6938

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА



Р2 - 6938

Д.В. Ширков

# УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫЕ АСИМПТОТИКИ ПРОПАГАТОРОВ И ВЫСШИХ ФУНКЦИЙ ГРИНА

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 6938

Д.В. Ширков

# УЛЬТРАФИОЛЕТОВЫЕ АСИМПТОТИКИ ПРОПАГАТОРОВ И ВЫСШИХ ФУНКЦИЙ ГРИНА

Направлено в Труды Международной конференции
по математическим проблемам теории поля и
квантовой статистики

## I. Постановка задачи

Мы рассмотрим задачу определения возможных типов ультрафиолетовых асимптотик для одночастичных и высших функций Грина в квантовой теории поля. Определения таких асимптотик, основанные на конкретных моделях лагранжианов сильных взаимодействий, использующие различные гипотезы о структуре разложений теории возмущений и методы их суммирования, в последнее время пользуются особенной популярностью в связи с проблемами автомодельности и масштабной инвариантности.

В отличие от упомянутых исследований, мы не будем рассматривать конкретных лагранжианов и суммировать диаграммы Фейнмана. Вместо этого мы будем исходить из более общих свойств квантовой теории поля, сконцентрированных в функциональных уравнениях ренормализационной группы. Этим путём мы установим связь степенных асимптотик функций Грина с асимптотическим поведением инвариантных зарядов и характером перенормировок констант связи.

Основная часть исследования (разделы 3,4) содержит анализ решений функциональных уравнений для однозарядной ренормализационной группы (имеющей, например, место в спинорной электродинамике). Эти результаты, однако, без труда переносятся на многозарядную группу, которая может иметь место в теории сильных взаимодействий. Соответствующее обсуждение содержится в разделе 6.

## 2. Функциональные уравнения ренормализационной группы (РГ)

Эти уравнения являются следствиями мультипликативной структуры перенормировок квантовой теории поля. Они распадаются на две группы:

а) уравнения для инвариантных зарядов и

б) уравнения для функций Грина.

Инвариантными зарядами называются такие произведения обезразмеренных функций Грина и констант связи (зарядов), которые в данном варианте теории поля остаются инвариантными при мультипликативных преобразованиях зарядов и функций Грина.

Так, в спинорной электродинамике эти преобразования состоят из преобразований Дайсона

$$D_{tr} \to z_3^{-1} D_{tr} \quad , \quad S \to z_2^{-1} S \quad , \quad \Gamma \to z_1 \Gamma \tag{2.I}$$

и "компенсирующего" преобразования константы связи

$$\alpha \to z_1^{-2} z_2^2 z_3 \alpha \, . \tag{2.2}$$

Здесь $D_{tr}$ – поперечная часть полной фотонной функции Грина, $\alpha = e^2/4\pi$, $S$ и $\Gamma$ – электронный пропагатор и вершинная функция. В силу тождества Уорда $z_1 = z_2$ и произведение

$$\alpha D_{tr} \to \alpha D_{tr} \tag{2.3}$$

оказывается инвариантом преобразования.

Функциональные уравнения обычно записываются для безразмерных скалярных коэффициентов функций Грина, рассматриваемых в импульсном представлении. Для фотонного пропагатора

$$D_{tr}^{mn}(k) = \frac{1}{k^2 + i\varepsilon}\left(g^{mn} - \frac{k^m k^n}{k^2}\right) d(k^2, \alpha)$$

такой величиной является $d(k^2, \alpha)$. Эти безразмерные величины, являющиеся функциями импульсов и $\alpha$, определены таким образом, что в низшем приближении теории возмущений они равны единице. На - пример,

$$d(k^2, \alpha = 0) = 1 .$$

Содержащиеся в них радиационные поправки после устранения расходимостей содержат конечный произвол, который можно использовать для нормировки их на единицу в некоторой точке $k^2 = \lambda^2$, т.е.



$$d(k^2 = \lambda^2, \alpha) = 1 .$$

Точка вычитания $\lambda^2$ является дополнительным аргументом функции $d$, фиксирующим процедуру вычитания. Одночастичные функции Грина при этом зависят от квадрата 4-импульса $k^2$, точки вычитания $\lambda^2$, квадратов масс частиц $m^2$, ... и константы связи $\alpha$.

С учётом соображений размерности получаем для фотонной функции Грина

$$d = d\left(\frac{k^2}{\lambda^2}, \frac{m^2}{\lambda^2}, \alpha\right) .$$

Условие нормировки принимает вид

$$d\left(1, \frac{m^2}{\lambda^2}, \alpha\right) = 1 . \tag{2.4}$$

Вершинные и высшие функции Грина, зависящие от большего числа независимых инвариантных импульсных аргументов $k_1^2$, ... $k_a^2$, будем представлять в виде

$$f\left(\frac{k_1^2}{\lambda^2}, \ldots \frac{k_a^2}{\lambda^2}, \frac{m^2}{\lambda^2}, \alpha\right) ,$$

причём

$$f\left(1, \ldots 1, \frac{m^2}{\lambda^2}, \alpha\right) = 1 .$$

В этих обозначениях функциональные уравнения РГ для функций Грина спинорной электродинамики принимают вид /I,2/:

$$d(x, y, \alpha) = d(t, y, \alpha)\, d\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}, \alpha d(t, y, \alpha)\right) \tag{2.5}$$

$$s(x,y,\alpha)=s(t,y,\alpha)s\left(\frac{x}{t},\frac{y}{t},\alpha d(t,y,\alpha)\right) \tag{2.6}$$

$$\Gamma(x_1,x_2,x_3,y,\alpha)= \tag{2.7}$$
$$=\Gamma(t,t,t,y,\alpha)\Gamma\left(\frac{x_1}{t},\frac{x_2}{t},\frac{x_3}{t},\frac{y}{t},\alpha d(t,y,\alpha)\right).$$

Здесь $s$ и $\Gamma$ – скалярные составляющие электронного пропагатора и вершинной функции.

