6937

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 6937

С.П.Кулешов, В.А.Матвеев,
А.Н.Сисакян, М.А.Смондырев

ИЗУЧЕНИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ СО СКАЛЯРНЫМ КВАНТОВАННЫМ ПОЛЕМ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

P2 - 6937

С.П.Кулешов, В.А.Матвеев,
А.Н.Сисакян, М.А.Смондырев

ИЗУЧЕНИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЧАСТИЦЫ СО СКАЛЯРНЫМ КВАНТОВАННЫМ ПОЛЕМ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

(Доклад на Международной конференции по математическим проблемам квантовой теории поля и квантовой статистики, 12-19 декабря 1972 года, Москва).

Направлено в Труды Межд. конф. по математическим проблемам квантовой теории поля и квантовой статистики

1. Среди различных подходов квантовой теории поля, не опирающихся на теорию возмущений, важное место занимают методы функционального интегрирования.

Представления функций Грина и амплитуд рассеяния в виде замкнутых выражений дают удобную возможность для формулировки различных приближений теории поля [1,2]. Среди известных приложений этих методов отметим исследования инфракрасных асимптотик и градиентных преобразований функций Грина в квантовой электродинамике [3–5].

В последнее время методы функционального интегрирования были использованы при исследовании ультрафиолетовых или высокоэнергетических асимптотик амплитуд рассеяния. Исследования в этом направлении привели к формулировке приближения прямолинейных путей, являющего эффективным методом изучения асимптотического поведения амплитуд рассеяния в области больших энергий и ограниченных передач импульса в моделях квантовой теории поля [6]. Дальнейшее обобщение этот метод получил в работах [7,8], в которых был сформулирован ряд аппроксимационных процедур, представляющих различные математические реализации общей концепции прямолинейных путей.

Детальное изучение этих приближений в моделях теории поля сталкивается, однако, с трудностями, которые обусловлены сингулярным характером типичных релятивистских взаимодействий. По этой причине представляет интерес рассмотрение более простых нерелятивистских моделей, в рамках которых было бы возможно более полно исследовать характер предложенных аппроксимаций, свойства сходимости соответствующих разложений и тому подобные вопросы.

Одной из задач подобного рода является задача нахождения функций Грина в модели поларона, то есть нерелятивистской частицы, взаимодействующей со скалярным квантованным полем /9–13/. Впервые эта задача в рамках техники континуального интегрирования рассматривалась в /14/, где была дана оценка энергии низшего энергетического состояния системы для случая слабой связи.

Противоположный случай сильной связи в моделях подобного типа исследовался в /15–17/. В этих работах рассматривалось каноническое преобразование Н.Н.Боголюбова, позволяющее трансляционно-инвариантным образом отделить равномерное прямолинейное движение частицы от квантованного "дрожания", обусловленного взаимодействием с квантованным полем.

Целью настоящей работы является изучение функции Грина поларона методами континуального интегрирования в рамках приближения прямолинейных путей. В работе сравниваются результаты различных функциональных аппроксимаций при вычислении вакуумных средних функций Грина и исследуются первые поправки к основному приближению.

Во втором параграфе формулируется и изучается общая задача о нахождении функции Грина в модели поларона в координатном представлении.

Найденное точное решение задачи в виде T -упорядоченной экспоненты представляется затем в форме континуального интеграла. В основе используемого здесь метода лежит представление хронологических произведений операторов типа $A[\vec{r}(s)]$, где $\vec{r}(s) = \vec{r} + \frac{i}{\mu}\int_0^s \vec{\nabla}\, d\eta$, в виде континуальных интегралов по путям частиц $\vec{r}(s)$ таких, что $\vec{r}(0) = \vec{r}$.

Выписываются матричные элементы функции Грина в когерентном базисе, которые могут рассматриваться как производящие функции средних функций Грина по состояниям с определенными числами квантов.

В третьем параграфе функция Грина строится с помощью преобразования Н.Н.Боголюбова в P -представлении, в котором полный импульс системы является c -числом. Изучаются функциональные аппроксимации для нахождения вакуумных средних функции Грина, являющиеся простейшими вариантами приближения прямолинейных путей.

В четвертом параграфе рассматриваются первые поправки к энергии основного состояния системы, обусловленные эффектами корреляции во взаимодействии частицы с квантованным полем. В качестве примера анализируется простейший вариант модели поларона, для которой находятся условия применимости

приближений слабой и умеренно-сильной связи. Обсуждается применимость развиваемых методов для случая сильной связи.

2. Рассмотрим задачу нахождения функции Грина нерелятивистской частицы, взаимодействующей со скалярным квантованным полем.

