ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

6965

Экз. чит. зала

Р2 - 6965

Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

КОНФОРМНЫЙ МОМЕНТ ИМПУЛЬСА

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 6965

Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

КОНФОРМНЫЙ МОМЕНТ ИМПУЛЬСА

Направлено в ТМФ

Научно-техническая
библиотека
ОИЯИ

Давно была замечена важная роль конформных преобразований в математической физике. Здесь мы изучаем физическую величину - конформный момент импульса, тесно связанную с группой конформных преобразований пространственно-временного мира. Сначала рассматриваем классический случай релятивистской частицы, затем квантовый случай релятивистской частицы со спином половина и частицы со спином нуль. Наконец, рассматриваем конформный момент импульса в квантовой теории спинорного и скалярного полей. Как это ни странно, скалярный случай на первый взгляд кажется сложнее, чем спинорный. Поэтому мы рассматриваем его в последнюю очередь. Отметим также, что мы изучаем мир произвольной размерности n /хотя в действительности, конечно, $n = 4$ /, потому что это не создает дополнительных трудностей, а получаемые формулы имеют и чисто геометрический интерес. Для уравнения Дирака существенно, однако, чтобы n было четным. Равным образом мы рассматриваем мир с кривизной, поскольку это не приводит к осложнениям, а получаемые формулы остаются справедливыми и в условиях общей теории относительности. С другой стороны, в условиях специальной теории относительности мы получаем то преимущество, что не привязываем себя исключительно к декартовым координатам.

В классической релятивистской механике движение частицы задается уравнениями геодезических

$$\frac{dx^{\alpha}}{d\tau} = p^{\alpha}, \quad \frac{dp^{\alpha}}{d\tau} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\, p^{\mu} p^{\nu}. \qquad /1/$$

Здесь x^{α} - текущие мировые координаты частицы, p^{α} - ее импульс, τ - собственное время /поделенное на массу покоя/, $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ - символы Кристоффеля, составляемые из производных от метрического тензора $g_{\alpha\beta}$. Индексы α, β, . . . принимают значения от 0 до $n-1$.

Рассмотрим проекцию (k,p) импульса p^{α} на некоторое векторное поле $k^{\alpha}(x)$:

$$(k,p) = k_{\alpha}(x) p^{\alpha}. \qquad /2/$$

Это выражение, очевидно, является скалярной функцией в касательном пучке к пространственно-временному многообразию. В силу /1/ имеем:

$$\frac{d}{d\tau}(k,p) = k_{\alpha\beta} p^{\alpha} p^{\beta} + m^2 F, \qquad /3/$$

где $m^2 = g_{\alpha\beta}\, p^{\alpha} p^{\beta}$ - квадрат массы покоя частицы,

$$F = \frac{1}{n} \nabla_{\alpha} k^{\alpha}, \qquad /4/$$

$$k_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\nabla_{\alpha} k_{\beta} + \nabla_{\beta} k_{\alpha}) - F g_{\alpha\beta}, \qquad /5/$$

∇_{α} - символ ковариантной производной. Таким образом, если обе величины /4/ и /5/ равняются нулю, т.е. если векторное поле k^{α} подчиняется уравнениям Киллинга $\nabla_{\alpha} k_{\beta} + \nabla_{\beta} k_{\alpha} = 0$, то функция /2/ является первым интегралом системы уравнений /1/. Если масса покоя частицы равняется нулю, то функция /2/ является первым интегралом при $k_{\alpha\beta} = 0$ и без того чтобы F равнялось нулю. Приравнивать же массу покоя нулю мы можем потому, что функция $m^2 = g_{\alpha\beta} p^{\alpha} p^{\beta}$ является первым интегралом системы уравнений /1/.

