ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 6910

Л.Г.Заставенко

ТЕОРИЯ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ МОДЕЛИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СО СКАЛЯРНЫМ НЕЙТРАЛЬНЫМ МЕЗОННЫМ ПОЛЕМ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р2 - 6910

Л.Г.Заставенко

ТЕОРИЯ СИЛЬНОЙ СВЯЗИ ДЛЯ МОДЕЛИ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ, ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ СО СКАЛЯРНЫМ НЕЙТРАЛЬНЫМ МЕЗОННЫМ ПОЛЕМ

Направлено в ТМФ

§1. Введение

В этой работе мы будем рассматривать систему нерелятивистских частиц, взаимодействующих со скалярным нейтральным мезонным полем. Такая система описывается уравнением Шредингера

$$H\,\Omega = E\,\Omega\,, \qquad /1/$$

$$H = -\sum_{l=1}^{n}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} - g\int\frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(k,m)}}\left(a_k e^{i\vec{k}\vec{x}_l} + a_k^+ e^{-i\vec{k}\vec{x}_l}\right)\right] + \qquad /2/$$

$$+\int dk\,\omega(k,m)\,a^+_{\vec{k}}a_{\vec{k}}\,.$$

Здесь x_i, $i = 1,2,\dots,n$ - координаты i-ой частицы, a_k, a_k^+ - операторы поглощения и испускания, удовлетворяющие правилам коммутации

$$[a_{\vec{k}}, a^+_{\vec{k}'}] = \delta(\vec{k} - \vec{k}'), \qquad /3/$$

Ω в /1/ есть функция координат частиц x_l и мезонных чисел заполнения, $\omega(k,m) = \sqrt{k^2 + m^2}$, m - масса мезона.

1.1. Система /1/, /2/ с малым коэффициентом ϵ при последнем члене в /2/ была рассмотрена Н.Н.Боголюбовым /см./1/, стр. 499/. Им был дан метод подсчета собственных функций и собственных значений уравнений /1/ при малых значениях ϵ.

1.2. Е.П.Солодовникова, А.Н.Тавхелидзе и О.А.Хрусталев/2/ заметили, что метод Н.Н.Боголюбова пригоден для решения уравнения /1/, /2/ и в случае сильной связи /т.е. при $\epsilon = 1$ $g \to \infty$ /.

В работе /2/ для решения задачи сильной связи предлагается также вариационный метод, который позволяет выделить главный эффект взаимодействий, хотя, по мнению авторов, и не дает никаких указаний на возможность уточнения деталей взаимодействия.

1.3. По сравнению с работами /1,2/ мы, выбрав энергию взаимодействия в /2/ специальным образом, существенно уменьшили общность рассмотрения, исключив из него такие случаи, как, например, движение электрона в полярном кристалле или полупроводнике /1/. За счет этого удается продвинуть вычисления дальше, чем это сделано в /1,2/.

1.4. В настоящей работе мы будем пользоваться именно вариационным методом работы /2/. Мы покажем, что этот метод можно так усовершенствовать, что величины E, Q могут быть вычислены при его помощи с любой точностью по малому параметру g^{-1}. В случае одной частицы, $n=1$, состояние частицы определяется уравнениями /15/, /27/, /23/ и /24/, соответствующими взаимодействию частицы с собой же посредством потенциала Юкавы /18/. Поскольку в случае сильной связи частица располагается в малой области размера g^{-2} от юкавского потенциала притяжения остается лишь часть $-g^2/r$, масса мезона оказывается несущественной. Аналогичный метод, названный авторами "методом самосогласованного поля, или квазипотенциала", использовался в работе /9/, в которой изучалась модель тяжелой нерелятивистской частицы, взаимодействующей со скалярным квантованным полем.

1.5. В нашем рассмотрении является неудовлетворительным то обстоятельство, что волновая функция $\Omega(\vec{x}, n_k)$ /зависящая от координат частицы $\vec{x}$ и чисел заполнения n_k/ локализована в некоторой области изменения переменной $\vec{x}$ - в то время как частица может находиться с одинаковой вероятностью в любой точке пространства. Этот недостаток может быть устранен применением метода Н.Н.Боголюбова /1/. В остальном эти два метода дают, по-видимому, одинаковые результаты.

1.6. Мы распространим рассмотрение на случай нескольких взаимодействующих частиц ($n>1$). Параметром разложения /7/ в этом случае оказывается не g^{-1}, а $(gn)^{-1}$; состояние системы определяется уравнениями типа Хартри для частиц, взаимодействующих между собой посредством парных сил с потенциалом /18/.

Случаи частиц Бозе и Ферми рассматриваются отдельно /§3/. Для достаточно большого числа частиц n существуют связанные состояния системы n частиц /даже при малых значениях g /.

