ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

ДУБНА

Р2 - 6888

В.А. Алебастров, Г.В. Ефимов

УНИТАРНОСТЬ ПЕРЕНОРМИРОВАННОЙ S-МАТРИЦЫ В НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1973

ЛАБОРАТОРИЯ
ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Р2 - 6888

В.А. Алебастров, Г.В. Ефимов

УНИТАРНОСТЬ ПЕРЕНОРМИРОВАННОЙ S-МАТРИЦЫ В НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в Communications in Mathematical Physics

I. Введение

В работе[I] было дано доказательство унитарности S-матрицы в нелокальной квантовой теории однокомпонентного скалярного поля $\varphi(x)$ для случая, когда функция включения взаимодействия $g(x)$ отлична от константы и достаточно быстро убывает при $|x| \to \infty$. Физическая S-матрица описывает взаимодействие, включённое всюду, т.е. при $g(x) = g = Const$.

Однако в матрице рассеяния $S[g]$, которая была получена в[I], нельзя положить $g(x) = g = Const$, поскольку при таком переходе возникают расходимости при больших x. Эти расходимости связаны:

I) с амплитудой перехода вакуум-вакуум, которая имеет вид

$$\langle 0 | S[g] | 0 \rangle = exp\{ i\, \Phi[g] \},$$

причём при $g(x) \to g$

$$\Phi[g] \longrightarrow \int d^4x \cdot \delta E = \infty ,$$

где δE - поправка к энергии вакуума за счёт так называемых вакуумных петель, и

2) с расходимостями, связанными с перенормировкой массы δm^2 и волновой функции Z_2 скалярной частицы. В ряду теории возмущений эти расходимости возникают при переходе на массовую поверхность в диаграммах Фейнмана, имеющих собственно энергетические добавки во внешние линии скалярных частиц, как показано на рис. I.

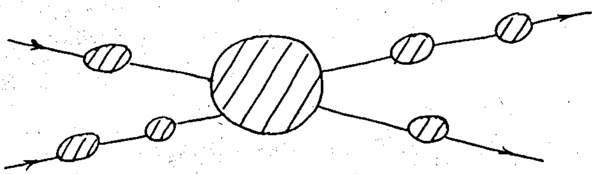

Рис. I.

Обычный путь (см., например[2]) устранения этих расходимостей состоит в проведении необходимого числа перенормировок.

В настоящей работе мы проведём все необходимые перенормировки в S-матрице таким образом, чтобы существовала перенормированная S-матрица для $g(x)=g=Const$, и покажем, что перенормированная S-матрица унитарна. Данная работа является продолжением работы[I], поэтому многие обозначения и определения будут использоваться ниже без подробных объяснений.

2. Схема доказательства унитарности S-матрицы

Прежде чем переходить к процедуре перенормировки S-матрицы, вкратце повторим основные этапы доказательства унитарности S-матрицы, изложенные в[I].

Рассматривается ряд теории возмущений для S-матрицы

$$S[g]=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\int dx_1\ldots\int dx_n\, g(x_1)\ldots g(x_n)\, S_n(x_1,\ldots,x_n). \tag{2.I}$$

Здесь $g(x)$- функция включения взаимодействия, такая, что

$$0<\int d^4x\, g(x)<\infty. \tag{2.2}$$

Операторнозначные коэффициентные функции $S_n(x_1,\ldots,x_n)$ могут быть представлены в виде

$$S_n(x_1,\ldots,x_n)=\int d\sigma(\xi_1)\ldots\int d\sigma(\xi_n):\exp\{i(\xi_1\varphi(x_1)+\ldots+\xi_n\varphi(x_n))\}:\times \tag{2.3}$$

$$\times\sum_{\{k_\nu j_{k_\nu}\}} F_{k_1 j_{k_1}}(x_1\xi_1,\ldots,x_{k_1}\xi_{k_1})F_{k_2 j_{k_2}}(x_{k_1+1}\xi_{k_1+1},\ldots,x_{k_1+k_2}\xi_{k_1+k_2})\times\ldots$$

$$\ldots\times F_{k_\nu j_{k_\nu}}(x_{n-k_\nu+1}\xi_{n-k_\nu+1},\ldots,x_n\xi_n).$$

Здесь предполагается, что эрмитовый лагранжиан взаимодействия может быть представлен в виде

$$\mathcal{L}_I(x)=g(x)U(\varphi(x))=g(x)\int d\sigma(\xi):e^{i\xi\varphi(\xi)}: \tag{2.4}$$

Суммирование в (2.3) проводится по всем связным диаграммам Фейнмана в n -ом порядке теории возмущений. Функция $F_{kj_k}(x_1\xi_1,\ldots,x_k\xi_k)$ описывает некоторый связный граф с k-вершинами, индекс j_k обозначает тип связного графа с k-вершинами (см. подробнее[I]).