Модель определяется гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2\mu}\Delta_r + g\sum_k (A_k e^{i\vec{k}\vec{r}} b_k + A_k^* e^{-i\vec{k}\vec{r}} b_k^+) + \frac{1}{2}\sum_k \omega_k (b_k^+ b_k + b_k b_k^+). \qquad /2.1/$$

Здесь b_k^+, b_k - операторы рождения, уничтожения квантов скалярного поля /фононов/ с волновым вектором $\vec{k}$, так что

$[b_k, b_{k'}^+] = \delta_{kk'}$; A_k - компоненты Фурье плотности источника. Для удобства считаем, что система находится в конечном объеме, представляющем собою куб со стороной L, так что волновые векторы $\vec{k}$ определяются выражением

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L}(n_1, n_2, n_3);\ n_1, n_2, n_3 \text{ - целые числа.}$$

Функция Грина системы определяется уравнением

$$(H - E)\, G = 1 \qquad /2.2/$$

и в силу вещественности спектра оператора H может быть представлена в виде

$$G = -i\int_0^\infty d\tau\, e^{i\tau(H-E+i0)} = -i\int_0^\infty d\tau\, e^{-i\tau(E-i0)}\, G_\tau, \qquad /2.3/$$

где величина G_τ удовлетворяет условиям

$$-i\frac{\partial}{\partial\tau} G_\tau = H G_\tau, \qquad G_{\tau=0} = 1. \qquad /2.4/$$

Переходя к представлению взаимодействия

$$G_\tau = e^{i\tau H_0}\, g_\tau\,, \qquad /2.5/$$

где

$$H_0 = -\frac{1}{2\mu}\,\Delta_r + \frac{1}{2}\sum_k \omega_k \left(b_k^+ b_k + b_k b_k^+\right) \qquad /2.6/$$

- свободный гамильтониан системы, находим

$$-i\frac{\partial}{\partial \tau}\, g_\tau = U_\tau\, g_\tau\,, \qquad g_\tau = 1\,. \qquad /2.7/$$

Здесь

$$U_\tau = e^{-i\tau H_0}\Big[g\sum_k \left(A_k e^{i\vec k\vec r}\, b_k + A_k^* e^{-i\vec k\vec r}\, b_k^+\right)\Big] e^{i\tau H_0} =$$

$$= g\sum_k \Big[A_k e^{i\vec k\vec r(\tau)}\, b_k(\tau) + A_k^*\, e^{-i\vec k\vec r(\tau)}\, b_k^+(\tau)\Big] \qquad /2.8/$$

- гамильтониан взаимодействия в системе, где

$$\vec r_\tau = \vec r + \frac{i\tau}{\mu}\,\vec\nabla_r\,, \quad b_k(\tau) = e^{i\omega_k\tau}\, b_k\,, \quad b_k^+(\tau) = e^{-i\omega_k\tau}\, b_k^+. \qquad /2.9/$$

Формальное решение уравнений /2.7/ имеет вид T-экспоненты

$$g_\tau = T\Big[\exp\Big(i\int_0^\tau U_{\tau'}\, d\tau'\Big)\Big] =$$

$$= T\Big\{\exp\Big[ig\sum_k b_k^+ A_k^* \int_0^\tau d\tau'\, e^{-i\omega_k\tau' - i\vec k\vec r(\tau')}\Big]\, R_\tau\, \times \qquad /2.10/$$

$$\times \exp\Big[ig\sum_k b_k A_k \int_0^\tau d\tau'\, e^{i\omega_k\tau' + i\vec k\vec r(\tau')}\Big]\Big\},$$

где

$$R_\tau = \exp\Big[-g^2\sum_k |A_k|^2 \int_0^\tau ds_1\, e^{-i\omega_k s_1 - i\vec k\vec r(s_1)}\, \times \qquad /2.11/$$

$$\times \int_0^{s_1} ds_2\, e^{i\omega_k s_2 + i\vec k\vec r(s_2)}\Big].$$

В решении /2.10/ для g_τ T-упорядочивание действует лишь на расстановку операторов, зависящих от $\vec r_\tau$.

При получении /2.11/ использовался тот факт, что "причинная" свертка $\underbrace{b_k(\tau)\;\; b_k^+(\tau')}$ имеет вид

$$\underbrace{b_k(\tau)\;\; b_{k'}^+(\tau')} = T\left[\,b_k(\tau)\, b_{k'}^+(\tau')\,\right] - b_{k'}^+(\tau')\, b_k(\tau) = \qquad /2.12/$$

$$= \theta(\tau - \tau')\, e^{i\omega_k(\tau - \tau')}.$$

При "распутывании" упорядоченной T-экспоненты в /2.10/ может быть использован следующий результат:

$$T\Big[\prod_{a=1}^n e^{i\vec k_a \vec r(s_a)}\Big] = \sum_{\substack{\text{перестановки}\\ s_a}} \theta(s_1 - s_2)\,\theta(s_2 - s_3)\ldots\theta(s_{n-1} - s_n)\,\cdot$$

$$\cdot\, e^{i\vec k_1\vec r(s_1)}\, e^{i\vec k_2\vec r(s_2)} \ldots\ldots e^{i\vec k_n\vec r(s_n)} = \qquad /2.13/$$

$$= \exp\Big[i\sum_a \vec k_a \vec r(s_a) - \frac{i}{4\mu}\sum_{a,\beta} \vec k_a \vec k_\beta\, |s_a - s_\beta|\Big],$$

где учитывается, что

$$\left[\,r_i(s_1),\; r_j(s_2)\,\right] = \frac{i}{\mu}\,(s_1 - s_2)\,\delta_{ij}\,. \qquad /2.14/$$

Выражение /2.13/ может быть представлено в "нормальной" форме

$$T\Big[\prod_{a=1}^n e^{i\vec k_a \vec r(s_a)}\Big] = \exp\Big[i\vec r\sum_a \vec k_a + \frac{i}{2\mu}\sum_a \vec k_a^{\,2} s_a + \qquad /2.15/$$

$$+ \frac{i}{2\mu}\sum_{a,\beta} \vec k_a \vec k_\beta\, \Phi(s_a, s_\beta)\Big]\, \exp\Big(\frac{1}{\mu}\,\vec\nabla \sum_a \vec k_a s_a\Big),$$

где корреляционная функция $\Phi(s_\alpha, s_\beta)$ определена соотношением

$$\Phi(s_\alpha, s_\beta) = \begin{cases} \min(s_\alpha, s_\beta), & \alpha \neq \beta \\ 0, & \alpha = \beta \end{cases} . \qquad /2.16/$$

Формула /2.15/ позволяет, в принципе, найти вакуумное среднее функции Грина, исходя из выражения /2.1O/, по теории возмущений.