Произведение

$$\xi(x,y,\alpha)=\alpha d(x,y,\alpha), \tag{2.8}$$

соответствующее (2.3), является инвариантным зарядом и играет выделенную роль. Функциональное уравнение для него оказывается замкнутым

$$\xi(x,y,\alpha)=\xi\left(\frac{x}{t},\frac{y}{t},\xi(t,y,\alpha)\right). \tag{2.9}$$

В то же время функциональные уравнения для остальных функций Грина (2.6), (2.7) содержат инвариантный заряд.

Аналогичная картина имеет место в теориях, содержащих две и более константы связи. Так, например, в теории мезон-нуклонного взаимодействия с лагранжианом

$$\mathcal{L}_{int}=g\bar{\Psi}\gamma^5\vec{\tau}\Psi\vec{\varphi}+h(\vec{\varphi}\vec{\varphi})^2 \tag{2.10}$$

возникают два инвариантных заряда, соответствующие ренормализационно-инвариантным произведениям

$$g^2\Gamma^2 S^2\Delta \quad и \quad h\,\square\,\Delta^2, \tag{2.11}$$

где $\Gamma$ – пион-нуклонный 3 -вертекс, $S$ – нуклонная функция Грина, $\Delta$ – пионная функция Грина, а $\square$ – четырехпионный вертекс. В этом случае инвариантные заряды не совпадают с какими-либо функциями Грина и являются их произведениями ( см. /3,2/)

$$\xi(x,y,g^2,h)=g^2\Gamma^2(x,y,g^2,h)s^2(x,y,g^2,h)\Delta(x,y,g^2,h) \tag{2.12}$$

$$\eta(x,y,g^2,h)=h\,\square(x,y,g^2,h)\Delta^2(x,y,g^2,h). \tag{2.13}$$

Здесь $\Gamma(x,y,g^2,h)$ и $\square(x,y,g^2,h)$ – симметричные вершинные функции, например,

$$\Gamma(x,y,g^2,h)\equiv\Gamma(x,x,x,g^2,h). \tag{2.14}$$

Уравнения для инвариантных зарядов представляют собой систему двух связанных функциональных уравнений.

$$\xi(x,y,g^2,h)=\xi\left(\frac{x}{t},\frac{y}{t},\xi(t,y,g^2,h),\eta(t,y,g^2,h)\right) \tag{2.15}$$

$$\eta(x,y,g^2,h)=\eta\left(\frac{x}{t},\frac{y}{t},\xi(t,y,g^2,h),\eta(t,y,g^2,h)\right). \tag{2.16}$$

Уравнения для одночастичных и высших функций Грина, подобно (2.16) и (2.17), содержат инвариантные заряды. Поэтому анализ функциональных уравнений следует начинать с решения уравнений для таких зарядов.

## 3. Решение функционального уравнения для инвариантного заряда

Уравнение (2.9) может быть решено в общем виде методом, предложенным Л.В. Овсянниковым /4/. Дифференцируя его по $t$ и полагая затем $t=1$, получаем

$$\left[x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}-\varphi(y,\alpha)\frac{\partial}{\partial \alpha}\right]\xi(x,y,\alpha)=0, \tag{3.1}$$

причём

$$\varphi(y,\alpha)=\left.\frac{\partial\xi(t,y,\alpha)}{\partial t}\right|_{t=1}. \tag{3.2}$$

Уравнение (3.1) есть дифференциальное уравнение в частных производных. Уравнения такого типа для инвариантных зарядов и функций

Грина будем называть уравнениями Овсянникова *).

Считая $\varphi(y,\alpha)$ известной функцией, можем рассматривать (3.1) как линейное уравнение в частных производных. Два первых интеграла дифференциальных уравнений характеристик

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = -\frac{d\alpha}{\varphi(y,\alpha)}$$

могут быть выбраны в виде

$$\frac{y}{x} = C_1 , \quad \Phi(y,\alpha) = C_2 ,$$

где $\Phi$ - некоторая функция, для явного определения которой необходимо использовать явный вид функции $\varphi$ и решить уравнение

$$\frac{d\alpha}{dy} + \frac{\varphi(y,\alpha)}{y} = 0 .$$

Таким образом, искомая функция $\xi$ может быть представлена в виде

$$\xi(x,y,\alpha) = \Phi_1\left(\frac{y}{x}, \Phi(y,\alpha)\right), \tag{3.3}$$

где $\Phi_1$ - произвольная функция своих аргументов. Используем теперь вытекающее из (2.4) условие нормировки инвариантного заряда

$$\xi(1,y,\alpha) = \alpha . \tag{3.4}$$

Разрешая для этого правую часть (3.3) относительно второго аргумента

$$\Phi(y,\alpha) = \Phi_1^{-1}\left(\frac{y}{x}, \xi(x,y,\alpha)\right), \tag{3.5}$$

положим $x = 1$ . С учётом (3.4) находим $\Phi = \Phi_1^{-1}$.

---

*) Подобные уравнения называют также уравнениями Каллана-Симанчика.