Однопараметрическая группа преобразований, получающаяся в результате решения системы уравнений $\frac{dx^{\alpha}}{d\lambda} = k^{\alpha}(x)$, в случае $\nabla_{\alpha} k_{\beta} + \nabla_{\beta} k_{\alpha} = 0$ является изометрической, а в случае $k_{\alpha\beta} = 0$ - конформной. Поэтому в первом случае векторное поле k^{α} будем называть изометрическим, а во втором - конформным. Соответственно, величину /2/ в первом случае будем называть изометрическим, а во втором - конформным моментом импульса частицы. Понятно, изометрический момент является частным случаем конформного. Для конформного момента

$$\frac{d}{d\tau}(k,p) = m^2 F. \qquad /6/$$

В важном случае плоского мира конформное векторное поле в декартовых координатах имеет следующий вид /1/

$$k^{\alpha} = a^{\alpha\beta} x_{\beta} + b^{\alpha} + (a,x) x^{\alpha} - \frac{1}{2}(x,x) a^{\alpha} + b x^{\alpha}, \qquad /7/$$

где $a^{\alpha\beta} = -a^{\beta\alpha}$, b^{α}, a^{α}, b - константы, $(a,x) = a^{\alpha} x_{\alpha}$, $(x,x) = x^{\alpha} x_{\alpha}$, $x_{\alpha} = g_{\alpha\beta} x^{\beta}$. Функция F для поля /7/ равняется $F = b + (a,x)$. Таким образом, при $b = 0$, $a^{\alpha} = 0$ векторное поле /7/ является изометрическим. Проекция нмпульса иа декартову ось и угловой момент импульса в двумериой плоскости относятся к числу изометрических моментов.

Перейдем теперь к релятивистской квантовой механике. Рассмотрим сначала уравнение Дирака

$$H^{\nu} \psi_{\nu} = \frac{imc}{h} H^{n} \psi. \qquad /8/$$

Употребляемые здесь обозначения объяснены в /2,3/. Ввиду метрической природы спиноров надо пользоваться ортогональным репером. Метрический тензор в ортогональном репере обозначаем $\eta_{\alpha\beta}$, ковариантную производную - символом D_{ν}. Так, $\psi_{\nu} = D_{\nu} \psi$. В отличие от компонент в координатном репере компоненты векторного поля в ортогональном репере обозначаем большими буквами. Так, вместо /4/ и /5/ записываем

$$F = \frac{1}{n} D_{\alpha} K^{\alpha}, \qquad /9/$$

$$K_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(D_{\alpha} K_{\beta} + D_{\beta} K_{\alpha}) - F \eta_{\alpha\beta}. \qquad /10/$$

По всем признакам оператор

$$\hat{K} = -ih\{K^{\mu} D_{\mu} + \frac{1}{4}(D_{\alpha} K_{\beta})[H^{\alpha} H^{\beta}] + \frac{n-1}{2} F\} = \qquad /11/$$

$$= -ih\{K^{\mu} D_{\mu} + \frac{1}{4}(D_{\alpha} K_{\beta}) H^{\alpha} H^{\beta} + \frac{n-2}{4} F\}$$

отвечает физической величине /2/. Действительно, для произвольного векторного поля K^a получаем коммутатор /см. приложение/

$$\frac{i}{h}[H^{\nu}D_{\nu} - \frac{imc}{h}H^{n}, \hat{K}] = \qquad /12/$$

$$= \frac{1}{2}H^{a}(D^{\beta}K_{a\beta}) + H^{a}K_{a\beta}D^{\beta} + FH^{a}D_{a} ,$$

аналогичный производной /3/. Для конформного векторного поля коммутатор

$$[H^{\nu}D_{\nu} - \frac{imc}{h}H^{n}, \hat{K}] = -ihFH^{\nu}D_{\nu} = mcFH^{n}$$

аналогичен производной /6/. Мы видим, что оператор изометрического момента импульса действует в пространстве решений уравнения Дирака и что при $m = 0$ таким же свойством обладает оператор конформного момента импульса.