Методы континуального интегрирования позволяют найти замкнутое выражение для функции Грина, удобное для выхода за рамки теории возмущений.

Один из способов введения континуального интеграла в задачах подобного типа связан с линеаризацией оператора Лапласа в выражении для кинетической энергии частицы.

Ниже мы изложим альтернативный метод, связанный с представлением хронологических произведений операторов типа $A[r(s)]$, где $\vec{r}(s) = \vec{r} + \frac{i}{\mu}\int_0^s \vec{\nabla}\, d\eta$, в виде континуальных интегралов по путям частиц $\vec{x}(s)$ таких, что $\vec{x}(0) = \vec{r}$.

В основе этого метода лежит использование тождества

$$T\{\prod A_i[\vec{r}(s_i)]\}1 = c_\tau \int\limits_{\vec{x}(0)=\vec{r}} D\vec{x}(s)\, e^{-\frac{i\mu}{2}\int_0^\tau \dot{\vec{x}}^2 ds} \prod_i A_i[\vec{x}(s_i)], \qquad /2.17/$$

где $\tau \geq s_i \geq 0$, причем константа c_τ выбирается таким образом, что

$$c_\tau \int\limits_{\vec{x}(0)=\vec{r}} D\vec{x}\, e^{-\frac{i\mu}{2}\int_0^\tau \dot{\vec{x}}^2 ds} = 1. \qquad /2.18/$$

Вводя импульс частицы вдоль траектории $\vec{\nu}(s) = \mu\,\dot{\vec{x}}(s)$ и обозначая

$$[\delta\vec{\nu}]_0^\tau = c_\tau D\vec{x}(s)\, e^{-\frac{i}{2\mu}\int_0^\tau \vec{\nu}^2 ds}, \qquad /2.19/$$

приведем основное тождество /2.17/ к виду

$$T\{\prod_i A_i[\vec{r}(s_i)]\}1 = \int [\delta\vec{\nu}]_0^\tau \prod_i A_i[\vec{r} + \frac{1}{\mu}\int_0^{s_i}\vec{\nu}\, d\eta]. \qquad /2.2O/$$

Используем этот результат для исследования функции Грина в модели полярона в координатном представлении

$$\langle r'|G|r\rangle = -i\int_0^\infty d\tau\, e^{-i\tau(E-i0)}\langle r'_\tau|g_\tau|r\rangle, \qquad /2.21/$$

где

$$|r_\tau\rangle = e^{-i\tau H_0}|r\rangle, \qquad /2.22/$$

и оператор g_τ определен выражениями /2.1O/ и /2.11/.

Используя тождество /2.2O/, после ряда преобразований найдем

$$\langle r'_\tau|g_\tau|r\rangle = \exp[i\tau\sum_k(b_k^+b_k + \frac{1}{2})]\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}e^{i\vec{p}\vec{r}}T[e^{-i\vec{p}\vec{r}'(\tau)}\times$$
$$\times g_\tau]1 = \int[\delta\vec{\nu}]_0^\tau\,\delta(\vec{r}' - \vec{r} - \frac{1}{\mu}\int_0^\tau\vec{\nu}\, d\eta)\, g_\tau\Big|_{r_s \to \vec{r} + \frac{1}{\mu}\int_0^s \vec{\nu}\, d\eta}. \qquad /2.23/$$

Производя в /2.23/ замену функциональной переменной

$$\vec{\nu}(s) \to \vec{\nu}(s) + \vec{p}, \qquad /2.24/$$

где $\vec p$ - импульс, канонически сопряженный координате частицы, найдем окончательное выражение для функции Грина в координатном представлении в квазинормальной форме по операторам квантованного поля

$$\langle r'|G|r\rangle =$$
$$= \frac{-i}{(2\pi)^3}\int d\vec p\, e^{i\vec p(\vec r-\vec r')}\, i\int_0^\infty d\tau\, e^{-i\tau\left[E-\frac{1}{2\mu}\vec p^2-\sum_k\omega_k(b_k^+b_k+\frac{1}{2})-i0\right]}\times$$
$$\times\int[\delta\vec\nu]_0^\tau \exp\Big[ig\sum_k b_k^+ e^{-i\vec k\vec r}A_k^*\times$$
$$\times\int_0^\tau d\tau'\, e^{-i\int_0^{\tau'}d\tau''\left(\omega_k+\frac{\vec k\vec p+\vec k\vec\nu}{\mu}\right)}\Big]\exp\Big[-g^2\sum_k|A_k|^2\times$$
$$\times\int_0^\tau ds_1\, e^{-i\int_0^{s_1}ds_1'\left(\omega_k+\frac{\vec k\vec p+\vec k\vec\nu}{\mu}\right)}\int_0^{s_1}ds_2\, e^{i\int_0^{s_2}ds_2'\left(\omega_k+\frac{\vec k\vec p+\vec k\vec\nu}{\mu}\right)}$$
$$\times\exp\Big[ig\sum_k b_k e^{i\vec k\vec r}A_k\int_0^\tau d\tau'\, e^{i\int_0^{\tau'}d\tau''\left(\omega_k+\frac{\vec k\vec p+\vec k\vec\nu}{\mu}\right)}\Big]. \qquad /2.25/$$