Уравнение (3.5) принимает вид

$$\Phi(y,\alpha) = \Phi\left(\frac{y}{x}, \xi(x,y,\alpha)\right). \tag{3.6}$$

Функциональное соотношение (3.6) даёт наиболее общее решение уравнения (2.9 ). Согласно (3.6), всякому решению $\xi$ уравнения (2.9 ) соответствует некоторая функция двух аргументов $\Phi(y,\alpha)$, такая, что это решение неявно определяется из уравнения (3.6).

Справедливо и обратное утверждение: какова бы ни была функция $\Phi(y,\alpha)$ , обратимая относительно второго аргумента, уравнение (3.6) определяет функцию $\xi(x,y,\alpha)$ , удовлетворяющую функциональному уравнению (2.9 ). Доказательство этого утверждения сводится к ряду простых манипуляций с аргументами уравнения (3.6).

Как уже отмечалось, для определения явного вида функции $\Phi$ , а следовательно, и явного вида $\xi$ , достаточно задать $\varphi(y,\alpha)$.

Перейдём к рассмотрению ультрафиолетовой асимптотики, когда

$$|k^2| \gtrsim \lambda^2 \gg m^2 . \tag{3.7}$$

В этом случае массовая переменная

$$y = \frac{m^2}{\lambda^2} \ll 1$$

выпадает и функциональное уравнение (2.9 ) для

$$\xi(x,\alpha) \equiv \xi(x,0,\alpha) \tag{3.8}$$

принимает вид

$$\xi(x,\alpha) = \xi\left(\frac{x}{t}, \xi(t,\alpha)\right). \tag{3.9}$$

Дифференцируя (3.9) по $t$, полагая $t = 1$, получаем уравнение Овсянникова

$$\left[x\frac{\partial}{\partial x} - \varphi(\alpha)\frac{\partial}{\partial \alpha}\right]\xi(x,\alpha) = 0, \tag{3.10}$$

общее ненормированное решение которого имеет вид

$$\xi(x,\alpha)=\Phi_2(\ln x+\Psi(\alpha)), \tag{3.11}$$

где $\Phi_2$ – произвольная функция, а

$$\Psi(\alpha)=\int\limits_c^{\alpha}\frac{da}{\varphi(a)}\ , \quad \varphi(\alpha)=\frac{\partial\xi(x,\alpha)}{\partial x}\Big|_{x=1}. \tag{3.12}$$

Используя условие нормировки

$$\xi(1,\alpha)=\alpha, \tag{3.13}$$

находим, что $\Phi_2=\Psi^{-1}$, т.е.

$$\xi(x,\alpha)=\Psi^{-1}(\ln x+\Psi(\alpha)). \tag{3.14}$$

Как и в общем случае ( при $y\neq 0$ ), задание функции $\varphi$ (т.е. производной $\partial\xi/\partial x$ в точке нормировки $x=1$ ) полностью определяет решение.

Для анализа асимптотического поведения $\xi$ уравнению (3.14) удобно придать другую форму. Записывая (3.14) в виде

$$\Psi(\xi(x,\alpha))-\Psi(\alpha)=\ln x, \tag{3.15}$$

с учётом (3.12) получаем

$$\int\limits_{\alpha}^{\xi(x,\alpha)}\frac{da}{\varphi(a)}=\ln x \tag{3.16}$$

– так называемое уравнение Гелл-Манна-Лоу /5/.

Решение (3.15), (3.16) является частным случаем общего решения (3.6). Переход от (3.6) к (3.15) осуществляется путём предельного перехода



$$\Psi(\alpha)=\lim_{y\to 0}\ \ln\frac{\Phi(y,\alpha)}{y}. \tag{3.17}$$

Отметим ещё, что решение в форме (3.16) может быть также получено из (3.9) методом, описанным в /6,2/. Дифференцируя для этого (3.9) по $x$ и полагая затем $t=1$, получаем дифференциальное групповое уравнение Ли

$$\frac{\partial\xi(x,\alpha)}{\partial x}=\frac{1}{x}\varphi(\xi(x,\alpha)). \tag{3.18}$$

Интеграл этого дифференциального уравнения первого порядка, удовлетворяющий условию нормировки (3.13), имеет вид (3.16). Таким образом, уравнение Овсянникова (3.10) и уравнение (3.18) полностью эквивалентны друг другу, представляя собой различные формы дифференциального группового уравнения.

Как видно из уравнения (3.16), асимптотика при $\ln x\to\infty$ соответствует расходимости интеграла, стоящего в левой части, на верхнем пределе. Возможны три случая:

1) если

$$\int\limits_{\alpha}^{\infty}\frac{da}{\varphi(a)}=c=\ln x_\infty<\infty, \tag{3.19}$$

то теория внутренне противоречива, так как

$$\xi(x_\infty,\alpha)=\infty, \qquad x_\infty<\infty,$$

а область импульсов $x>x_\infty$ не описывается теорией. Именно такой случай соответствует трудности "призрачного" полюса;

2) при

$$\int\limits_{\alpha}^{\infty}\frac{da}{\varphi(a)}=\infty \tag{3.20}$$

инвариантный заряд неограниченно возрастает

$$\lim_{x\to\infty} \xi(x,\alpha) = \infty, \tag{3.21}$$

и мы приходим к обычной картине с бесконечными константами перенормировки, соответствующей низшим приближениям теории возмущений;

3) если же

$$\int_{\alpha}^{\alpha_\infty} \frac{da}{\varphi(a)} = \infty, \qquad при \quad \alpha_\infty < \infty, \tag{3.22}$$

то асимптотика инвариантного заряда конечна

$$\xi(\infty,\alpha) = \alpha d(\infty,\alpha) = \alpha_\infty < \infty. \tag{3.23}$$

Этот случай соответствует конечной перенормировке квадрата заряда.