1.7 Аналогичное рассмотрение может быть проведено и при

зависимости гамильтониана от изотопического спина, когда член взаимодействия в /2/ имеет вид

$$H' = g \sum_{j=1}^{n} \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega(k,m)}} (\tau_{a j}\, e^{i\vec{k}\vec{x}_j}\, a_{\vec{k} a} + \text{к.с.}),$$

так что частицы образуют изотопический дуплет, а мезоны - триплет.

1.8. Оператор энергии /2/ коммутирует с оператором импульса

$$\vec{\mathcal{P}} = -i \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \vec{x}_j} + \int \vec{k}\, d^3 k\, a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} . \qquad /4/$$

В этой работе мы будем искать решение уравнения /1/, соответствующее наименьшему значению энергии при данном значении импульса. Такая задача, как известно, сводится к отысканию наименьшего собственного значения оператора

$$K = H - \vec{c}\Big(\sum_{j=1}^{n} \vec{p}_j + \int \vec{k}\, d^3 k\, a^+_{\vec{k}} a_{\vec{k}} \Big). \qquad /5/$$

Здесь c - некоторая константа, определяемая величиной импульса и имеющая смысл скорости частицы или системы частиц /2/,

$$\vec{p}_j = -i\, \partial / \partial \vec{x}_j . \qquad /6/$$

1.9. Гамильтониан /2/, как известно, выводится из соответствующего релятивистского гамильтониана

$$H_R = \sum_j \Big(-i\, a_j \nabla_j + \beta_j m + g \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega(k,m)}} \beta_j (a_k e^{ikx_j} + \text{к.с.})$$

$$+ \int dk\, \omega(k,m)\, a^+_k a_k$$

процедурой исключения малых компонент биспинора Дирака. Необходимо отметить, однако, что использование гамильтониана /2/ для решения задачи о связанных состояниях частиц при $g^2 \gg 1$ незаконно.

Действительно, согласно /12/, /12′/, существенной для /1/ областью изменения переменной k является $k \sim g^2 n$ /или $k \sim g^2 n^{1/3}$ для случая частиц Ферми/, в то время как аппроксимация /2/ для H_R годится, очевидно, лишь при $k^2 \ll 1$ /напомним, что у нас масса частицы равна 1/.

Для задачи многих частиц (n) полученные в §3 решения справедливы при $g n \gg 1$; поскольку при этом существенна область $k \sim g^2 n$ /или $k \sim g^2 n^{1/3}$ для частиц Ферми/, то при $1/g \ll n \ll 1/g^2$ /или $1/g \ll n \ll 1/g^6$ для частиц Ферми/ приближение /2/ к гамильтониану H_R является удовлетворительным.

Таким образом, гамильтониан H_R имеет связанные n-частичные состояния в указанных областях изменения параметров n и g. За этим исключением рассмотрение модели с гамильтонианом /2/ для задачи о связанных состояниях представляет лишь чисто методическую ценность, как рассмотрение модели, в которой удается построить приближение сильной связи. Именно по этой причине энергия системы многих частиц /§3/ оказывается пропорциональной не n, как это имеет место для ядер, а более высоким степеням n /14″/, /48/. Область, в которой формула /2/ дает хорошее приближение к H_R, является указанной выше областью малых g, в то время как реально существующие ядра определяются большим значением g /если забыть о том, что ядерное взаимодействие переносится псевдоскалярными, а не скалярными мезонами/.

1.10. В §4 рассмотрена возможность применения метода сильной связи к модели нерелятивистских частиц, взаимодействующих с псевдоскалярным мезонным полем. В этой модели параметром разложения типа /14/ оказывается не g^{-1}, а g /см. /14‴//.

К сожалению, функционал /55/ /минимизация которого дает уравнение типа /27/ для определения $\psi(x)$/ не ограничен снизу. Более того, удается показать /п. 4.3/, что гамильтониан /52/ не ограничен снизу. Отсюда следует, что вариант квантовой теории поля, определенный гамильтонианом /52/, не существует.

§2. Случай одной частицы

Положим в /2/ $n=1$. Решение сформулированной в пункте 1.8 задачи мы, подобно /2/, начнем с того, что возьмем в /2/, /5/

$$a_k = W_k + A_k.$$

Здесь W_k - некоторая числовая функция от k, $A_{\vec k}$ - операторы, удовлетворяющие правилам коммутации вида /3/. Тогда оператор K /5/ примет вид

$$K = K_0 + K_1 + K_2\,, \tag{7}$$

$$K_0 = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + g\int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega(k,m)}}\,(W_k e^{i\vec k\vec x} + \text{к.с.}) + \int d^3k\,(\omega(k,m) - ck)W_k^+ W_k\,, \tag{8}$$

$$K_1 = g\int \frac{d^3k A_{\vec k}}{\sqrt{2\omega(k,m)}}\Big[e^{i\vec k\vec x} + \frac{\omega(k,m) - \vec c\vec k}{g}\sqrt{2\omega(k,m)}W_k^+\Big] + \text{к.с.}, \tag{9}$$

$$K_2 = \int d^3k\,[\omega(k,m) - \vec c\vec k]\,A^+_{\vec k}A_{\vec k} - \vec c\vec p\,. \tag{10}$$