Выражение /2.25/ может служить исходным пунктом при построении приближенных схем вычисления матричных элементов функции Грина по состояниям с определенными числами квантов поля: $\langle n', r'|G|n, r\rangle$. Производящей функцией этих величин могут служить средние функции Грина в когерентном базисе $|f_k\rangle$, где

$$b_k|f_k\rangle = f_k|f_k\rangle,$$

$$\langle f_k'|f_k\rangle = \exp\left[-\frac{1}{2}\left(|f_k'|^2+|f_k|^2-2f_kf_k'^*\right)\right]. \qquad /2.26/$$

Действительно,

$$\langle\{f_k'\},r'|G|\{f_k\},r\rangle = e^{-\frac{1}{2}\sum_k(|f_k'|^2+|f_k|^2)}\cdot\sum_{n_k m_k'}\cdot \qquad /2.27/$$
$$\cdot(n_k!\,m_{k'}!)^{-\frac{1}{2}}(f_k'^*)^{m_{k'}}(f_k)^{n_k}\langle m_{k'},r'|G|n_k,r\rangle.$$

Исходя из выражения /2.25/, нетрудно получить матричные элементы функции Грина в когерентном базисе

$$\frac{\langle\{f_k'\},r'|G|\{f_k\},r\rangle}{\langle\{f_k'\}|\{f_k\}\rangle} = -\frac{i}{(2\pi)^3}\int d\vec p\, e^{-i\vec p(\vec r-\vec r')}\, i\int_0^\infty d\tau\,\cdot$$
$$\cdot\, e^{-i\tau\left(E-\frac{1}{2\mu}\vec p^2-\frac{1}{2}\sum_k\omega_k-i0\right)}\exp\Big[\sum_k f_k f_k'^*(e^{i\tau\omega_k}-1)\Big]\cdot$$
$$\int[\delta\vec\nu]_0^\tau \exp\Big[ig\sum_k f_k'^* e^{-i\vec k\vec r}A_k^* e^{i\tau\omega_k}\int_0^\tau d\tau'\,\cdot$$
$$\cdot\, e^{-i\int_0^{\tau'}d\tau''\left(\omega_k+\frac{\vec k\vec p+\vec k\vec\nu}{\mu}\right)}\Big]\exp\Big[ig\sum_k f_k e^{i\vec k\vec r}A_k\,\cdot$$
$$\cdot\int_0^\tau d\tau'\, e^{i\int_0^{\tau'}d\tau''\left(\omega_k+\frac{\vec k\vec p+\vec k\vec\nu}{\mu}\right)}\Big]\exp\Big[-g^2\sum_k|A_k|^2\,\cdot$$
$$\cdot\int_0^\tau ds_1\, e^{-i\int_0^{s_1}ds_1'\left(\omega_k+\frac{\vec k\vec p+\vec k\vec\nu}{\mu}\right)}\int_0^{s_1}ds_2\, e^{i\int_0^{s_2}ds_2'\left(\omega_k+\frac{\vec k\vec p+\vec k\vec\nu}{\mu}\right)}\Big].$$

/2.28/

3. Рассмотрим задачу построения функции Грина в $\mathcal{P}$ -представлении, когда полный импульс системы

$$\vec{\mathcal{P}} = -i\vec\nabla_r + \sum_k \vec k\, b_k^+ b_k \qquad /3.1/$$

является c -числом. Напомним при этом, что в силу трансляционной симметрии оператор /3.1/ коммутирует с гамильтонианом, т.е. $[\vec{\mathcal{P}}, H] = 0$.

Используя каноническое преобразование Н.Н.Боголюбова /9/

$$b_k \to \zeta_k = e^{i\vec{k}\vec{r}}\, b_k ,$$

$$b_k^+ \to \zeta_k^+ = e^{-i\vec{k}\vec{r}}\, b_k^+ , \quad [\zeta_k , \zeta_{k'}^+] = \delta_{kk'} , \qquad /3.2/$$

$$-i\vec{\nabla}_r \to \vec{\mathcal{P}} - \sum_k \vec{k}\, \zeta_k^+ \zeta_k ,$$