Для осуществления (3.22) необходимо, чтобы функция $\varphi(\alpha)$ в точке $\alpha = \alpha_\infty$ достаточно быстро обращалась в нуль

$$\varphi(\alpha_\infty) = 0. \tag{3.24}$$

Случай (3.22) реализуется в модели для фотонной функции Грина, рассмотренной в работе Боголюбова, Логунова, Ширкова /7/. Выражение для $d(x,\alpha)$ там было получено путём суммирования главных логарифмических членов теории возмущений под знаком спектрального представления Челлена-Лемана и последующего приведения его к ренормализационно-инвариантной форме. Окончательный результат имеет вид

$$\xi(x,\alpha) = \frac{3\pi}{f(\alpha) - \ln x} + \frac{3\pi}{1 - \exp[f(\alpha) - \ln x]}, \tag{3.25}$$



причём функция $f$ неявно определяется из уравнения

$$\frac{\alpha}{3\pi} = \frac{1}{f(\alpha)} + \frac{1}{1 - \exp f(\alpha)} \tag{3.26}$$

и обладает следующими свойствами:

а) монотонно убывает при $\alpha > 0$.

б) при малых $\alpha$ $\qquad f(\alpha) \sim 3\pi\alpha^{-1}$ $\qquad$ (3.27)

в) при $\alpha = 3\pi$ имеет полюс

$$f(\alpha) \simeq \frac{3\pi}{\alpha - 3\pi}. \tag{3.28}$$

В соответствии с (3.27) при малых $\alpha$ функция $d$ имеет вид

$$d(x,\alpha) = \frac{1}{1 - \frac{\alpha}{3\pi}\ln x} + \frac{3\pi x \alpha^{-1}}{x - \exp\left(\frac{3\pi}{\alpha}\right)}. \tag{3.29}$$

Это выражение отличается от полюсного приближения вторым членом, который убирает "призрачный" полюс и приводит к конечному значению асимптотического инвариантного заряда

$$\xi(\infty,\alpha) = \alpha_\infty = 3\pi. \tag{3.30}$$

Функция $\varphi(\alpha)$, вычисленная из (3.25) в окрестности $\alpha \sim \alpha_\infty$, имеет нуль второго порядка

$$\varphi(\alpha) \simeq \frac{(\alpha - \alpha_\infty)^2}{3\pi}. \tag{3.31}$$

В дальнейшем мы изучим решения функциональных уравнений для функций Грина в ультрафиолетовой области в предположении, что инвариантный заряд имеет конечную асимптотику (3.22),(3.23), либо бесконечную асимптотику (3.20), (3.21). Подчеркнём, что это предположение имеет гипотетический характер и не может быть сколько-нибудь надёжно обосновано на основе информации из теории возмущений.

## 4. Решение функциональных уравнений для одночастичных функций Грина в ультрафиолетовой области

В области импульсных аргументов, много больших по сравнению с $m^2$, функциональное уравнение (2.16) принимает вид

$$s(x,\alpha) = s(t,\alpha)\, s\left(\frac{x}{t}, \xi(t,\alpha)\right). \qquad (4.1)$$

Дифференцируя (4.1) по $t$ и полагая $t = 1$, получаем дифференциальное уравнение

$$\left[x\frac{\partial}{\partial x} - \varphi(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha} - \psi(\alpha)\right] s(x,\alpha) = 0, \qquad (4.2)$$

причём $\varphi$ определена в (3.12), а

$$\psi(\alpha) = \frac{\partial \ln s(x,\alpha)}{\partial x}\Big/_{x=1}.$$

Вводя обозначения

$$L = \ln x, \quad S(L,\alpha) = \ln s(x,\alpha),$$

перепишем уравнение Овсянникова (4.2) в виде

$$\frac{\partial S(L,\alpha)}{\partial L} - \varphi(\alpha)\frac{\partial S(L,\alpha)}{\partial\alpha} = \psi(\alpha). \qquad (4.3)$$

Общее решение уравнения (4.3) представимо в виде

$$S(L,\alpha) = \tilde{\Psi}\left(L + \int_c^\alpha \frac{da}{\varphi(a)}\right) - \int_c^\alpha \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}\,da, \qquad (4.4)$$

где $\tilde{\Psi}$ – произвольная функция. Первый член правой части представляет собой общее решение однородного уравнения, соответствующего (4.3). В соответствии с (3.10) и (3.11), он может быть представлен в виде



$$\tilde{\Psi}(L + \Phi(\alpha)) = \ln \tilde{Q}(\xi(x,\alpha)).$$

Получаем

$$s(x,\alpha) = \tilde{Q}(\xi(x,\alpha)) \exp\left\{-\int_c^\alpha \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}\,da\right\}. \qquad (4.5)$$

Принимая во внимание условие нормировки

$$s(1,\alpha) = 1,$$

представим (4.4) в виде

$$s(x,\alpha) = \exp\int_\alpha^{\xi(x,\alpha)} \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}\,da. \qquad (4.6)$$

Формула (4.6) представляет собой аналог уравнения Гелл-Манна–Лоу (3.16). Она весьма удобна для исследования возможных ультрафиолетовых асимптотик функции $s(x,\alpha)$.