Ребрам графа ставится в соответствие причинная функция $\Delta_c(x_i-x_j)$, или, в случае взаимодействия типа (2.9), причинный суперпропагатор $\mathcal{W}_c(\xi_i\xi_j,x_i-x_j)$, который в некотором "пиквикском" смысле (см.[5]) является суммой вида

$$\mathcal{W}_c(\xi_i\xi_j,x_i-x_j)=\left[\exp\{-\xi_i\xi_j\Delta_c(x_i-x_j)\}-1\right]=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\xi_i\xi_j)^n}{n!}\left[\Delta_c(x_i-x_j)\right]^n. \tag{P}$$

Вопросы, связанные с определением таких сумм, обсуждаются в[I] и [6].

Было показано, что для доказательства унитарности S-матрицы в каждом порядке теории возмущений достаточно, чтобы было выполнено следующее соотношение для каждого связного графа в ряду теории возмущений

$$\int dx_1\ldots\int dx_n\, g(x_1)\ldots g(x_n)\int d\sigma(\xi_1)\ldots\int d\sigma(\xi_n):\exp\{i[\xi_1\varphi(x_1)+\ldots+\xi_n\varphi(x_n)]\}:\times$$

$$\times\sum_P(-)^P F_{kj_k,P}(x_1\xi_1,\ldots,x_P\xi_P\,|\,x_{P+1}\xi_{P+1},\ldots,x_k\xi_k)=0. \tag{2.5}$$

Наша задача состоит в том, чтобы доказать существование последовательности пределов

$$S = \lim_{L\to\infty} \lim_{\delta\to 0} S^{\delta,L}[g] = \lim_{L\to\infty} S^{L}[g] \tag{2.8}$$

и показать, что предельная S-матрица унитарна, т.е.

$$SS^{+} = 1.$$

Путь нашего доказательства следующий. Мы введём в лагранжиан взаимодействия ряд контрчленов, зависящих от δ и L и покажем, что матрица $S^{L} = \lim\limits_{\delta\to 0} S^{\delta,L}$ унитарна с ними. Затем будет показано, что контрчлены подбираются таким образом, что в разложении (2.3) они убирают ряд связных графов, описывающих в пределе $L\to\infty$ переход вакуум-вакуум и диаграммы с добавками собственной энергии во внешние линии, как показано на рис. I. Таким образом, в пределе $L\to\infty$ в разложении теории возмущений будут отсутствовать все опасные диаграммы, а для остальных диаграмм предел при $L\to\infty$ существует. Поскольку "условие унитарности" для каждого связного графа (2.5) выполняется независимо от остальных связных графов, перенормированная S-матрица будет унитарна в каждом порядке теории возмущений.

3. Контрчлены в $\mathcal{L}_I$ и выбор перенормировочных констант

Для проведения перенормировок, о которых говорилось выше, в лагранжиан взаимодействия необходимо добавить несколько контрчленов, после чего он принимает вид:

$$\mathcal{L}_{I,z}(x,g(x)) = g(x):U(\varphi(x)): - \frac{1}{2}\,\delta m^2(g(x)):\varphi^2(x): - \frac{1}{2} Z_2(g(x)):\varphi(x)(\Box - m^2)\varphi(x): - E(g(x)). \tag{3.1}$$

Здесь

$$\delta m^2(g(x)) = \sum_{n=2}^{\infty} \delta m^2_{(n)}\,[g(x)]^n, \tag{3.2}$$

$$Z_2(g(x)) = \sum_{n=2}^{\infty} Z_{2(n)}\,[g(x)]^n, \tag{3.3}$$

$$E(g(x)) = \sum_{n=2}^{\infty} E_{(n)}\,[g(x)]^n. \tag{3.4}$$

Величины $\delta m^2_{(n)}$ и $Z_{2(n)}$ выбираются следующим образом. В n-ом порядке теории возмущений вычисляется массовый оператор скалярной частицы, т.е. подсчитывается вклад всех сильносвязных диаграмм собственной энергии n-ого порядка теории возмущений. Эти диаграммы имеют вид, представленный на рис. 2.

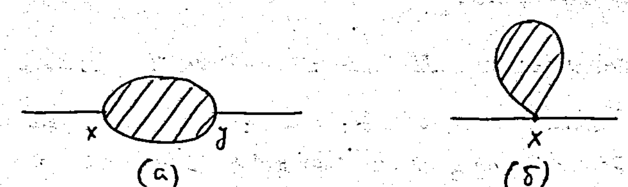

Рис. 2.