приведем гамильтониан системы к виду

$$H \to \frac{1}{2\mu}\Big(\vec{\mathcal{P}} - \sum_k \vec{k}\, \zeta_k^+ \zeta_k\Big)^2 + \frac{1}{2}\sum_k \omega_k (\zeta_k^+ \zeta_k + \zeta_k \zeta_k^+) +$$

$$+ g \sum_k (A_k \zeta_k + A_k^* \zeta_k^+). \qquad /3.3/$$

Функция Грина системы в данном каноническом представлении может быть записана в форме /2.3/, где

$$G_\tau = e^{\frac{i\tau}{2} \sum_k \omega_k (\zeta_k^+ \zeta_k + \zeta_k \zeta_k^+)} \cdot g_\tau , \qquad /3.4/$$

$$g_\tau = T \exp \Big[\frac{i}{2\mu} \int_0^\tau ds \Big(\vec{\mathcal{P}} - \sum_k \vec{k}\, \zeta_k^+ \zeta_k\Big)^2 + ig \int_0^\tau ds \sum_k (A_k \zeta_k e^{is\omega_k} +$$

$$+ A_k^* \zeta_k^+ e^{-is\omega_k})\Big]. \qquad /3.5/$$

Используя континуальное представление первой экспоненты в /3.5/, найдем

$$g_\tau = \int [\delta^3 \vec{\nu}\,]_0^\tau \cdot e^{-\frac{i}{\mu}\int_0^\tau ds\, \vec{\nu}\, \vec{\mathcal{P}}}\; f_\tau(\nu), \qquad /3.6/$$

где функционал $f_\tau(\nu)$, определяемый T -экспонентой

$$f_\tau(\nu) = T \exp \Big[\frac{i}{\mu} \int_0^\tau ds\, \vec{\nu} \sum_k \vec{k}\, (\zeta_k^+ \zeta_k) + ig \sum_k \int_0^\tau ds\, (A_k \zeta_k e^{i\omega_k s} +$$

$$+ A_k^* \zeta_k^+ e^{-i\omega_k s})\Big], \qquad /3.7/$$

может быть приведен к виду

$$f_\tau(\nu) = e^{\frac{i}{\mu}\int_0^\tau ds\, \vec{\nu} \sum_k \vec{k}\, (\zeta_k^+ \zeta_k)}\; f_+ R f_- , \qquad /3.8/$$

где

$$f_+ = e^{ig \sum_k A_k^* \zeta_k^+ \int_0^\tau ds\, e^{-i \int_0^s d\eta\, (\omega_k + \frac{1}{\mu}\vec{k}\vec{\nu})}} , \qquad /3.9/$$

$$f_- = e^{ig \sum_k A_k \zeta_k \int_0^\tau ds\, e^{i \int_0^s d\eta\, (\omega_k + \frac{1}{\mu}\vec{k}\vec{\nu})}} , \qquad /3.10/$$

$$R = e^{-g^2 \sum_k |A_k|^2 \int_0^\tau ds_1\, e^{i \int_0^{s_1} d\eta\, (\omega_k + \frac{1}{\mu}\vec{k}\vec{\nu})} \int_0^{s_1} ds_2\, e^{-i \int_0^{s_2} d\eta\, (\omega_k + \frac{1}{\mu}\vec{k}\vec{\nu})}} . \qquad /3.11/$$

Ниже мы используем полученные выражения для вычисления вакуумного среднего функции Грина

$$\langle G \rangle_0 = -i \int_0^\infty d\tau\, e^{-i\tau(\mathcal{E} - i0)} \int [\delta^3 \vec{\nu}\,]_0^\tau\, e^{-\frac{i}{\mu}\int_0^\tau ds\, \vec{\nu}\,\vec{\mathcal{P}}}\, R, \qquad /3.12/$$

где $\mathcal{E} = E - \frac{1}{2}\sum_k \omega_k$.

Совершив замену фукциональной переменной

$$\vec{\nu}(\tau) \to \vec{\nu}(\tau) - \vec{\mathcal{P}}, \qquad /3.13/$$

получим

$$<G>_0 = -i\int_0^\infty d\tau\, e^{-i\tau(\mathcal{E}-\frac{1}{2\mu}\vec{\mathcal{P}}^2 - i0)} \int [\delta^3\vec{\nu}]_0^\tau \cdot$$

$$\cdot \exp[-g^2\sum_k |A_k|^2 \int_0^\tau ds_1 e^{i\int_0^{s_1} d\eta(\omega_k + \frac{\vec{k}\vec{\nu}-\vec{k}\vec{\mathcal{P}}}{\mu})} \cdot \qquad /3.14/$$

$$\cdot \int_0^{s_1} ds_2 e^{-i\int_0^{s_2} d\eta(\omega_k + \frac{\vec{k}\vec{\nu}-\vec{k}\vec{\mathcal{P}}}{\mu})}].$$

Рассмотрим теперь две простейшие функциональные аппроксимации, соответствующие низшему приближению в картине прямолинейных путей:

А. Положим под знаком функционального интеграла в /3.14/ $\vec{\nu} = 0$. Это приближение соответствует полному пренебрежению отдачей частицы во взаимодействии с полем. При этом находим

$$<G>_0 = -i\int_0^\infty d\tau\, e^{-i\tau(\mathcal{E}-\frac{1}{2\mu}\vec{\mathcal{P}}^2 - i0)} \cdot$$

$$\cdot \exp[g^2\sum_k \frac{1}{\tilde{\Omega}_k^2} |A_k|^2 (e^{i\tau\tilde{\Omega}_k} - i\tau\tilde{\Omega}_k - 1)] = \qquad /3.15/$$

$$= -\sum_{n_k} P_{\{n_k\}} (\mathcal{E} - \frac{1}{2\mu}\vec{\mathcal{P}}^2 + g^2\sum_k \frac{1}{\tilde{\Omega}_k}|A_k|^2 - \sum_k n_k\tilde{\Omega}_k - i0)^{-1}.$$

Здесь $\tilde{\Omega}_k = \omega_k - \frac{1}{\mu}\vec{k}\vec{\mathcal{P}}$; $P_{\{n_k\}}$ - пуассоновские вероятности

$$P_{\{n_k\}} = \prod_k e^{-\bar{n}_k}\frac{(\bar{n}_k)^{n_k}}{n_k!}, \quad \bar{n}_k = g^2\frac{|A_k|^2}{\tilde{\Omega}_k^2}, \qquad /3.16/$$

и сумма в /3.15/ распространяется по всем числам заполнения n_k .