Ограничиваясь сначала случаем конечного асимптотического значения инвариантного заряда (3.22),(3.23), получаем следующие возможности:

а) интеграл

$$I_0 = \int_\alpha^{\alpha_\infty} \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}\,da$$

сходится на верхнем пределе. В этом случае

$$\lim s(x,\alpha) = \frac{Q(\alpha_\infty)}{Q(\alpha)} = \exp\int_\alpha^{\alpha_\infty} \frac{\psi(a)}{\varphi(a)}\,da,$$

т.е. функция Грина стремится к константе;

б) интеграл $I_0$ расходится на верхнем пределе, однако интеграл

$$I_1 = \int_\alpha^{\alpha_\infty} \frac{\psi(a) - \psi(\alpha_\infty)}{\varphi(a)}\,da \quad \text{сходится.} \qquad (4.7)$$

Производя в (4.4) функциональную замену

$$\tilde{\Psi}(z) = z\psi(\alpha_\infty) + \Psi(z)\ ;\ \Psi(L+\Phi(\alpha)) = \ln Q(\xi),$$

представим (4.5) в виде

$$s(x,\alpha) = x^{\psi(\alpha_\infty)}\frac{Q(\xi)}{Q(\alpha)} = x^{\psi(\alpha_\infty)}\exp\int_\alpha^{\xi(x,\alpha)}\frac{\psi(a)-\psi(\alpha_\infty)}{\psi(a)}\,da,$$

причём

$$s(x,\alpha)\to x^{\psi(\alpha_\infty)}\exp I_1.$$

Таким образом, в случае б) функция Грина имеет степенное асимптотическое поведение. Показатель степени $\psi(\alpha_\infty)$ называется аномальной размерностью;

в) интеграл $I_0$ расходится, и для его сходимости "одного вычитания", проведённого в (4.7), недостаточно. В этом случае на степенную асимптотику накладываются более слабые логарифмические зависимости. Для их определения необходима конкретизация поведения функции $\varphi(\alpha)$ около $\alpha=\alpha_\infty$.

Рассмотрим в качестве иллюстрации модель (3.25), в которой $\varphi$ имеет нуль второго порядка в точке $\alpha_\infty$. В этом случае интеграл

$$\int_\alpha^\xi\frac{\psi(a)-\psi(\alpha_\infty)}{\varphi(a)}\,da = 3\pi\int_\alpha^\xi\frac{\psi(a)-\psi(\alpha_\infty)}{(a-\alpha_\infty)^2}\,da$$

расходится при $\xi\to\alpha_\infty$. Он может быть сделан сходящимся путём добавления к нему члена

$$-3\pi\int_\alpha^\xi\frac{\psi'(\alpha_\infty)}{a-\alpha_\infty}\,da = -3\pi\psi'(\alpha_\infty)\ln\frac{\xi-\alpha_\infty}{\alpha-\alpha_\infty}.$$

Получаем в результате



$$s(x,\alpha) = x^{\psi(\alpha_\infty)}\left[\frac{\alpha_\infty-\xi(x,\alpha)}{\alpha_\infty-\alpha}\right]^{3\pi\psi'(\alpha_\infty)}\frac{\bar{Q}(\xi(x,\alpha))}{\bar{Q}(\alpha)},\qquad(4.8)$$

где

$$\frac{\bar{Q}(\xi)}{\bar{Q}(\alpha)} = \exp\left[\int_\alpha^\xi\frac{\psi(a)-\psi(\alpha_\infty)-(a-\alpha_\infty)\psi'(\alpha_\infty)}{\varphi(a)}\,da\right].$$

Дополнительный множитель в правой части (4.8) при $x\to\infty$ с помощью (3.25) может быть представлен в виде $(\ln x)^{-3\pi\psi'}$. Таким образом, при $x\to\infty$

$$s(x,\alpha)\to x^{\psi(\alpha_\infty)}(\ln x)^{-3\pi\psi'(\alpha_\infty)}\frac{\bar{Q}(\alpha_\infty)}{\bar{Q}(\alpha)}.\qquad(4.9)$$

Обратимся к случаю бесконечного инвариантного заряда (3.2I). При этом функция $\varphi(a)/a$, определяющая асимптотическое поведение $\xi$ при больших $a$, не может расти. Рассмотрим два случая:

A) $$\frac{\varphi(a)}{a}\sim\frac{\varphi_n}{n}a^{-n}\qquad n>0.\qquad(4.IOA)$$

B) $$\frac{\varphi(a)}{a}\sim\varphi_0=\text{const}\qquad(n=0).\qquad(4.IOB)$$

Согласно (3.I6), это даёт

A) $$\xi^n(x,\alpha)\sim\varphi_n\ln x\ ,\quad \xi\sim(\varphi_n\ln x)^{1/n}.\qquad(4.IIA)$$

B) $$\xi(x,\alpha)\sim x^{\varphi_0}.\qquad(4.IIB)$$

Асимптотики отдельных функций Грина $s_i(x,\alpha)$ определяются теперь отношением $\psi_i(a)/\varphi(a)$. При этом асимптотические поведения $\psi_i(a)$ для отдельных функций $s_i$ и асимптотическое поведение $\varphi(a)$, для инвариантного заряда $\xi$, являющегося произведением степеней $S_i$

$$\xi(x,\alpha) = \prod_i \left[S_i(x,\alpha)\right]^{N_i}, \qquad (4.12)$$

связаны соотношением

$$\frac{\varphi(a)}{a} = \sum_i N_i \psi_i(a). \qquad (4.13)$$

Вследствие этого маловероятно, чтобы асимптотики функций $\psi_i$ и $\varphi(a)/a$ сильно отличались друг от друга. Наиболее естественным является случай

$$\psi_i(a) = \nu_i \frac{\varphi(a)}{a} \quad ; \quad \sum_i \nu_i N_i = 1. \qquad (4.14)$$