Положим

$$W_k = -\frac{g}{\sqrt{2\omega(k,m)}}\int \frac{\phi_0^2(s)e^{-i\vec k\vec s}\,ds}{\omega(k,m) - \vec c\vec k}\,; \tag{11}$$

где $\int\phi_0^2(s)\,ds = 1$; в остальном функцию $\phi_0(s)$ определим позднее. Сделаем в /8/-/11/ замену:

$$\vec x = \vec y/g^2\,,\quad \vec s = \vec t/g^2\,,\quad \vec k = \vec p\,g^2\,,$$
$$\phi_0(s) = g^3\psi_0(t)\,, \tag{12}$$
$$A_{\vec k} = b_{\vec p}/g^3.$$

Здесь

$$[b_{\vec p}, b^{+}_{\vec p\,'}] = \delta(\vec p - \vec p\,'),$$

тогда будет, очевидно,

$$w_k = u_p / g^2,$$

$$u(p) = -\frac{\int \psi_0^2(t)\, e^{-i\vec p\vec t}\, dt}{\sqrt{2\omega(p, \frac{m}{g^2})}\,(\omega(p, \frac{m}{g^2}) - \vec c\vec p)}, \qquad /13/$$

$$K = g^4 K_0'(\vec y, \frac{m}{g^2}, \psi_0(\cdot)) + g^3 K_1'(\vec y, \frac{m}{g^2}, \psi_0(\cdot)) + \qquad /14/$$

$$+ g^2 K_2'(\vec y, \frac{m}{g^2}),$$

где

$$K_0'(\vec y, \gamma, \psi(\cdot)) = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial \vec y^2} - \int d^3t\, K_c(\vec y - \vec t, \gamma)\psi^2(t)$$

$$+ \frac{1}{2}\int dt\, dr\, \psi^2(t)\psi^2(r) K_c(\vec t - \vec r, \gamma), \qquad /15/$$

$$K_1'(\vec y, \gamma, \psi(\cdot)) = \int \frac{d^3p\, b_{\vec p}}{\sqrt{2\omega(p,\gamma)}}\,(e^{i\vec p\vec y} -$$

$$- \int \psi^2(t)\, e^{i\vec p\vec t}\, dt) + \text{к.с.}, \qquad /16/$$

$$K_2'(\vec y, \gamma) = \int d^3p\, [\omega(p,\gamma) - \vec c\vec p]\, b^{+}_{\vec p} b_{\vec p} + i\vec c\frac{\partial}{\partial \vec y}, \qquad /17/$$

$$K_c(\vec y, \gamma) = \int \frac{d^2p\, e^{i\vec p\vec y}}{p^2 - (cp)^2 + \gamma^2}. \qquad /18/$$

2.1. Итак, параметром разложения /7/ является величина g^{-1}.

Рассмотрим теперь уравнение

$$K\Omega = Q\,\Omega. \qquad /19/$$

В соответствии с /14/ представим Ω в виде

$$\Omega = \Omega_0 + \frac{1}{g}\Omega_1 + \frac{1}{g^2}\Omega_2 + \cdots, \qquad /19''/$$

$$Q = g^4 Q_0 + g^3 Q_1 + g^2 Q_2 + \cdots. \qquad /19'''/$$

Из /19/ получим

$$(K_0' - Q_0)\Omega_0 = 0, \qquad /20/$$

$$(K_0' - Q_0)\Omega_1 + (K_1' - Q_1)\Omega_0 = 0, \qquad /21/$$

$$(K_0' - Q_0)\Omega_2 + (K_1' - Q_1)\Omega_1 + (K_2' - Q_2)\Omega_0 = 0. \qquad /22/$$

Оператор K_0' не зависит от мезонных чисел заполнения, поэтому Ω_0 представляется в виде

$$\Omega_0(\vec y, n_k) = f_0(\vec y)\,\theta_0(n_k), \qquad /23/$$

причем уравнение /20/ определяет лишь функцию f_0:

$$[K_0'(\vec y, m/g^2, \psi_0(\cdot)) - Q_0]\, f_0(\vec y) = 0. \qquad /24/$$

Далее, рассмотрим уравнение /21/. Умножим его на $f_0(\vec y)$ и проинтегрируем по y. Ввиду /24/ получим

$$\int f_0(\vec y) K_1'(\vec y, m/g^2, \psi_0(\cdot)) f_0(\vec y)\, d^3y\, \theta_0(n_k) = Q_1\, \theta_0(n_k). \qquad /25/$$

Выберем оставленную ранее не определенной функцию ψ_0:

$$\psi_0(\vec{y}) = f_0(\vec{y}), \qquad \int \psi_0^2(\vec{y})\, d^3 y = 1. \qquad /26/$$

Тогда ввиду /16/ в равенстве /25/ левая часть обратится в нуль; отсюда следует, что $Q_1 = 0$ и для определения ψ_0 получается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение

$$[K_0'(\vec{y}, \gamma, \psi_0(\cdot)) - Q_0]\, \psi_0(\vec{y}) = 0, \quad \gamma = m/g^2 . \qquad /27/$$

Введем обозначения, которые понадобятся нам в дальнейшем: мы обозначим $\psi_0(\vec{y}, \gamma)$ и $\lambda_c(\gamma)$ - решение и собственное значение уравнения /27/.