Таким образом, функциональная аппроксимация А приводит к следующему выражению для энергетического спектра системы

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2\mu}\vec{\mathcal{P}}^2 - g^2\sum_k \frac{1}{\tilde{\Omega}_k}|A_k|^2 + \sum_k n_k\tilde{\Omega}_k , \qquad /3.17/$$

где n_k - положительные целые числа*.

В. Перенесем действие функционального усреднения на показатель экспоненты в /3.14/. Находим

$$<G>_0 = -i\int_0^\infty d\tau\, e^{-i\tau(\mathcal{E}-\frac{1}{2\mu}\vec{\mathcal{P}}^2 - i0)} \exp[-g^2\sum_k |A_k|^2 \cdot$$

$$\cdot \int_0^\tau ds_1 e^{is_1(\omega_k - \frac{1}{\mu}\vec{k}\vec{\mathcal{P}} + \frac{1}{2\mu}\vec{k}^2)} \int_0^{s_1} ds_2 e^{-is_2(\omega_k - \frac{1}{\mu}\vec{k}\vec{\mathcal{P}} + \frac{1}{2\mu}\vec{k}^2)}] \ .$$

/3.18/

Основные результаты приближения А сохраняются с заменой

$$\tilde{\Omega}_k \to \omega_k - \frac{1}{\mu}\vec{k}\vec{\mathcal{P}} + \frac{1}{2\mu}\vec{k}^2 = \Omega_k. \qquad /3.19/$$

В отличие от случая А, для которого член $\frac{1}{2\mu}\vec{k}^2$ в выражении для эффективной частоты /3.19/ отсутствует, случай В позволяет частично учесть отдачу частицы при взаимодействии с квантованным полем. Однако при этом эффекты корреляции двух актов взаимодействия с испусканием или поглощением квантов поля с импульсами k_i и k_j $(i \neq j)$ отсутствуют.

---

*Мы ограничиваемся здесь рассмотрением случая, когда $\inf_{\vec{k}}|\omega_k - \frac{1}{\mu}\vec{k}\vec{\mathcal{P}}| = a(\mathcal{P}) \neq 0.$

Эти эффекты можно последовательно учесть, вычисляя поправки к приближениям А и В аналогично тому, как это было предложено в работе [8] в релятивистском случае.

Чтобы оценить точность введенных выше функциональных аппроксимаций, рассмотрим первую поправку к энергетическому спектру системы, обусловленную эффектами корреляции во взаимодействии частицы с квантованным полем.

Учет вкладов корреляции может быть приближенно произведен согласно формуле так называемого "$\eta_i\,\eta_j$ -приближения" [8]

$$\int [\delta\vec{\nu}]_0^{\tau} e^{g\pi[\vec{\nu}]} \simeq \exp[\, g\bar{\pi} - \frac{i}{4}\frac{g^2\mu}{2}\int ds\,(\frac{\overline{\delta\pi}}{\delta\nu})^2 + \ldots], \qquad /3.20/$$

где первый член в правой части соответствует основному приближению В.

Полагая

$$\pi(\nu) = -g\sum_k |A_k|^2 \int_0^{\tau} ds_1\, e^{\, i\int_0^{s_1}(\omega_k + \frac{\vec{k}\vec{\nu} - \vec{k}\vec{\mathcal{P}}}{\mu})\,d\eta} \cdot \qquad /3.21/$$

$$\cdot \int_0^{s_1} ds_2\, e^{-i\int_0^{s_2}(\omega_k + \frac{\vec{k}\vec{\nu} - \vec{k}\vec{\mathcal{P}}}{\mu})\,d\eta},$$

найдем

$$(\frac{\overline{\delta\pi}}{\delta\nu}) = -\frac{ig}{\mu}\sum_k \vec{k}|A_k|^2 \frac{1}{\Omega_k^2}(e^{i\Omega_k\tau} - e^{i\Omega_k s})(e^{-i\Omega_k s} - 1), \qquad /3.22/$$

где $\Omega_k = \omega_k - \frac{\vec{k}\vec{\mathcal{P}}}{\mu} + \frac{\vec{k}^2}{2\mu}$, $\tau \geq s \geq 0$.

