

$$=(p^2-m_\pi^2)\int da^2\frac{\rho(a^2)}{(p^2-a^2+i\epsilon)^3}\{(a^2-m_\pi^2)[(1+\ell_\Phi)p^2-(3+\ell_\Phi)a^2]-(1+\ell_\Phi)(p^2-a^2)\}. \qquad /26/$$

Первое равенство в /26/ следует из свойства перекрестной симметрии. В частности, при $p^2\to m_\pi^2$ и $p^2\to 0$ мы имеем:

$$\frac{\partial T(m_\pi^2,p^2;0)}{\partial p^2}|_{p^2=m_\pi^2}=\frac{\partial T(p^2,m_\pi^2;0)}{\partial p^2}|_{p^2=m_\pi^2}=-(\ell_\Phi+1) \qquad /27/$$

$$\frac{\partial T(0,p^2;0)}{\partial p^2}|_{p^2=0}=\frac{\partial T(p^2,0;0)}{\partial p^2}|_{p^2=0}=$$

$$=-(\ell_\Phi+1)-(2\ell_\Phi+4)m_\pi^2\int da^2\frac{\sigma(a^2)}{a^2}+(3+\ell_\Phi)m_\pi^4\int da^2\frac{\sigma(a^2)}{a^4}. \qquad /28/$$

4. Переходим теперь к оценке среднего квадратнческого радиуса π -мезона, который определяется через производную от массового форм-фактора при $t=0$:

$$\frac{1}{6}\overline{r_\theta^2}=\frac{\theta'(m_\pi^2,m_\pi^2;t)|_{t=0}}{\theta(m_\pi^2,m_\pi^2;0)}=\frac{T'(m_\pi^2,m_\pi^2;t)|_{t=0}}{T(m_\pi^2,m_\pi^2;0)}, \qquad /29/$$

где штрих означает производную по t. Второе равенство в /29/ следует из /17/.

Рассмотрим матричный элемент

$$i\int dx\, e^{ipx}\,\theta(x_0)<P(q)\,|\,[J^A_{\mu 3}(x),\theta_{0\nu}(0)]\,|\,P(q')>,$$

где $P(q)$ означает протон с импульсом q, $J^A_{\mu 3}$ - третья изотопическая компонента аксиального тока. Стандартным методом с помощью редукционной техники и ЧСАТ

$$\partial^\mu J^A_{\mu a} = \frac{m^2_\pi f_\pi}{\sqrt{2}}\Phi_a \qquad /30/$$

мы можем прийти к следующему равенству:

$$\frac{if_\pi}{\sqrt{2}}\underset{\substack{out\\ p\to 0}}{<}P(q)\pi^0(p)|\theta_{0\mu}(0)|P(q')> = -\int dx\, e^{ix(q'-q)}\delta(x_0)<P(q)|[\theta_{0\mu}(x),J^A_{03}(0)]\times \qquad /31/$$
$$\times|\,P(q')>.$$

Подставляя сюда одновременные коммутаторы /9/

$$[\theta_{00}(x),J^A_{0a}(y)]_{x_0=y_0} = -i\partial^0 J^A_{0a}(y)\delta(\vec{x}-\vec{y}) - i\,J^A_{ka}(y)\frac{\partial}{\partial x_k}\delta(\vec{x}-\vec{y})$$

$$/32/$$

$$[\theta_{0i}(x),J_{0a}(y)]_{x_0=y_0} = -i\partial_i J^A_{0a}(y)\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \frac{1}{3}i\ell_{J_0}J^A_{0a}(y)\frac{\partial}{\partial x^i}\delta(\vec{x}-\vec{y}),$$