Используя введенное обозначение, можно переписать, очевидно, /14/ в виде

$$K = g^4 K_0'(\vec{y}, \frac{m}{g^2}, \psi_0(\cdot, \frac{m}{g^2})) + g^3 K_1'(\vec{y}, \frac{m}{g^2}, \psi_0(\cdot, \frac{m}{g^2})) + g^2 K_2'(\vec{y}, \frac{m}{g^2}). \qquad /14'/$$

Перейдем, далее, к уравнению /22/. Умножим это уравнение на $\psi_0(\vec{y}, \frac{m}{g^2})$ и проинтегрируем по $\vec{y}$. Тогда первый член в /22/ обратится в нуль; во второй подставим выражение для Ω_1 через Ω_0, полученное из /21/; таким образом, из /22/ получим уравнение для определения функции θ_0 в /23/ /ср. уравнение /40/ в /1/ /.

2.2. Продолжение такой процедуры позволяет найти Ω и Q с любой точностью по g^{-1}. Итак, предложенный в /2/ "вариационный метод" дает возможность определить состояние системы во всех порядках теории возмущений по параметру g^{-1}.

2.3. Если выбрать ψ_0 иначе, чем /26/, представление /14/ сохранится, однако θ_0 определится из /21/, /25/ как ненормируемая функция /ср. /1/, уравнения /26/, /27//. Таким образом, выбор /26/ есть условие нормируемости функции θ_0.

§3. *Случай нескольких частиц*

Положим в /2/ $n > 1$. Формулы §2 легко обобщаются на этот случай; в частности, вместо /12/, /13/ будем иметь

$$w_k = - \frac{\int \psi_0^2(\vec{t})\, d^{3n}t \sum_{j=1}^{n} e^{-i\vec{p}\vec{t}_j}}{g^2 \sqrt{2\omega(p, \frac{m}{g^2})}\, [\omega(p, \frac{m}{g^2}) - \vec{c}\vec{p}]} . \qquad /29/$$

Здесь

$$\psi_0(\vec{t}) \equiv \psi_0(\vec{t}_1, \vec{t}_2, \dots \vec{t}_n), \quad d^{3n}t = \prod_{j=1}^{n} d^3 t, \quad \vec{p} = \vec{k}/g^2 , \qquad /30/$$

функция $\psi_0(\vec{t})$ будет определена потом. Вместо /14/ получим

$$K = g^4\, {}_nK_0' + g^3\, {}_nK_1' + g^2\, {}_nK_2' . \qquad /31/$$

Здесь величина ${}_nK_0'$ определена формулой

$${}_nK_0' = -\frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial^2}{\partial \vec{y}_j^2} - n \sum_j \int d^3 t\, K_c(\vec{y}_j - \vec{t}, \frac{m}{g^2})\, \rho(\vec{t}) + \frac{1}{2} n^2 \int d^3 t\, d^3 r\, \rho(\vec{t})\, \rho(\vec{r})\, K_c(\vec{t} - \vec{r}, \frac{m}{g^2}) , \qquad /32/$$

где

$$\rho(\vec{t}) = \int \psi_0^2(\vec{t}_1, \dots \vec{t}_{n-1}, \vec{t})\, d^3 t_1 \dots d^3 t_{n-1} . \qquad /33/$$

При выводе /32/ предполагается, что функция $\rho(\vec{t})$ есть четная функция своего аргумента.

Далее выпишем выражение для ${}_nK_1'$:

$$ {}_nK_1' = \int \frac{d^3p\, b_{\vec{p}}}{\sqrt{2\omega(p, \frac{m}{g^2})}} \left(\sum_j e^{i\vec{p}\vec{y}_j} - n\int \rho(t) e^{i\vec{p}\vec{t}} d^3t \right) + \text{к.с.}, \qquad /34/ $$

наконец,

$$ {}_nK_2' = \int d^3p\, [\omega(p, \frac{m}{g^2}) - \vec{c}\,\vec{p}]\, b^+_{\vec{p}} b_{\vec{p}} + i\vec{c} \sum_j \frac{\partial}{\partial \vec{y}_j}. \qquad /35/ $$