Переходя к скалярному случаю, все величины по-прежнему будем относить к ортогональному реперу, что становится необходимым при изучении взаимодействий скалярных и спинорных частиц. Поведение скалярной частицы определяется уравнением /4, 5/.

$$\Box\phi + \frac{n-2}{4(n-1)}R\phi = (\frac{mc}{h})^{2}\phi , \qquad /13/$$

где $\Box = \eta^{a\beta}D_{a}D_{\beta}$, R - скалярная кривизна мира. Физической величине /2/ отвечает оператор

$$\hat{K} = -ih(K^{\mu}D_{\mu} + \frac{n-2}{2}F). \qquad /14/$$

Подсчитав коммутатор /что будет сделано в приложении/.

$$\frac{i}{h}[\Box + \frac{n-2}{4(n-1)}R - (\frac{mc}{h})^{2}, \hat{K}] = 2D^{a}K_{a\beta}D^{\beta} + \qquad /15/$$

$$+ \frac{n-2}{2(n-1)}\{(D_{a}D_{\beta}K^{a\beta}) + K_{a\beta}R^{a\beta}\} + 2F\{\Box + \frac{n-2}{4(n-1)}R\},$$

заключаем, что оператор изометрического момента импульса скалярной частицы действует в пространстве решений уравнения /13/ и что при $m = 0$ таким же свойством обладает оператор конформного момента импульса.

Надо рассмотреть теперь вторично квантованный оператор конформного момента импульса, но чтобы говорить о нем, необходимо довольно обстоятельное предисловие. Принципы квантовой теории спинорного и скалярного полей в римановом мире изложены в /2,4,5/. Условия квантования задаются на гиперповерхности Коши, т.е. на такой пространственно-подобной гиперповерхности Σ, которая разрезает мир на две части - "прошедшее" и "будущее". Предполагается, что условия Коши на Σ однозначно определяют решения уравнений /8/ и /13/ во всем мире. В плоском мире гиперповерхностью Коши является, например, гиперплоскость $t = const$. Полагая, что в мире существуют гиперповерхности Коши, мы предъявляем весьма серьезные требования к топологии мира. Но, конечно, не только плоский мир удовлетворяет этим требованиям. Например, им удовлетворяет и сферический мир де Ситтера. Дальше буквой Σ всюду обозначается гиперповерхность Коши.

Вторично квантованный оператор конформного момента импульса находится в тесной связи с тензором энергии-импульса поля. Тензор энергии-импульса спинорного поля равняется

$$T_{\mu\nu} = \frac{ih}{4}(\bar{\psi}H_{\mu}\psi_{\nu} - \bar{\psi}_{\nu}H_{\mu}\psi + \bar{\psi}H_{\nu}\psi_{\mu} - \bar{\psi}_{\mu}H_{\nu}\psi). \qquad /16/$$

Имеем

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} , \quad D^{\mu}T_{\mu\nu} = 0, \qquad /17/$$

$$T = \eta^{\mu\nu}T_{\mu\nu} = -mc\bar{\psi}H^{n}\psi . \qquad /18/$$

Тензор энергии-импульса скалярного поля равняется

$$T_{\mu\nu} = T^{can}_{\mu\nu} - \frac{n-2}{4(n-1)}(R_{\mu\nu} + D_{\mu}D_{\nu} - \eta_{\mu\nu}\Box)\phi^{2}, \qquad /19/$$

где $T^{can}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\phi_{\mu}\phi_{\nu} + \phi_{\nu}\phi_{\mu}) - L\eta_{\mu\nu}$,

$$L = \frac{1}{2}\eta^{a\beta}\phi_{a}\phi_{\beta} - \frac{n-2}{8(n-1)}R\phi^{2} + \frac{1}{2}(\frac{mc}{h})^{2}\phi^{2} = \frac{1}{4}\Box\phi^{2}.$$

Тензор /19/ также удовлетворяет условиям /17/. Его след равняется

$$T = -\left(\frac{mc}{h}\right)^2 \phi^2 . \qquad /2О/$$

Для тензора, удовлетворяющего условиям /17/, и гиперповерхности, ограничивающей простую область O, имеем

$$\oint K^\mu T_{\mu\nu}\, d\sigma^\nu = \int_O D_\nu (K_\mu T^{\mu\nu})\, dv = \int_O (K_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + FT)\, dv .$$