Отсюда следует

$$-\frac{ig^2\mu}{8}\int_0^{\tau} ds\,(\frac{\overline{\delta\pi}}{\delta\nu})^2 = \frac{i}{2\mu}(g^2\sum_k \vec{k}|A_k|^2\frac{1}{\Omega_k^2})^2\tau + \ldots, \qquad /3.23/$$

где явно выделен член, дающий вклад в энергию основного состояния системы

$$\delta E_0 = \frac{1}{2\mu}(g^2\sum_k \vec{k}|A_k|^2\frac{1}{\Omega_k^2})^2 = \frac{1}{2\mu}\eta^2\vec{\mathcal{P}}^2. \qquad /3.24/$$

Параметр η определяется соотношением

$$g^2\sum_k \vec{k}|A_k|^2\frac{1}{\Omega_k^2} = \eta\,\vec{\mathcal{P}} \qquad /3.25/$$

и, грубо говоря, соответствует доле полного импульса системы, переносимой квантованным полем. Это нетрудно показать, используя определение полного импульса поля $\vec{\pi} = \sum_k \vec{k}\, n_k$ и вспомнив, что в приближении В среднее число квантов $\bar{n}_k$ дается формулой $\bar{n}_k = g^2\frac{1}{\Omega_k^2}|A_k|^2$.

Очевидно, что условием применимости приближений А и В будет требование

$$\eta \ll 1.$$

Это условие накладывает ограничения на сходимость входящих в него сумм по $\vec{k}$, т.е. на свойства регулярности функции плотности источника $\rho(\vec{r})$, а также на величину константы связи частицы с полем (g).

4. Для иллюстрации рассмотрим модель полярона, т.е. модель, описывающую движение заряженной частицы, например, электрона, в ионном /полярном/ кристалле. Напомним, что наличие периодического поля ионной решетки учитывается по методу эффективной массы, т.е. $m_e \to \mu$, при этом

$$gA_k = -\frac{ie}{|\vec{k}|}(\frac{2\pi\omega_k c_k}{V})^{1/2}, \qquad /4.1/$$

где e - заряд частицы, V - объем системы, ω_k - частоты колебаний ионной решетки, c_k - некоторые безразмерные постоянные.

Вычислим прежде всего энергию "основного" состояния системы, имеющей полный импульс $\vec{\mathcal{P}}$

$$E_0 = \frac{1}{2\mu}\vec{\mathcal{P}}^2 - g^2 \sum_k \frac{1}{\omega_k + \frac{\vec{k}^2}{2\mu} - \frac{\vec{k}\vec{\mathcal{P}}}{\mu}} |A_k|^2. \qquad /4.2/$$

Ниже мы будем рассматривать в действительности простейший вариант модели полярона, в котором величины ω_k, c_k считаются не зависящими от $\vec{k}$, т.е. $\omega_k = \omega$, $c_k = c = \frac{1}{\epsilon_\infty} - \frac{1}{\epsilon}$.

Переходя к пределу бесконечно большого объема и заменяя суммирование в /4.2/ интегрированием согласно формуле

$$\frac{1}{V}\sum_k \ldots \to \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{k} \ldots, \qquad /4.3/$$

найдем

$$E_0 = \frac{1}{2\mu}\vec{\mathcal{P}}^2 - \frac{e^2 \mu\omega c}{2\pi^2}\int_0^1 dx \int \frac{d\vec{k}}{[\vec{k}^2 + 2\mu\omega(1-x) - \mathcal{P}^2(1-x)^2]^2}. \qquad /4.4/$$

Определим безразмерные параметры /в системе единиц, где $\hbar = 1$ /:

$$\theta^2 = \frac{\vec{\mathcal{P}}^2}{2\mu\omega}, \quad \lambda = ce^2\left(\frac{\mu}{2\omega}\right)^{1/2}, \qquad /4.5/$$

в терминах которых выражение /4.4/ для энергии "основного" состояния системы принимает вид

$$\frac{E_0}{\omega} = \theta^2 - \lambda f(\theta), \qquad /4.6/$$

где функция $f(\theta)$ определяется интегралом

$$f(\theta) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x)[1-\theta^2(1-x)]}} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-\theta^2 x)}} = \qquad /4.7/$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{\theta}\arcsin\theta, & \theta < 1, \\ \frac{1}{\theta}\left(\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{arch}\,\theta\right), & \theta > 1. \end{cases}$$

Отметим, что в области малых θ величина $f(\theta)$ является четной функцией θ и характеризуется разложением

$$f(\theta) = 1 + \frac{1}{6}\theta^2 + \ldots, \quad \theta \ll 1, \qquad /4.8/$$

а в области асимптотически больших θ имеет поведение

$$f(\theta) \sim \frac{1}{\theta}\left[\frac{\pi}{2} + i\ln(2\theta) + O\left(\frac{1}{\theta^2}\right)\right], \quad \theta \gg 1. \qquad /4.9/$$

Оставляя в разложении для величины E_0 по степеням малого параметра θ^2 первые два члена, мы найдем значения энергии покоя и эффективной массы состояния [11,12,18]

$$E_0 = \epsilon + \frac{1}{2\mu_{\text{эфф.}}}\vec{\mathcal{P}}^2 + \ldots, \quad \epsilon = -\lambda\omega, \quad \mu_{\text{эфф.}} = \mu\left(1 - \frac{1}{6}\lambda\right)^{-1}. \qquad /4.10/$$

В противоположном случае больших импульсов выражение для энергии системы принимает вид

$$\frac{E_0}{\omega} \sim \theta^2 - \frac{\lambda}{\theta}\left[\frac{\pi}{2} + i\ln(2\theta)\right] + O\left(\frac{1}{\theta^3}\right), \quad \theta \gg 1. \qquad /4.11/$$

Как видно из формул /4.7/ и /4.11/, при $\theta > 1$ состояние системы приобретает отличную от нуля ширину, т.е. конечное время жизни, причем отношение полуширины состояния к его энергии при больших значениях импульса имеет величину порядка

$$\frac{\Gamma}{E_0} \sim \frac{\lambda \ln(2\theta)}{\theta^3}, \quad \theta \gg 1. \qquad /4.12/$$

Вычислим теперь первую поправку к энергии "основного" состояния, найденную в предыдущем параграфе на основе приближения прямолинейных путей.