пренебрегая при этом швингеровскими членами со второго порядка, мы найдем, что

$$\frac{if_\pi}{\sqrt{2}}\underset{\substack{out\\ p\to 0}}{<}P(q)\pi^0(p)|\theta_{00}(0)|P(q')> = i<P(q)|\partial^\mu J^A_{\mu 3}(0)|P(q')>$$

$$/33/$$

$$\frac{if_\pi}{\sqrt{2}}\underset{\substack{out\\ p\to 0}}{<}P(q)\pi^0(p)|\theta_{0i}(0)|P(q')> = \frac{1}{3}(\ell_{J_0}+3)(q'-q)_i<P(q)|J^A_{03}(0)|P(q')>.$$

Таким образом, считая $\ell_{J_0}=-3$, мы получим отсюда /с учетом /30//:

$$\underset{\substack{out\\ p\to 0}}{<}P(q)\pi^0(p)|\,\theta_{0\mu}(0)|P(q')> = g_{0\mu}\frac{m^2_\pi}{-t+m^2_\pi}<P(q)|\eta_\Phi(0)|P(q')>, \qquad /34/$$

где η_Φ - источник поля π^0-мезона.

С другой стороны, как нетрудно видеть, можно представить левую часть /34/ в виде:

$$\underset{\substack{out\\ p\to 0}}{<}P(q)\pi^0(p)|\theta_{0\mu}(0)|P(q')> = \frac{1}{-t+m^2_\pi}<P(q)|\eta_\Phi(0)|P(q')>\times$$
$$\times<\pi^0(p)|\theta_{0\mu}(0)|\pi^0(q'-q)>+\ldots, \qquad /35/$$

где троеточие означает члены, не содержащие полюса при $t=m^2_\pi$.

Из /34/ и /35/ следует, что

$$\underset{p\to 0}{<}\pi^0(p)|\theta_{0\mu}(0)|\pi^0(q'-q)>|_{(q'-q)^2=m^2_\pi} = g_{0\mu}\,m^2_\pi\,. \qquad /36/$$

Формула /36/ может быть использована для вычисления величины $\theta(0,m^2_\pi;m^2_\pi)$. Действительно, матричный элемент $<\pi^0(p)|\theta_{\mu\nu}(0)|\pi^0(p')>$ имеет следующий общий вид:

$$<\pi^0(p)|\theta_{\mu\nu}(0)|\pi^0(p')> = c_1 g_{\mu\nu}+c_2P_\mu P_\nu+c_3k_\mu k_\nu+c_4(P_\mu k_\nu+k_\mu P_\nu), \qquad /37/$$

где $P\equiv\frac{1}{2}(p'+p)$, $k\equiv(p'-p)$, c_i - формфакторы, зависящие от переменных p^2, p'^2 и $t\equiv(p'-p)^2$,

$c_i\equiv c_i(p^2;p'^2;t)$.

Сравнивая /37/ с /36/, можно получить:

$$c_1(0,m^2_\pi;m^2_\pi)=m^2_\pi$$
$$/38/$$
$$\frac{1}{4}c_2(0,m^2_\pi;m^2_\pi)+c_3(0,m^2_\pi;m^2_\pi)+c_4(0,m^2_\pi;m^2_\pi)=0.$$

Из /37/ и /38/ следует:

$$\theta(0,m^2_\pi;m^2_\pi)=4m^2_\pi. \qquad /39/$$

Соотношение /39/ вместе с /16/ дают:

$$T(0,m^2_\pi;m^2_\pi)=(4+\ell_\Phi)m^2_\pi\,. \qquad /40/$$

Теперь, используя формулу разложения для $T(p^2,p'^2;t)$ в точке $p_0^2=p_0'^2=m^2_\pi$, $t_0=0$ при $p^2=0$, $p'^2=m^2_\pi$, $t=m^2_\pi$,

$$T(0,m^2_\pi;m^2_\pi)=T(m^2_\pi,m^2_\pi;0)-m^2_\pi\frac{\partial T(p^2,m^2_\pi;0)}{\partial p^2}\Big|_{p^2=m^2_\pi}+$$
$$+m^2_\pi\frac{\partial T(m^2_\pi,m^2_\pi;t)}{\partial t}\Big|_{t=0}+O(m^4_\pi), \qquad /41/$$