Перейдем к уравнению /19/. Подставим в него K, Ω, Q в виде /31/, /19'/, /19''/. Как и в пункте 2.1, независимость ${}_nK_0'$ от чисел заполнения приводит к разделению переменных в функции Ω_0. Отсюда и из условия нормируемости функции θ_0 /которое эквивалентно условию обращения в нуль левой части равенства /25// приходим к равенству вида /26/, определяющему функцию $\psi_0(\vec{t})$ в /29/. Левая часть уравнения /24/ на этот раз представляется в виде суммы членов, каждый из которых зависит лишь от одной из переменных y_j, поэтому уравнение /24/ допускает решение в виде

$$ \psi_0(\vec{y}) = \prod_{j=1}^{n} \psi_{0j}(\vec{y}_j). \qquad /36/ $$

Далее мы будем отдельно рассматривать случай, когда частицы подчиняются статистике Бозе и Ферми.

3.1. Сначала мы рассмотрим случай статистики Бозе. В этом случае все функции $\psi_{0j}(\vec{y})$ в /36/ следует считать одинаковыми:

$$ \psi_{0j}(\vec{y}) = \Phi(\vec{y}), \quad \rho(\vec{y}) = \Phi^2(\vec{y}). $$

Заменой переменных

$$ \vec{y} = \vec{z}/n, \quad \vec{p} = \vec{q}\,n, \quad \Phi(\vec{y}) = \psi_0(\vec{z}, \frac{m}{ng^2})\, n^{3/2}, $$
$$ b_p = n^{-3/2} e_q, \qquad /12'/ $$

приведем K к виду

$$ {}_nK = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \{ g^4 n^3 K_0'(\vec{z}_j, \frac{m}{g^2 n}, \psi_0(\cdot, \frac{m}{g^2 n})) + g^3 n^2 K_1'(\vec{z}_j, \frac{m}{g^2 n}, \psi_0(\cdot, \frac{m}{g^2 n})) + g^2 n K_2'(\vec{z}_j, \frac{m}{g^2 n}) \}. \qquad /14''/ $$

Здесь $\psi_0(\vec{z}, \frac{m}{g^2 n})$ есть функция, определенная уравнением /27/ с $\gamma = m/(g^2 n)$; операторы K_1', K_2' отличаются от /16/, /17/ заменой $b_{\vec{p}} \to e_{\vec{p}}$. Параметром разложения /14/ является, очевидно, $(gn)^{-1}$.

3.2. Таким образом, рассматриваемый случай сильной связи может реализоваться даже тогда, когда константа связи g мала, но зато число частиц достаточно велико. Частицы при этом "склеиваются" и возникает их связанное состояние. При нулевом импульсе $(\vec{c} = 0)$ и $n \to \infty$ это связанное состояние неожиданным образом оказывается тождественным с рассмотренным в работах [3,4,5].

3.3. Перейдем теперь к случаю частиц, подчиняющихся статистике Ферми. Здесь мы ограничимся аргументацией /далеко не полной/ в пользу того, что параметром разложения /19''/ является в этом случае /как и в случае частиц Бозе/ величина $(gn)^{-1}$. В случае частиц Ферми все функции $\psi_{0j}(\vec{y})$ в /36/ следует считать разными и взаимно ортогональными, а в качестве $\psi_0(\vec{t})$ в /30/ следует взять слэтеровский детерминант, составленный из функций $\psi_{0j}(\vec{t}_j)$, $j = 1, 2, \ldots n$. Тогда

$$ n\rho(\vec{t}) = 2 \sum_{j=1}^{n} |\psi_{0j}(\vec{t})|^2 \qquad /37/ $$

/здесь двойка соответствует учету спиновой степени свободы/

и для определения функций $\psi_{0j}(\vec{y})$ получается система уравнений типа Хартри с потенциалом /18/:

$$[-\frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial\vec{y}^{\,2}} - n\int K_c(\vec{y}-\vec{t},\frac{m}{g^2})\rho(\vec{t})d^3t - \lambda_j\,]\psi_{0j}(\vec{y}) = 0. \qquad /38/$$

Примем

$$\phi(\vec{y}) = n\int K_c(\vec{y}-\vec{t},\ \frac{m}{g^2})\,\rho(\vec{t})\,d^3t. \qquad /39/$$

При $n \gg 1$ к системе уравнений /37/, /38/, /39/ может быть применен метод Томаса-Ферми /6,7/, который позволяет получить связь

$$4\pi n\rho(\vec{y}) = \begin{cases}[\dfrac{\phi(\vec{y})-\phi_0}{b}]^{3/2} & \text{при}\quad \phi(\vec{y}) > \phi_0,\\ 0 & \text{при}\quad \phi(\vec{y}) < \phi_0\end{cases} \qquad /4O/$$

величин ρ и ϕ; здесь $b = [3\pi/(8\sqrt{2})]^{3/2}$. Из /18/ /39/ очевидно следует

$$[-\Delta + (c\nabla)^2 + \frac{m^2}{g^4}\,]\phi(\vec{y}) = (2\pi)^3\,n\rho(\vec{y}). \qquad /41/$$