Мы будем называть его "нормальным случаем". Тогда

$$S_i(x,\alpha) \sim \left[\xi(x,\alpha)\right]^{\nu_i}. \qquad (4.15)$$

Если же при суммировании в правой части уравнения (4.13) происходит компенсация старших членов, то тогда асимптотики отдельных функций могут существенно отличаться от асимптотики инвариантного заряда ("аномальный случай"). Пусть, например,

$$\psi_i(a) = \gamma_i \varphi(a) + \nu_i \frac{\varphi(a)}{a}, \quad \sum_i \gamma_i N_i = 0, \quad \sum_i \nu_i N_i = 1. \qquad (4.16)$$

Тогда

$$S_i(x,\alpha) = \left[\xi(x,\alpha)\right]^{\nu_i} \exp\left(\gamma_i \xi\right). \qquad (4.17)$$

В произведении (4.12) "главные" асимптотические множители $\exp \gamma_i \xi$ взаимно сокращаются и проявляется младший член

$$\xi^{\sum N_i \nu_i} = \xi.$$



Таблица

Асимптотики одночастичной функции Грина

| | Перенормировка | Нормальный случай | Аномальный случай |
|---|---|---|---|
| I | $Z_3 = const < \infty$ | $const$ | $x^{M}(\ln x)^{\nu}$ |
| II | $Z_3 = \infty$, $\xi \to \infty$ | | |
| II A | $\xi \sim (\ln x)^{1/n}$ | $(\ln x)^{\nu_i/n}$ | $x^{M_i}(\ln x)^{\nu_i/n}$ |
| II B | $\xi \sim x^{\varphi_0}$ | $x^{\nu_i \varphi_0}$ | $\exp(\gamma_i x^{\varphi_0})\, x^{\nu_i \varphi_0}$ |

Ясно также, что если компенсация в правой части носит более сильный характер ( аннулируется $k$ старших членов в $\Psi_i$), то решения для $S_i$ будут иметь вид (4.I7), причем экспоненциальный фактор будет содержать полином $k$ - ой степени от $\xi$ :

$$\exp(\gamma\xi) \to \exp(P_k(\xi)).$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что, как в случае конечного инвариантного заряда, так и в "нормальном" случае бесконечного инвариантного заряда асимптотики одночастичных функций Грина могут быть представлены в виде

$$s_i(x,\alpha) \sim x^{\Psi_i}(\ln x)^{\bar{\Psi}_i}. \qquad (4.I8)$$

"Аномальный" случай вида (4.I6) с логарифмическим ростом инвариантного заряда (4.IIA) также описывается зависимостью (4.I8). Существенные отклонения от степенной формулы (4.I8) возникают лишь в аномальном случае при степенной асимптотике инвариантного заряда (4.IIB). Последний случай мы будем называть экзотическим.

Результаты этого раздела суммированы в таблице.

## 5. Ультрафиолетовые асимптотики высших функций Грина

Приступим теперь к анализу асимптотического поведения высших функций Грина. Начнём с вершинной функции $\Gamma$, уравнение (2.7) для которой при $y=0$ принимает вид:

$$\Gamma(x_1,x_2,x_3,\alpha) = \Gamma_s(t,\alpha)\,\Gamma\left(\frac{x_1}{t},\frac{x_2}{t},\frac{x_3}{t},\xi(t,\alpha)\right), \qquad (5.I)$$

причём "симметричная" вершинная функция $\Gamma_s$ , определенная как

$$\Gamma_s(x,\alpha) = \Gamma(x,x,x,\alpha), \qquad (5.2)$$



удовлетворяет функциональному уравнению, совпадающему с уравнением (4.I) для одночастичной функции Грина $s$ . Вследствие этого весь анализ, выполненный в § 4 для $s(x,\alpha)$, применим для $\Gamma_s(x,\alpha)$.

Дифференциальное групповое уравнение, соответствующее (5.I), имеет вид:

$$\left[x_1\frac{\partial}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial}{\partial x_2}+x_3\frac{\partial}{\partial x_3}-\varphi(\alpha)\frac{\partial}{\partial\alpha}\right]\ln\Gamma(x_1,x_2,x_3,\alpha)=\gamma_s(\alpha). \qquad (5.3)$$

Здесь $\varphi(\alpha)$ определена в (3.2), а

$$\gamma_s(\alpha) = \left.\frac{\partial\ln\Gamma_s(x,\alpha)}{\partial x}\right|_{x=1}. \qquad (5.4)$$

Таким образом, для определения асимптотики вершинной функции $\Gamma$ , кроме асимптотики инвариантного заряда $\xi$, следует задать асимптотику $\Gamma_s$ . Выбирая первые интегралы однородного уравнения, соответствующего (5.3) в виде:

$$\ln x_1 + \int^{\alpha}\frac{da}{\varphi(a)} = \ln x_1 + \Phi(\alpha) = C_1;\ \frac{x_2}{x_1}=C_2,\ \frac{x_3}{x_1}=C_3, \qquad (5.5)$$