Вклады подсчитываются при помощи неперенормированной S-матрицы. Массовый оператор в n-ом порядке теории возмущений обозначим через $\Sigma^{\delta,L}_{(n)}(p^2)$. Согласно результатам /I/, существует предел

$$\lim_{L\to\infty}\lim_{\delta\to 0}\Sigma^{\delta,L}_{(n)}(p^2)=\Sigma_{(n)}(p^2). \tag{3.5}$$

Выберем

$$g^n\delta m^2_{(n)}=\Sigma_{(n)}(m^2)$$

$$g^n Z_{2(n)}=\frac{d}{dp^2}\Sigma_{(n)}(p^2)\Big|_{p^2=m^2}=\Sigma'_{(n)}(m^2). \tag{3.6}$$

Такой выбор перенормированных констант приводит к тому, что оператор собственной энергии, подсчитанный с помощью перенормированной S-матрицы рассеяния

$$S^{\delta,L}_r=T^{\delta}\exp\{i\int d^4x\,\mathcal{L}_{I,r}(x,g(\tfrac{x}{L}))\},$$

в каждом порядке теории возмущений имеет вид после перехода к пределу $\delta\to 0$, $L\to\infty$:

$$\Sigma_{2(n)}(p^2)=\Sigma_{(n)}(p^2)-g^n\delta m^2_{(n)}-g^n Z_{2(n)}(p^2-m^2)$$

и удовлетворяет условиям

$$\Sigma_{2(n)}(m^2)=\Sigma'_{2(n)}(m^2)=0,$$

откуда следует, что

$$\frac{\Sigma_{2(n)}(m^2)}{m^2-p^2-i\varepsilon}\Big|_{p^2=m^2}=0.$$

Это означает, что в ряду теории возмущений отсутствуют связные диаграммы с собственно-энергетическими вкладами во внешние линии.

Контрчлен с $E(g(x))$ призван перенормировать члены, связанные с переходом вакуум-вакуум. Величины $E_{(n)}$ выбираются следующим образом. Имеем

$$\langle 0|S^{\delta,L}[g]|0\rangle=\exp\{i\Phi^{\delta,L}[g]\}, \tag{3.7}$$

где

$$\Phi^{\delta,L}[g]=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-i)^{n-1}}{n!}\int dx_1\ldots\int dx_n\,g(\tfrac{x_1}{L})\ldots g(\tfrac{x_n}{L})\int d\sigma(\xi_1)\ldots\int d\sigma(\xi_n)\sum_{j_n}F^{\delta}_{nj_n}(x_1\xi_1,\ldots,x_n\xi_n).$$

Предел в (3.7) при $\delta\to 0$ существует. Выберем

$$E_{(n)}=\lim_{\delta\to 0}(-i)^{n-1}n^4\int dx_1\ldots\int dx_n\,\delta^{(4)}(x_1+\ldots+x_n)\times$$

$$\times\int d\sigma(\xi_1)\ldots\int d\sigma(\xi_n)\sum_{j_n}F^{\delta}_{nj_n}(x_1\xi_1,\ldots,x_n\xi_n).$$

Обозначим

$$G^{\delta}_{(n)}(p_1,\ldots,p_n)=(-i)^{n-1}n^4\int dx_1\ldots\int dx_n\,\delta^{(4)}(x_1+\ldots+x_n)\times$$

$$\times e^{-i(p_1x_1+\ldots+p_nx_n)}\int d\sigma(\xi_1)\ldots\int d\sigma(\xi_n)\sum_{j_n}F^{\delta}_{nj_n}(x_1\xi_1,\ldots,x_n\xi_n),$$

тогда

$$E^{\delta}_{(n)}=G^{\delta}_{(n)}(0,\ldots,0).$$

В ряду теории возмущений для перенормированной S-матрицы диаграммы, описывающие вакуумные петли, будут группироваться следующим образом:

$$A_n=(-i)^{n-1}\int dx_1\ldots\int dx_n\prod_{j=1}^{n}g\left(\frac{x_j}{L}\right)\int d\sigma(\xi_1)\ldots\int d\sigma(\xi_n)\sum_{j_n}F_{n j_n}(x_1\xi_1,\ldots,x_n\xi_n)-$$