с помощью /21/, /27/ и /40/ мы получим:

$$\frac{\partial\theta(m_\pi^2,m_\pi^2;t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = \frac{\partial T(m_\pi^2,m_\pi^2;t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = 1+O(m_\pi^2) \qquad /42/$$

и следовательно:

$$\overline{r_\theta^2} = \frac{1}{m_\pi^2}\,[3+O(m_\pi^2)]. \qquad /43/$$

Аналогично, используя формулу разложения для $T(p^2, p'^2; t)$ в точке $p_0^2 = p_0'^2 = t_0 = 0$ при $p^2 = 0$, $p'^2 = m_\pi^2$, $t = m_\pi^2$, с помощью /22/, /28/ и /40/, мы видим, что значение $\frac{\partial T(0,0;t)}{\partial t}\Big|_{t=0}$ совпадает с /42/ с точностью до членов порядка $O(m_\pi^2)$.

Отметим, что формула /42/ согласуется с результатом, найденным в работе /10/, другим подходом.

5. Результатом /42/ также можно воспользоваться для оценки значения гравитационной константы связи σ-мезона, определяемой равенством:

$$\langle 0|\theta_{\mu\nu}(0)|\sigma(k)\rangle = \frac{1}{3}F_\sigma m_\sigma^2\left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right). \qquad /44/$$

Для этого, следуя работе /11/, предположим, что $\theta(t) \equiv \theta(m_\pi^2, m_\pi^2; t)$ удовлетворяет дисперсионному соотношению с одним вычитанием

$$\theta(t) = \theta(0) + \frac{t}{\pi}\int_{4m_\pi^2}^{\infty} dt' \frac{Jm\,\theta(t')}{t'(t'-t-i\epsilon)} \qquad /45/$$

и что в выражении для $Jm\,\theta(t)$ имеет место σ-доминантность. Тогда можно получить:

$$\theta(t) = 2m_\pi^2 + F_\sigma G_{\sigma\pi\pi}\frac{t}{m_\sigma^2 - t}, \qquad /46/$$

где $G_{\sigma\pi\pi}$ - константа $\sigma\pi\pi$-связи. Из /46/ следует:

$$F_\sigma = \frac{m_\sigma^2}{G_{\sigma\pi\pi}}\,\frac{d\theta(0)}{dt}. \qquad /47/$$

Если представить в /47/ значение /12/ $G_{\sigma\pi\pi} \approx \frac{2\sqrt{2}}{3f_\pi}m_\sigma^2$ и /42/, то можно получить следующую оценку для F_σ:

$$F_\sigma \approx 1{,}1 f_\pi \approx m_\pi. \qquad /48/$$

Автор выражает свою искренню благодарность проф. Д.И.Блохинцеву за постоянное внимание и интерес к работе.

Литература

1. H.Pagels. Phys.Rev., 144, 1250 (1966).
2. K.Raman. Phys.Rev., D4, 476 (1971).
3. M.A.Ahmed. Progr. Theor. Phys., 45, 574 (1971).
4. Дао Вонг Дык, Нгуен Ван Хьеу. ЭЧАЯ 2, 535 /1972/.
5. G.Mack. Nucl.Phys., B5, 499 (1968).
6. G.Mack, A.Salam. Ann.Phys., 53, 174 (1969).
7. C.G.Callan, S.Coleman, R.Jackiw. Ann.Phys., 59, 42 (1969).
8. D.J.Gross, R.Jackiw. Nucl.Phys., B14, 269 (1969).
9. Дао Вонг Дык. Теор. и мат. физ., 13, 75 /1972/.
10. K.Kleinert, P.H.Weisz. Nucl.Phys., B27, 23 (1971).
11. P.Carruthers. Phys.Rev., D2, 2265 (1970).
12. Дао Вонг Дык. Препринт ОИЯИ, Р2-6827, Дубна, 1972.

Рукопись поступила в издательский отдел 6 марта 1973 года.