запишем общее решение уравнения (5.3) в виде

$$\ln\Gamma(x_1,x_2,x_3,\alpha) = -\int_c^{\alpha}\frac{\gamma_s(a)}{\varphi(a)}da + \ln R\left(\xi(x_1,\alpha),\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1}\right). \qquad (5.6)$$

Отметим, что при другом выборе первых интегралов

$$\ln x_1+\Phi(\alpha)=\tilde{C}_1,\ \ln x_2+\Phi(\alpha)=\tilde{C}_2,\ \ln x_3+\Phi(\alpha)=\tilde{C}_3$$

функцию $R$ можно представить как функцию инвариантных зарядов

$$R\left(\xi_1,\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1}\right)=\tilde{R}(\xi_1,\xi_2,\xi_3),\quad \xi_i=\xi(x_i,\alpha). \qquad (5.7)$$

Формула (5.6), представленная в виде

$$\Gamma(x_1,x_2,x_3,\alpha)=\exp\left[\int\limits_{\alpha}^{\xi(x_1,\alpha)}\frac{\gamma_s(a)}{\varphi(a)}da\right]G\left(\xi_1,\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1}\right), \tag{5.8}$$

где

$$G(\xi,c_2,c_3)=\frac{R(\xi,c_2,c_3)}{R(\xi,1,1)}$$

является аналогом формулы (4.6) и может представлять собой основу для асимптотического анализа.

Мы, однако, воспользуемся тем обстоятельством, что специальный асимптотический предел

$$x_1\to\infty\ ;\ \frac{x_2}{x_1}=C_2=const\ ,\ \frac{x_3}{x_1}=C_3=const \tag{5.9}$$

фактически эквивалентен симметричной асимптотике:

$$x_1=x_2=x_3\to\infty\ ,$$

поскольку "первоначальный" выбор переменных $x_1$, $x_2$, $x_3$ находится в наших руках.

Переопределяя вершинную функцию

$$\Gamma\to\tilde\Gamma(x_1,x_2,x_3,\alpha)=\frac{\Gamma(x_1,x_2,x_3,\alpha)}{\Gamma(1,c_2,c_3,\alpha)}, \tag{5.10}$$

введём новую квазисимметричную асимптотическую функцию

$$\Gamma_{QS}(x,\alpha)\equiv\tilde\Gamma(x,xc_2,xc_3,\alpha),$$

нормированную при $x=1$.

В силу (5.10)

$$\Gamma(x,xc_2,xc_3,\alpha)=\Gamma(1,c_2,c_3,\alpha)\Gamma_{QS}(x,\alpha), \tag{5.11}$$



а $\Gamma_{QS}$ удовлетворяет тем же уравнениям, что и $\Gamma_s$. Таким образом мы получили, что квазисимметричная асимптотика $3$-аргументной вершинной функции Грина отличается от её симметричной асимптотики лишь множителем

$$\Gamma(1,c_2,c_3,\alpha)=\Gamma\left(1,\frac{x_2}{x_1},\frac{x_3}{x_1},\alpha\right),$$

имеющим явно масштабно-инвариантную форму.

Обобщение этого результата на высшие функции Грина является очевидным

$$F(x_1,\dots x_n,\alpha)=f\left(\frac{x_2}{x_1},\dots\frac{x_n}{x_1},\alpha\right)F_{QS}(x_1,\alpha). \tag{5.12}$$

Функция $F_{QS}$, подобно $\Gamma_{QS}$, удовлетворяет уравнению (4.1), и для неё справедлив анализ раздела 4.

Сделаем ещё одно замечание, относящееся специально к высшим функциям Грина, соответствующим вершинам, не имеющим "собственных" расходимостей. Перенормировки таких вершин не являются независимыми и представляют собой произведения констант $z_i$, относящихся к вершинам с меньшим количеством внешних линий. Так, например, диаграмма $K$ комптоновского рассеяния на электроне (не содержащая поправок во внешние линии) при одновременных преобразованиях (2.1), (2.2) преобразуется следующим образом:

$$K\to z_2z_3K.$$

Поэтому произведение комптоновской функции $K$ на фотонный пропагатор $d$ и электронный пропагатор $s$ оказывается ренормализационно-инвариантным и может зависеть только от инвариантного заряда

$$sdK=f(\xi).$$

Иными словами, симметричная асимптотика функции $K$ выражается через произведение

$$K(x) = d^{-1}(x)\, s^{-1}(x)\, f(\xi(x,\alpha)). \tag{5.13}$$

В более общем случае вершины с $b$-фотонными концами и $2f$-электронными (см./8,9/) получаем:

$$K_{b,2f}(x) = d^{-b/2} s^{-f}(x)\, f(\xi(x,\alpha)). \tag{5.14}$$

## 6. Сильные взаимодействия. Общая картина.

В дидактических целях мы провели основное изложение применительно к спинорной электродинамике, существенным свойством которой является наличие лишь одной константы связи $e=\sqrt{4\pi\alpha}$. В теории сильных взаимодействий обычно имеют дело с моделями, содержащими несколько констант связи. Как было отмечено в конце п. 2, при этом возникает система связанных функциональных уравнений (2.15) (2.16) для инвариантных зарядов.

Решение этой системы может быть получено методом Овсянникова. Результат имеет следующий вид/4/.