Отсюда следует, что для изометрического векторного поля интеграл

$$\hat{K} = \int_\Sigma K^\mu T_{\mu\nu}\, d\sigma^\nu \qquad /21/$$

не зависит от выбора гиперповерхности Σ. В случае $T = 0$ такое же утверждение справедливо и для конформного векторного поля. Согласно же /18/ и /2О/ как в спинорном, так и в скалярном вариантах $T = 0$ при $m = 0$. Для интеграла /21/ мы установим равенства, которые в случае конформного векторного поля позволяют истолковать его как вторично квантованный оператор конформного момента импульса, но прежде поясним правила квантования полей.

На пространстве спинорных полей u и сопряженных спинорных полей $\bar{v}$ задается билинейный функционал

$$(\bar{v}, u) = -\int_\Sigma \bar{v} H_\nu u\, d\sigma^\nu . \qquad /22/$$

Квантование спинорного поля ψ и сопряженного поля $\bar{\psi}$ сводится к тому, что ψ и $\bar{\psi}$ объявляются генераторами алгебры Клиффорда. Общий злемент линейной оболочки генераторов равен $U + V^*$, где $U = (\bar{\psi}, u)$, $V^* = (\bar{v}, \psi)$. Здесь $u, \bar{v}$ - неквантованные поля, а скобки означают билинейный функционал /22/. Скалярный квадрат в оболочке генераторов равен $(U + V^*)^2 = (v, u)$. Если u, v подчиняются уравнению Дирака /8/, то $D_\nu (\bar{v} H^\nu u) = 0$, и функционал /22/ не зависит от выбора гиперповерхности Σ.

Для скалярных полей u, v задается функционал

$$(u, v) = \int_\Sigma (u v_\nu - v u_\nu)\, d\sigma^\nu . \qquad /23/$$

Если u, v подчиняются уравнению /13/, то этот функционал не зависит от выбора гиперповерхности Σ, поскольку в этом случае $D^\nu (u v_\nu - v u_\nu) = 0$. Квантование скалярного поля ϕ сводится к тому, что значения поля ϕ на Σ и значения его нормальной к Σ производной объявляются генераторами алгебры. Общий элемент линейной оболочки генераторов равняется $U = (u, \phi)$, где u - неквантованное скалярное поле, скобка означает функционал /23/. В линейной оболочке генераторов задается антисимметричное скалярное произведение по правилу $[U, V] = UV - VU = ih(u, v)$.

Докажем теперь, что для конформного векторного поля в спинорном варианте

$$\int_\Sigma K^\mu T_{\mu\nu}\, d\sigma^\nu = (\bar{\psi}, \hat{K}\psi), \qquad /24/$$

а в скалярном варианте

$$\int_\Sigma K^\mu T_{\mu\nu}\, d\sigma^\nu = \frac{1}{2ih} (\phi, \hat{K}\phi), \qquad /25/$$

где скобки означают /22/ и /23/, соответственно. Это как раз те самые равенства, которые дают возможность говорить о вторично квантованном операторе конформного момента импульса.

Для доказательства равенства /24/ обозначим

$$T_\nu = K^\mu T_{\mu\nu} + \bar{\psi} H_\nu \hat{K} \psi ,$$

где $\hat{K}$ - оператор /11/, $T_{\mu\nu}$- тензор энергии-импульса /16/, который можно представить также и в виде

$$T_{\mu\nu} = \frac{ih}{2} (\bar{\psi} H_\nu \psi_\mu - \bar{\psi}_\mu H_\nu \psi) + \frac{ih}{4} D_a \bar{\psi} [H_\nu H_\mu H^a] \psi .$$

Нетрудно убедиться, что

$$T_\nu = \frac{ih}{4} D_a \bar{\psi} [H_\nu K H^a] \psi + \frac{ih}{2} D_a \bar{\psi} (K_\nu H^a - K^a H_\nu) \psi - \frac{ih}{2} \bar{\psi} H^a \psi K_{a\nu},$$