Далее заменами

$$\phi(\vec{y}) = n^{4/3}\eta(\vec{z})/b, \qquad /42/$$

$$\rho(\vec{y}) = \tilde{\rho}(\vec{z})\,n/b^3, \quad \psi_{0j}(\vec{y}) = \tilde{\psi}_j(\vec{z})\sqrt{n/b^3}, \qquad /43/$$

$$\vec{y} = \vec{z}\,b/n^{1/3} \qquad /44/$$

сведем /4O/, /41/ к виду, не содержащему большого параметра n /при этом мы пренебрегаем членом $[m/(g^2n^{1/3})]^2$, возникающим в левой части уравнения /41//.

3.4. Подставив в /32/-/35/ /42/-/44/, а также

$$\vec{p} = \vec{q}n^{1/3}b, \qquad b_{\vec{p}} = e_{\vec{q}}[n^{1/3}/b]^{-3/2},$$

где

$$[e_{\vec{q}}, e^+_{\vec{q}\,'}] = \delta(\vec{q}-\vec{q}\,'),$$

получим

$$_nK_0' = -\frac{n^{2/3}}{2b^2}\sum_j \frac{\partial^2}{\partial\vec{z}_j^{\,2}}$$

$$+\frac{n^{7/3}}{b}\{-\frac{1}{n}\sum_j\int d^3\sigma\tilde{\rho}(\vec{\sigma})K_c(\vec{z}_j-\vec{\sigma},\frac{mb}{g^2n^{1/3}}) \qquad /45/$$

$$+\frac{n^{7/3}}{2b}\int d^3\sigma\, d^3a\,\tilde{\rho}(\vec{\sigma})\tilde{\rho}(\vec{a})K_c(\vec{\sigma}-\vec{a},\frac{mb}{g^2n^{1/3}})\},$$

$$_nK_1' = +\frac{n^{4/3}}{b}\int\frac{d^3q\,e_{\vec{q}}}{\sqrt{2\omega(q,\frac{mb}{g^2n^{1/3}})}}\{\frac{1}{n}\sum_j e^{i\vec{q}\vec{z}_j} - \qquad /46/$$

$$-\int\tilde{\rho}(\sigma)e^{i\vec{q}\vec{\sigma}}d^3\sigma\} + k.c.,$$

$$_nK_2' = \frac{n^{1/3}}{b}\int d^3q[\omega(q,\frac{mb}{g^2n^{1/3}}) - \vec{c}\vec{q}]\,e^+_{\vec{q}}e_{\vec{q}}$$

$$+\frac{n^{4/3}}{b}\{\frac{i}{n}\sum_j\vec{c}\frac{\partial}{\partial\vec{z}_j}\}. \qquad /47/$$

3.5. Покажем, что величины Q_j в /19"/ при $n\to\infty$ ведут себя, как

$$Q_0 = const\cdot n^{7/3} + \dots, \qquad /48/$$

$$Q_2 = const\cdot n^{1/3} + \dots \qquad /49/$$

/здесь мы опустили величину Q_1, тождественно равную нулю, что следует из условия нормируемости функции θ_0 /. Ввиду /43/, /45/, /20/ имеем

$$Q_0 = \frac{n^{2/3}}{2b^2} \sum_j \int \left(\frac{\partial \tilde{\psi}_j(\vec{z})}{\partial \vec{z}} \right)^2 d^3 z$$

$$- \frac{n^{7/3}}{2b} \int d^3\sigma\, d^3 a\, \tilde{\rho}(\vec{\sigma}) \tilde{\rho}(\vec{a}) K_c \left(\vec{\sigma}-\vec{a}, \frac{m b}{g^2 n^{1/3}}\right). \qquad /50/$$

В пределе $n \to \infty$ ядро $K_c\left(\vec{x}, \frac{m b}{g^2 n^{1/3}}\right)$ становится однородной функцией координат степени -1. Для системы с такими парными силами имеет место теорема вариала, согласно которой кинетическая энергия /первый член в правой части /50// равна минус половине потенциальной /второй член там же/.

Таким образом, первый член в /50/, как и второй, есть величина $\sim n^{7/3}$. Этим оценка /48/ доказана.

Перейдем к оценке /49/. Согласно /20/, /22/ находим

$$Q_2 = (\Omega_0, {}_nK_2' \, \Omega_0) + (\Omega_0, {}_nK_1' \, \Omega_1). \qquad /51/$$

Так как функции $\psi_{0j}(y)$ в /36/ можно взять вещественными и

$$\int d^3 y\, \psi_{0j}(\vec{y}) \frac{\partial}{\partial \vec{y}} \psi_{0j}(\vec{y}) = 0,$$

то последний член в /47/ не дает вклада в Q_2.