$$-\int dx\left[g\left(\frac{x}{L}\right)\right]^n G(0,\ldots,0)=$$

$$=\int dp_1\ldots\int dp_n\prod_{j=1}^{n}\left[L^4\tilde{g}(Lp_j)\right]\cdot\delta^{(4)}(p_1+\ldots+p_n)\times$$

$$\times\left\{G(p_1,\ldots,p_n)-G(0,\ldots,0)\right\}.$$

Производя замену $p_j=\frac{q_j}{L}$ и полагая $\lambda=\frac{1}{L}$, получим

$$A_n=\int dq_1\ldots\int dq_n\prod_{j=1}^{n}\tilde{g}(q_j)\,\delta^{(4)}(q_1+\ldots+q_n)\frac{1}{\lambda^4}\left\{G(\lambda q_1,\ldots,\lambda q_n)-G(0,\ldots,0)\right\}. \qquad (3.8)$$

Функции $\tilde{g}(q)$ хорошо убывают при $|q|\to\infty$, так, что интеграл (3.8) хорошо сходится при $\lambda>0$. При $\lambda\to 0$ имеем:

$$\frac{1}{\lambda^4}\left\{G(\lambda q_1,\ldots,\lambda q_n)-G(0,\ldots,0)\right\}=$$

$$=\frac{1}{\lambda^2}\frac{1}{2!}\left(\sum_{j=1}^{n}q_{j\mu}\frac{\partial}{\partial s_{j\mu}}\right)^2 G(s_1,\ldots,s_n)\Big/_{s=0}+ \qquad (3.9)$$

$$+\frac{1}{4!}\left(\sum_{j=1}^{n}q_{j\mu}\frac{\partial}{\partial s_{j\mu}}\right)^4 G(s_1,\ldots,s_n)\Big/_{s=0}+O(\lambda^2).$$

Подставляя это разложение в (3.8), получим, что два первых слагаемых тождественно равны нулю в силу (2.7). Поэтому

$$A_n=O(\lambda^2)=O\left(\frac{1}{L^2}\right)$$

и в пределе $L\to\infty$ все вакуумные петли исчезают из ряда теории возмущений.

Таким образом, перенормировочные контрчлены удаляют в пределе $L\to\infty$ из ряда теории возмущений ряд связных диаграмм, а именно

(I) диаграммы перехода вакуум-вакуум - вакуумные петли,

(2) диаграммы с собственно энергетическими вкладами во внешние линии скалярных частиц.

Остальные диаграммы в ряду теории возмущений остаются без изменений.

4. <u>Унитарность перенормированной S_r-матрицы</u>

Введение в лагранжиан взаимодействия контрчленов, согласно (3.I), не изменяет по существу проведённое/I/ доказательство унитарности матрицы рассеяния.

Опасным, с точки зрения методов доказательства унитарности перенормированной S-матрицы, является появление в (3.I) контрчлена перенормировки волновой функции, поскольку последний содержит слагаемое с производными от квантованного поля $\varphi(x)$. Появление такого типа членов приводит к тому, что способы хронологического упорядочения по Вику и по Дайсону (см., например/3/) не совпадают. Это означает, что S-матрица, записанная в форме виковского T-произведения, не будет с очевидностью унитарна, необходимы дополнительные усилия, чтобы доказать её унитарность.

Покажем, что регуляризованная перенормированная $S_r^{\delta,L}$-матрица удовлетворяет условию

$$S_r^{\delta,L}\otimes^{\delta} S_r^{\delta,L}\equiv 1. \tag{4.I}$$

Аналогично тому, как было показано в /I/, условие (4.I) в теории возмущений будет выполнено, если будет удовлетворяться соответствующее условие унитарности для произвольного связного графа Фейнмана.

При доказательстве последнего условия (2.5) в /I/ мы использовали формулу Вельтмана /4/, которая справедлива, если между регуляризованными пропагаторами или суперпропагаторами справедливы соотношения

$$\begin{aligned} w_c^{\delta}(\xi,x) &= \theta(x_0)\,w_{(-)}^{\delta}(\xi,x)+\theta(-x_0)\,w_{(+)}^{\delta}(\xi,x),\\ w_{(-)}^{\delta}(\xi,x) &= \theta(x_0)\,w_c^{\delta}(\xi,x)+\theta(-x_0)\,w_c^{\delta+}(\xi,x). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Поскольку в контрчлене перенормировки волновой функции присутствуют производные от квантованного поля $\varphi(x)$, в ряду теории возмущений для регуляризованной $S_r^{\delta,L}$-матрицы появляются производные первого и второго порядков от пропагаторов $w_c(\xi,x)$ и $w_{(\pm)}(\xi,x)$. Оказывается, что при выбранной нами регуляризации для пропагаторов с производными также справедливы соотношения типа (4.2), т.е.