где $K = K_a H^a$. Отбрасывая на основании теоремы Стокса дивергенции антисимметричных тензоров, получаем:

$$\int_\Sigma T_\nu\, d\sigma^\nu = -\frac{ih}{2} \int_\Sigma \bar{\psi} H^a \psi K_{a\nu}\, d\sigma^\nu ,$$

т.е.

$$\int_\Sigma K^\mu T_{\mu\nu}\, d\sigma^\nu = (\bar{\psi}, \hat{K}\psi) - \frac{ih}{2} \int_\Sigma \bar{\psi} H^a \psi K_{a\nu}\, d\sigma^\nu . \qquad /26/$$

Отсюда для конформного векторного поля получается равенство /24/.

В скалярном варианте обозначим

$$T_\nu = K^\mu T_{\mu\nu} + \frac{1}{2}\{\phi(K^\mu\phi_\mu + \frac{n-2}{2}F\phi)_\nu - (K^\mu\phi_\mu + \frac{n-2}{2}F\phi)\phi_\nu\}.$$

Можно убедиться /см. приложение/, что

$$T_\nu = D^a A_{a\nu} - \frac{n-2}{4(n-1)} D^a B_{a\nu} + \frac{n}{4(n-1)}(D^a\phi^2)K_{a\nu} + \frac{n-2}{4(n-1)}\phi^2 D^a K_{a\nu}, \qquad /27/$$

где

$$A_{a\nu} = \frac{1}{4}(K_a D_\nu\phi^2 - K_\nu D_a\phi^2),$$

$$B_{a\nu} = 4A_{a\nu} + \frac{1}{2}\phi^2(D_a K_\nu - D_\nu K_a).$$

Так как $A_{a\nu}$ и $B_{a\nu}$ - антисимметричные тензоры, то

$$\int_\Sigma T_\nu d\sigma^\nu = \frac{1}{4(n-1)}\int_\Sigma\{n(D^a\phi^2)K_{a\nu} + (n-2)\phi^2 D^a K_{a\nu}\}d\sigma^\nu,$$

т.е.

$$\int_\Sigma K^\mu T_{\mu\nu} d\sigma^\nu = \frac{1}{2ih}(\phi,\hat{K}\phi) + \frac{1}{4(n-1)}\int_\Sigma\{n(D^a\phi^2)K_{a\nu} + (n-2)\phi^2 D^a K_{a\nu}\}d\sigma^\nu. \qquad /28/$$

Отсюда для конформного векторного поля получаем равенство /25/.

Доказанные равенства представляют большой интерес для мира Минковского, а также и для мира де Ситтера, где имеется пятнадцать линейно независимых векторных полей, из которых десять - изометрические.

Приложение

Приведем нужные здесь сведения о тензоре кривизны Римана-Кристоффеля /6/. Он появляется в равенстве

$$(D_\beta D_a - D_a D_\beta)K_\nu = R^\sigma_{\nu,\beta a}K_\sigma, \qquad /29/$$

справедливом для любого ковекторного поля K_ν, и обладает следующими свойствами симметрии

$$R^\sigma_{\nu,\beta a} + R^\sigma_{\nu,a\beta} = 0, \quad R^\sigma_{\nu,\beta a} + R^\sigma_{\beta,a\nu} + R^\sigma_{a,\nu\beta} = 0.$$

Для тензора

$$R_{\nu\mu,\beta a} = R^\sigma_{\nu,\beta a}\eta_{\sigma\mu}$$

имеем также

$$R_{\nu\mu,\beta a} = R_{\beta a,\nu\mu}.$$

Тензор Риччи

$$R_{\nu a} = R^\sigma_{\nu,\sigma a} = \eta^{\mu\beta}R_{\nu\mu,\beta a}$$

симметричен. Скалярная кривизна равняется

$$R = \eta_{\nu a}R^{\nu a}.$$

Для любого тензорного поля $T_{\mu\nu}$

$$(D_\beta D_a - D_a D_\beta)T_{\mu\nu} = R^\sigma_{\mu,\beta a}T_{\sigma\nu} + R^\sigma_{\nu,\beta a}T_{\mu\sigma}, \qquad /30/$$