Далее, из /21/, /45/, /46/ естественно ожидать

$$\Omega_1 = - \frac{1}{{}_nK_0' - Q_0} \, {}_nK_1' \, \Omega_0 \sim \frac{const}{n}.$$

Вместе с /46/ это дает оценку $O(n^{1/3})$ для второго члена /51/. Этим мы заканчиваем свою аргументацию в пользу оценки /49/ и высказанного в начале пункта 3.3 утверждения о том, что параметром разложения /19''/ является величина $(gn)^{-1}$.

§4. *Метод сильной связи и взаимодействие частицы с псевдоскалярным мезонным полем*

В этом параграфе мы будем рассматривать систему, определенную гамильтонианом

$$H = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} - g \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega(km)}} \, i \sigma k (a_k e^{ikx} - \text{к. с}). \qquad /52/$$

$$+ \int dk \omega(km) a_k^+ a_k$$

в случае сильной связи.

В /52/ σ - матрицы Паули, действующие на спиновые индексы частицы, x - координаты частицы /мы ограничимся случаем одной неподвижной частицы $c = 0$, $n = 1$ /.

Гамильтониан /52/, как известно, может быть формально выведен из гамильтониана

$$H_R' = -i a + \beta m + g \int \frac{d^3 k}{\sqrt{2\omega(k,m)}} i \beta \gamma_5 (a_k e^{ikx} + \text{к.с.})$$

$$+ \int d k\, \omega(k,m) a_k^+ a_k,$$

описывающего взаимодействие частицы со спином 1/2 с псевдоскалярным мезонным полем, при помощи процедуры исключения малых компонент биспинора Дирака.

4.1. Как в §2, выделим из операторов мезонного поля неоператорную компоненту

$$a_k = W_k + A_k .$$

Вместо /11/ положим

$$W_k = -i g \frac{\omega(k,m)^{3/2}}{\sqrt{2}} \int \phi_0^*(s) \sigma k e^{-iks} \phi_0(s) d^3 s \quad ;$$

сделав еще замены:

$$x = y g^2, \quad s = t g^2, \quad k = p / g^2,$$

$$A_k = b_p g^3, \quad \phi_0(s) = \psi_0(t) / g^3,$$

приведем H к виду

$$H = \frac{1}{g^4} H_0 + \frac{1}{g^3} H_1 + \frac{1}{g^2} H_2 , \qquad /14''/$$

где

$$H_0(y, mg^2, \psi_0(\cdot)) = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \sigma_\alpha \int K_{\alpha\beta}(y - y', g^2 m),$$

$$\kappa_\beta(y') dy' + \frac{1}{2} \int K_{\alpha\beta}(y' - y'', g^2 m) \kappa_\alpha(y') \kappa_\beta(y'') dy' dy'',$$

$$H_1 = \int \frac{b_p d^3 p}{\sqrt{2\omega(p, mg^2)}} \left(\sigma p e^{ipx} - \int p_\alpha \kappa_\alpha(y') e^{ipy'} dy'\right) + \text{к.с.}$$

$$H_2 = \int \omega(p, mg^2) b_p^+ b_p d^3 p .$$

Здесь

$$\kappa_\alpha(y) = \psi_0^*(y) \sigma_\alpha \psi_0(y),$$

$$K_{\alpha\beta}(y, mg^2) = \int \frac{d^3 p\, p_\alpha p_\beta}{p^2 + (mg^2)^2} e^{ipy} . \qquad /53/$$

Для определения функции $\psi(y)$ получаем подобно /27/ уравнение

$$[H_0(y, mg^2, \psi_0(\cdot)) - E_0] \psi_0(y) = 0. \qquad /54/$$

Это уравнение, очевидно, получается минимизацией функционала

$$\bar{H}_0 = \frac{1}{2} \int \frac{\partial \psi_0^*(y)}{\partial y_\alpha} \frac{\partial \psi_0(y)}{\partial y_\alpha} dy - \frac{1}{2} \int K_0(y' - y'', mg^2) \rho(y') \rho(y'') \times d^3 y' d^3 y'' \qquad /55/$$

при дополнительном условии

$$\int \psi_0^*(y) \psi_0(y) d^3 y = 1,$$

где K_0- ядро, определенное формулой /18/,

$$\rho(y) = \frac{\partial \kappa_\alpha(y)}{\partial y_\alpha} . \qquad /56/$$

4.2. Покажем, что функционал /55/ не ограничен снизу. Для этого подставим в /55/, /53/, /56/

$$\psi_0(y) = f_0(\lambda y) \lambda^{3/2}, \quad \lambda > 0.$$

Здесь $f_0(z)$ - некоторая функция, нормированная на единицу. Тогда для /55/ получаем

$$\bar{H} = \lambda^2 A - \lambda^3 B.$$

Здесь A и B - положительные функционалы, зависящие от функции $f_0(z)$, но не зависящие от λ.