Исходя из формул /3.24/ и /3.25/, получим, что параметр η, определяющий долю полного импульса системы, переносимую квантовым полем, есть

$$\eta = \frac{\lambda}{2\theta} f'(\theta) = \begin{cases} \frac{\lambda}{6}, & \theta \simeq 0, \\ -\frac{i\lambda}{2\theta^3} \ln(2\theta), & \theta \gg 1, \end{cases} \qquad /4.13/$$

откуда для поправки к энергии "основного" состояния системы находим

$$\frac{\delta E_0}{\omega} = \eta^2\theta^2 = \begin{cases} \frac{\theta^2\lambda^2}{36}, & \theta^2 \ll 1, \\ -\frac{\lambda^2}{4\theta^4} \ln^2(2\theta), & \theta^2 \gg 1. \end{cases} \qquad /4.14/$$

Из найденных результатов следует, что условиями применимости приближения прямолинейных путей /аппроксимации А и В/ в рассматриваемой модели являются требования

$$\lambda \ll 1 \quad \text{для медленных частиц, т.е. } \theta \ll 1$$

$$/4.15/$$

$$\frac{\lambda \ln(2\theta)}{\theta^3} \ll 1 \quad \text{для быстрых частиц, т.е. } \theta \gg 1.$$

Первый из перечисленных здесь случаев, описывающий поляронное состояние, соответствует приближению слабой связи; второй, соответствующий быстро движущимся частицам, мы будем называть "умеренно сильной связью".

Изучение высших приближений к энергии "основного" состояния указывает на новый параметр разложения $k = \lambda\theta^2$, причем сумма главных членов дает

$$\frac{E_0}{\omega} = \theta^2 - \lambda \sum_{n=0} (\lambda\theta^2)^n f_n(\theta), \qquad /4.16/$$

где $f_n(\theta)$ регулярны при $\theta \sim 0$ и $f_n(0) = c_n \neq 0$.

При достаточно малых импульсах этот метод позволяет исследовать также и случай сильной связи в модели полярона

$$\lambda \gg 1, \quad \theta^2 = \frac{k}{\lambda} \ll 1. \qquad /4.17/$$

Подчеркнем, однако, что случай сильной связи требует более детального изучения свойств квантового движения частицы в эффективном поле, обусловленном существенной поляризацией вакуума вблизи частицы.

Авторы выражают глубокую признательность Н.Н.Боголюбову, М.К.Поливанову, А.Н.Тавхелидзе и А.Т.Филиппову за плодотворные обсуждения и ценные замечания.

Литература

1. *R.P.Feynman. Rev.Mod.Phys., 20, 376 (1947).*
2. *Н.Н.Боголюбов. ДАН СССР, 99, 225 /1954/.*
3. *Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. Введение в теорию квантованных полей, ГИТТЛ, Москва /1957/.*
4. *Е.С.Фрадкин. Труды ФИАН, 29, 7 /1965/.*
5. *Б.М.Барбашов. ЖЭТФ, 48, 607 /1965/.*
6. *B.M.Barbashov, S.P.Kuleshov, V.A.Matveev, V.N.Pervushin, A.N.Sissakian, A.N.Tavkhelidze. Phys.Lett., 33B, 484 (1970).*
7. *С.П.Кулешов, В.А.Матвеев, А.Н.Сисакян, М.А.Смондырев. ОИЯИ, Р2-6437, Дубна, 1972.*
8. *С.П.Кулешов, В.А.Матвеев, А.Н.Сисакян, М.А.Смондырев. ОИЯИ, Р2-6445, Дубна, 1972.*
9. *Н.Н.Боголюбов. Укр. мат. журн., 2, 3 /1950/, Избранные труды, 2, Киев /1970/.*
10. *С.И.Пекар. Исследования по электронной теории кристаллов, Москва /1951/.*

11. T.D.Lee, F.Low, D.Pines. Phys.Rev., 90, 297 (1953).
12. T.D.Lee, D.Pines. Phys.Rev., 92, 883 (1953).
13. H.Frohlich. Advans.Phys., 3, 325 (1954).
14. R.P.Feynman. Phys.Rev., 97, 660 (1955).
15. Е.П.Солодовникова, А.Н.Тавхелидзе, О.А.Хрусталев. ТМФ, 8, 256 /1971/.
16. E.P.Solodovnikova, A.N.Tavkhelidze, O.A.Khrustalev. JINR, E2-5976, Dubna, 1971.
17. Н.Е.Тюрин, А.В.Шургая. ИФВЭ, СТФ 72 – 15, Серпухов /1972/.
18. H.Frohlich, H.Pelzer, S.Zienau. Phil.Mag., 41, 221 (1950).

Рукопись поступила в издательский отдел
7 февраля 1973 года.