для спинорного поля ψ

$$(D_\beta D_a - D_a D_\beta)\psi = \frac{1}{4}H^\nu H^\mu R_{\nu\mu,\beta a}\psi. \qquad /31/$$

Для тензора кривизны выполняются тождества Бианки

$$D_\mu R^\sigma_{\nu,\beta a} + D_\beta R^\sigma_{\nu,a\mu} + D_a R^\sigma_{\nu,\mu\beta} = 0.$$

Свертывая их с тензором $\delta^\sigma_\beta\eta_{\nu a}$, находим, что дивергенция тензора Эйнштейна $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\eta_{\mu\nu}$ тождественно равняется нулю, т.е.

$$D^\nu R_{\nu\mu} = \frac{1}{2}R_\mu, \quad R_\mu = D_\mu R. \qquad /32/$$

Далее, из тождества

$$D_\nu D_\alpha K_\beta = D_\nu(K_{\alpha\beta} + F\eta_{\alpha\beta}) + D_\alpha(K_{\beta\nu} + F\eta_{\beta\nu}) -$$

$$- D_\beta(K_{\alpha\nu} + F\eta_{\alpha\nu}) + \frac{1}{2}(D_\beta D_\alpha - D_\alpha D_\beta)K_\nu +$$

$$+ \frac{1}{2}(D_\nu D_\alpha - D_\alpha D_\nu)K_\beta - \frac{1}{2}(D_\nu D_\beta - D_\beta D_\nu)K_\alpha,$$

где F и $K_{\alpha\beta}$ определены согласно /9/ и /10/, следует равенство

$$D_\nu D_\alpha K_\beta = D_\nu K_{\alpha\beta} + D_\alpha K_{\beta\nu} - D_\beta K_{\alpha\nu} +$$

$$+ F_\nu \eta_{\alpha\beta} + F_\alpha \eta_{\beta\nu} - F_\beta \eta_{\alpha\nu} + R^{\sigma}_{\nu,\beta\alpha} K_\sigma. \qquad /33/$$

Свертывая его с тензором $\eta^{\nu\alpha}$, находим

$$\Box K_\beta = (2-n)F_\beta + 2D^\alpha K_{\alpha\beta} + R_{\alpha\beta}K^\alpha. \qquad /34/$$

Взяв дивергенцию, получаем

$$D^\beta \Box K_\beta = (2-n)\Box F + 2D^\beta D^\alpha K_{\alpha\beta} + D^\beta(R_{\alpha\beta}K^\alpha). \qquad /35/$$

С помощью /29/ и /30/ находим

$$D_\mu D_\nu D_\alpha K_\beta = D_\mu D_\alpha D_\nu K_\beta + D_\mu(R^{\sigma}_{\beta,\nu\alpha} K_\sigma),$$

$$D_\mu D_\alpha D_\nu K_\beta = D_\alpha D_\mu D_\nu K_\beta + R^{\sigma}_{\nu,\mu\alpha} D_\sigma K_\beta + R^{\sigma}_{\beta,\mu\alpha} D_\nu K_\sigma.$$

Свертывая эти равенства с $\eta^{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}$, получаем

$$n\Box F = D^\beta \Box K_\beta + D^\mu(R_{\nu\mu}K^\nu). \qquad /36/$$

Из /35/ и /36/ следует

$$(n-1)\Box F = D^\beta D^\alpha K_{\alpha\beta} + D^\beta(R_{\alpha\beta}K^\alpha),$$

т.е. согласно /32/,

$$(n-1)\Box F = D^\alpha D^\beta K_{\alpha\beta} + R^{\alpha\beta}K_{\alpha\beta} + FR + \frac{1}{2}R_\alpha K^\alpha. \qquad /37/$$