$$\begin{aligned} \partial_\mu\partial_\nu w_c^{\delta}(\xi,x) &= \theta(x_0)\,\partial_\mu\partial_\nu w_{(-)}^{\delta}(\xi,x)+\theta(-x_0)\,\partial_\mu\partial_\nu w_{(+)}^{\delta}(\xi,x)\\ \partial_\mu\partial_\nu w_{(-)}^{\delta}(\xi,x) &= \theta(x_0)\,\partial_\mu\partial_\nu w_c^{\delta}(\xi,x)+\theta(-x_0)\,\partial_\mu\partial_\nu w_c^{\delta+}(\xi,x). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Это связано с тем, что регуляризация выбрана таким образом (см. /I/), что функции $w_c^{\delta}(\xi,x)$ и $w_{(\pm)}^{\delta}(\xi,x)$ обращаются в точке $x^2=0$ в ноль, как

$$\begin{aligned} w_c^{\delta}(\xi,x) &= O\big((x^2)^{1-\varepsilon}\big)\\ w_{(\pm)}^{\delta}(\xi,x) &= O\big((x^2)^{1-\varepsilon}\big). \end{aligned} \qquad (\varepsilon\ll 1) \tag{4.4}$$

Дифференцируя (4.2), получим:

$$\begin{aligned} \partial_\mu\partial_\nu w_c^{\delta}(\xi,x) &= \theta(x_0)\,\partial_\mu\partial_\nu w_{(-)}^{\delta}(\xi,x)+\theta(-x_0)\,\partial_\mu\partial_\nu w_{(+)}^{\delta}(\xi,x)+\\ &+\left(\delta_{\mu 0}\delta_{\nu\lambda}+\delta_{\nu 0}\delta_{\mu\lambda}\right)\delta(x_0)\,\partial_\lambda\left\{w_{(-)}^{\delta}(\xi,x)-w_{(+)}^{\delta}(\xi,x)\right\}+\\ &+2\,\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0}\,\delta'(x_0)\left\{w_{(-)}^{\delta}(\xi,x)-w_{(+)}^{\delta}(\xi,x)\right\}. \end{aligned}$$

Функция $w^{\delta}(\xi,x)=w_{(-)}^{\delta}(\xi,x)-w_{(+)}^{\delta}(\xi,x)$

также обращается в ноль при $x^2\to 0$, как

$$w^{\delta}(\xi,x)=\varepsilon(x_0)\,\theta(x^2)\,O\big((x^2)^{1-\varepsilon}\big). \tag{4.5}$$

Поэтому $w^{\delta}(\xi,x)$ $(\delta>1)$ один раз дифференцируема и

$$\int d^4x\, f(x)\,\delta'(x_0)\,w^{\delta}(\xi,x)=0$$
$$\int d^4x\, f(x)\,\delta(x_0)\,\partial_\lambda w^{\delta}(\xi,x)=0$$

для любых $f(x)\in Z_a$.

Это означает, что проведённое в /I/ доказательство остаётся в силе для перенормированной $S_r^{\delta,L}$ - матрицы, т.е.

$$S_r^{\delta,L}[g] \circledast^{\delta} S_r^{\delta,L+}[g] \equiv 1 .$$

В силу непрерывности по параметру δ в точке $\delta = 0$ имеем:

$$S_r^{L} \circledast S_r^{L+} = 1 .$$

Как показано в предыдущем параграфе, контрчлены в пределе $L \to \infty$ устраняют все графы Фейнмана, описывающие вакуумные петли и собственно энергетические вклады во внешние линии скалярных частиц. Для остальных графов Фейнмана предел $L \to \infty$ существует.

Таким образом, все достаточные условия, обеспечивающие унитарность предельной S-матрицы, выполнены, и

$$S_r S_r^{+} = 1.$$

<u>Литература:</u>

1. В.А. Алебастров, Г.В. Ефимов, ОИЯИ, Р2-6586, Дубна, 1972. Препринт ИТФ-72-110Р, Киев, 1972.
2. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. "Введение в теорию квантованных полей", Гостехиздат, 1957.
3. Х. Умедзава. Квантовая теория поля. ИЛ, Москва, 1958.
4. M.Veltman. Physica <u>29</u>, 186, 1963.
5. Г. Харди, Расходящиеся ряды, ИЛ, Москва, 1951.
6. Г.В. Ефимов, ТМФ, 2, 302, 1970, Проблемы физики ЭЧАЯ, том. I, вып. I, 156, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
II января 1973 года.