Полученное выражение очевидно доказывает неограниченность функционала /55/ снизу:

$$H_0(\lambda) \to -\infty \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty .$$

4.3. Рассматривая математическое ожидание гамильтониана /14‴/ на функции $\Omega = \psi_0(y)\,\Omega_0(\hat{n})$, где $\Omega_0(\hat{n})$ - функционал основного состояния гамильтониана H_2, получаем, очевидно выражение /55/. Таким образом, соображения пункта 4.2 доказывают неограниченность снизу всего гамильтониана /52/.

В заключение выражаю благодарность О.А.Хрусталеву и Л.Д.Соловьеву за ценные замечания.

Литература

1. *Н.Н.Боголюбов. Избранные труды, том II, Наукова думка, 1970.*
2. *Е.П.Солодовникова, А.Н.Тавхелидзе, О.А.Хрусталев. ТМФ, 10, 162 /1972/.*
3. *Л.Г.Заставенко. Препринт ОИЯИ, Р2-5934, Дубна, 1971.*
4. *И.В.Сименог. Препринт ИТФ-72-31-Р, Киев, 1972.*
5. *R.Ruffini, S.Bonazzola. Ph.Rev., 187, 1767 (1969).*
6. *П.Гамбош. Статистическая теория атома и ее применения. ИЛ, Москва, 1951.*
7. *E.Fermi. Zs.f.Physics, 48, 73 (1928).*
8. *Л.Г.Заставенко. Препринт ОИЯИ, Р2-6270, Дубна, 1972.*

Рукопись поступила в издательский отдел
23 января 1973 года.

Примечание при корректуре

В тексте работы содержится существенная ошибка. Для уравнения /27/ есть, по-видимому, такое граничное значение γ_0, что это уравнение при $\gamma<\gamma_0$ имеет нормируемое решение, а при $\gamma \geq \gamma_0$ не имеет его. Таким образом, условиями применимости разложения /14″/ являются

$$gn \gg 1, \qquad (\alpha)$$

$$\frac{m}{g^2 n} < \gamma_0 . \qquad (\beta)$$

Согласно /12/, /12′/, /27/ существенные значения k лежат в области

$$k \lessapprox ng^2 \max(1,\gamma). \qquad (\gamma)$$

Между тем гамильтониан /2/ применим только при

$$k < 1 \qquad (\delta)$$

(нерелятивистское приближение).

Неравенства (α), (β), (γ), (δ) совместимы только в том случае, если

$$\frac{m}{\gamma_0} \ll 1$$

и

$$\sqrt{\frac{m}{\gamma_0 n}} \ll g \ll \frac{1}{\sqrt{n}};$$

при $(m/\gamma_0) \gtrsim 1$ собственные функции гамильтониана /2/, построенные по методу сильной связи, не имеют отношения к исходному гамильтониану H_R.

Чтобы убедиться в существовании положительного граничного значения γ_0, достаточно рассмотреть вариационный функционал, соответствующий уравнению /27/:

$$\epsilon = \frac{1}{2}\int (\nabla\psi(x))^2 dx - \frac{1}{2}\int \psi^2(x)\psi^2(y)\,dx\,dy\;\frac{e^{-\gamma|x-y|}}{|x-y|} .$$

Подставим сюда

$$\psi(y) = \phi(az)\, a^{3/2}$$

так, что

$$\int \psi^2(y)\, d^3y = \int \phi^2(z)\, d^3z = 1.$$

Тогда ϵ принимает вид

$$\epsilon = \frac{a^2}{2} \int (\nabla \phi(z))^2 d^3z - \frac{a}{2} \int \phi^2(z) \phi^2(s) \frac{e^{-\frac{\gamma}{a}|z-s|}}{|z-s|} d^3z\, d^3s.$$

Пусть теперь число γ очень велико: $\gamma >> 1$. При $a < \gamma$ функционал ϵ может быть представлен рядом по степеням a/γ:

$$\epsilon(a) = \frac{a^2}{2} \int (\nabla \phi)^2 d^3z - \frac{a^3}{2\gamma^2} \int \phi^4(z)\, d^3z \int \frac{e^{-|s|}}{|s|} d^3s + \ldots$$

В области $a < \gamma$ второй член этого выражения по абсолютной величине много меньше первого, поэтому уравнение $d\epsilon(a)/da = 0$ решения в этой области не имеет. Далее, в дополнительной области $a > \gamma$ второй член в $\epsilon(a)$, очевидно, меньше, чем

$$\frac{a}{2} \int \phi^2(z) \phi^2(s)\, d^3z\, d^3s / |z-s|$$

/мы воспользовались неравенством

$$e^{-\gamma |z-s|/a} < 1/;$$

значит, и в этой области второй член много меньше первого, так что уравнение $d\epsilon(a)/da = 0$ и в этой области решения не имеет. Отсюда следует отсутствие решения уравнения /27/ для достаточно больших значений γ. Аналогичная ситуация имеет место, по-видимому, и в случае частиц Ферми.