Подсчитаем теперь коммутатор /12/. Имеем

$$[H^n, \hat{K}] = 0,$$

$$[H^\nu D_\nu, K^\mu D_\mu] = K^\mu H^\nu(D_\nu D_\mu - D_\mu D_\nu) + H^\nu(D_\nu K^\mu)D_\mu,$$

$$[H^\nu D_\nu, \frac{1}{4}(D_\alpha K_\beta)H^\alpha H^\beta] = \frac{1}{4}(D_\nu D_\alpha K_\beta)H^\nu H^\alpha H^\beta +$$

$$+ \frac{1}{4}(D_\alpha K_\beta)(H^\nu H^\alpha H^\beta - H^\alpha H^\beta H^\nu)D_\nu,$$

$$[H^\nu D_\nu, \frac{n-2}{4}F] = \frac{n-2}{4}F_\nu H^\nu.$$

С помощью /31/ и /33/ отсюда нетрудно получить /12/.

Коммутатор /15/ подсчитывается следующим образом:

$$\frac{i}{h}[\frac{n-2}{4(n-1)}R, \hat{K}] = -\frac{n-2}{4(n-1)}K^\mu R_\mu,$$

$$[\Box, \frac{n-2}{2}F] = \frac{n-2}{2}(\Box F) + (n-2)F^\mu D_\mu,$$

$$[\Box, K^\mu D_\mu] = [\Box, K^\mu]D_\mu + K^\mu[\Box, D_\mu]$$

и, далее,

$$[\Box, K^\mu] = (\Box K^\mu) + 2(D^\sigma K^\mu)D_\sigma,$$

$$[\Box, D_\mu] = -R_{\mu\sigma}D^\sigma.$$

Воспользовавшись /34/, получаем

$$[\Box, K^\mu D_\mu] = 2F\Box + (2-n)F^\mu D_\mu + 2D^\alpha K_{\alpha\beta}D^\beta.$$

Учитывая /37/, теперь нетрудно доказать равенство /15/.

При выводе формулы /27/ в первую очередь следует проверить равенство

$$K^\mu(R_{\mu\nu} + D_\mu D_\nu - \eta_{\mu\nu}\Box)\phi^2 = D^\alpha B_{\alpha\nu} + (D^\alpha\phi^2)K_{\alpha\nu} -$$

$$-\phi^2 D^\alpha K_{\alpha\nu} + (n-1)(\phi^2 D_\nu F - F D_\nu \phi^2), \qquad /38/$$

что достигается с помощью /29/ и /34/. Согласно /38/, для изометрического векторного поля K^a в скалярном варианте

$$\int_\Sigma K^\mu T_{\mu\nu} d\sigma^\nu = \int_\Sigma K^\mu T^{can}_{\mu\nu} d\sigma^\nu .$$

Это обстоятельство и скрывало необходимость перехода от канонического тензора энергии-импульса $T^{can}_{\mu\nu}$ к метрическому тензору $T_{\mu\nu}$, пока не пришлось рассмотреть конформный момент импульса и принять во внимание принцип конформной инвариантности поведения безмассовых частиц.

Литература

1. N.A.Chernikov, Acta Phys.Polonica 26, No. 6 (12), 1069, 1964.
   Препринт ОИЯИ, Р-1159, Дубна, 1962.
2. *Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. Препринт ОИЯИ, Р2-6109, Дубна, 1971.*
3. *Н.С.Шавохина. ТМФ, 10, №3, 1972.*
4. *Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. Препринт ОИЯИ, Р2-6820, Дубна, 1972.*
5. N.A.Chernikov, E.A.Tagirov. Ann. Inst. Henri Poincare, vol. IX, N. 2, Sect. A, 109-141, 1968.
   Препринт ОИЯИ, Р2-3777, Дубна, 1968.
6. *В.А.Фок. Теория пространства, времени и тяготения. М., 1961.*

Рукопись поступила в издательский отдел
23 февраля 1973 года.