Наиболее общее решение системы (2.15), (2.16) $\xi$, $\eta$ определяется через две произвольные функции $\Phi_i(y, g^2, h)$, $i=1,2$, обратимые в совокупности относительно двух последних аргументов, из системы уравнений

$$\Phi_1\left(\frac{y}{x}, \xi, \eta\right) = \Phi_1(y, g^2, h)$$
$$\Phi_2\left(\frac{y}{x}, \xi, \eta\right) = \Phi_2(y, g^2, h). \tag{6.1}$$

Переход к ультрафиолетовой асимптотике, соответствующей случаю $y=0$, может быть выполнен с помощью функциональной подстановки, аналогичной (3.17)



$$\Psi_i(g^2, h) = \lim_{y\to 0} \ln \frac{\Phi_i(y, g^2, h)}{y},$$

которая даёт вместо (6.1)

$$\Psi_1(\xi(x,g^2,h), \eta(x,g^2,h)) - \Psi_1(g^2,h) = \ln x$$
$$\Psi_2(\xi(x,g^2,h), \eta(x,g^2,h)) - \Psi_2(g^2,h) = \ln x. \tag{6.2}$$

С другой стороны, дифференцируя по $x$ уравнения (2.15), (2.16) и полагая затем $t=x$, $y=0$, получаем систему двух уравнений I-го порядка

$$\frac{\partial \xi}{\partial L} = \varphi_1(\xi,\eta), \quad \frac{\partial \eta}{\partial L} = \varphi_2(\xi,\eta), \tag{6.3}$$

где

$$\varphi_1(g^2,h) = \left.\frac{\partial \xi(x,g^2,h)}{\partial x}\right|_{x=1}, \quad \varphi_2(g^2,h) = \left.\frac{\partial \eta(x,g^2,h)}{\partial x}\right|_{x=1}.$$

Анализ системы (6.3), выполненный И.Ф. Гинзбургом/10/ для теории (2.10), показывает, что при возрастании $L = \ln x = \ln(p^2/\lambda^2)$ независимо от степени малости "начальных значений"

$$\xi(1,g^2,h) = g^2, \quad \eta(1,g^2,h) = h$$

происходит выход за рамки слабой связи и возникает ситуация, которую невозможно проанализировать, основываясь на информации из теории возмущений. Таким образом, даже простейшие варианты адронных взаимодействий не допускают исследования ультрафиолетовых асимптотик, основанного на изучении свойств рядов теории возмущений. Здесь, однако, также можно предположить, что при $x\to\infty$ все инвариантные заряды стремятся к конечным предельным значениям. Так, например, если существует пара значений

$$\xi = \xi_\infty < \infty \quad , \quad \eta = \eta_\infty < \infty \tag{6.4}$$

такая, что

$$\varphi_1(\xi_\infty, \eta_\infty) = 0 \quad , \quad \varphi_2(\xi_\infty, \eta_\infty) = 0 , \tag{6.5}$$

причём точка (6.4) на фазовой плоскости $\xi$ , $\eta$ является устойчивым узлом системы (6.3), то числа $\xi_\infty$ , $\eta_\infty$ представляют собой асимптотические значения инвариантных зарядов. Такое положение эквивалентно случаю (3.22), (3.23) (причём условия (6.5) являются обобщениями условия (3.24)),и мы приходим ко всем свойствам одночастичных и высших функций Грина, рассмотренным в первой половине п. 4.

Аналогичным образом может быть рассмотрен случай бесконечных асимптотических значений инвариантных зарядов. Здесь,однако,является существенной связь соответствующих бесконечных пределов. Случай, когда один из них пропорционален степени другого:

$$\xi(x, g^2, h) \sim \eta^k(x, g^2, h) ,$$

может быть проанализироѓан до конца и приводит к результатам, аналогичным однозарядной теории.

Таким образом,и в многозарядной теории сильных взаимодействий степенные асимптотики одночастичных функций Грина (аномальные размерности) и автомодельные выражения типа (5.12) для высших функций Грина естественным образом возникают из предположения о конечности асимптотических значений инвариантных зарядов (т.е. конечности эффективных перенормировок констант связи). Как было показано,они могут также иметь место и в ряде случаев ( см. таблицу) бесконечных перенормировок с "умеренным" законом роста инвариантных зарядов.



Полученные результаты относятся к специальным квазисимметричным асимптотикам типа (5.9). В физически интересных случаях часть аргументов из $x_1 \ldots x_a$ находится на массовой поверхности , вследствие чего следует рассматривать несимметричные асимптотики. В этом случае качественные свойства полученных результатов сохраняются. Что же касается их количественной стороны (численные значения аномальных размерностей, явный вид автомодельной функции и т.п.), то для её анализа, как уже отмечалось, квантовополевая теория возмущений является недостаточной.

**Литература:**


1. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. ДАН СССР 103,203 (1955).
2. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков .Nuovo Cim. 3,845 (1956).
3. Д.В. Ширков. ДАН СССР, 105, 972 (1955).
4. Л.В. Овсянников. ДАН СССР 109, 1112 (1956).
5. M.Gell-Mann. F.Low. Phys.Rev. 95, 1300 (1954).
6. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. ДАН СССР 103,391 (1955).
7. Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, Д.В. Ширков. ЖЭТФ, 37, 805 (1959).
8. M.Konuma, H.Umezawa, Nuovo Cim. 4, 1461 (1956).
9. И.Ф. Гинзбург, Д.В. Ширков. Науч. Докл. Высш. Школы. сер. физ.мат. № 2, 143 (1958).
10. И.Ф. Гинзбург. ДАН СССР 110, 535 (1956).


Рукопись поступила в издательский отдел
7 февраля 1973 года.