ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6864

Г.В. Ефимов

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

КВАНТОВАНИЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1972

P2 - 6864

Г.В. Ефимов

КВАНТОВАНИЕ НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в to Communications in Mathematical Physics

I. Введение

Наличие широкого класса физически приемлемых теорий с неперенормируемым взаимодействием требует развития методов, в рамках которых можно было бы построить S-матрицу, удовлетворяющую всем общим аксиомам квантовой теории поля. Мы верим, что методы нелокальной теории поля сыграют не последнюю роль при решении этой проблемы. С точки зрения физики, основное преимущество нелокальной теории по сравнению с локальной состоит в том, что неконтролируемый произвол, возникающий при построении S-матрицы с помощью вычитательного формализма, фиксируется в нелокальной теории выбором формфактора, который характеризует область нелокального взаимодействия.

Построение самосогласованной нелокальной квантовой теории поля, изложенное в работах /1/, было осуществлено в рамках аксиоматики Боголюбова, Медведева, Поливанова, Ширкова /2,3/.

В общих чертах схема построения S-матрицы в нелокальной теории состояла в следующем. Формулировались общие аксиомы нелокальной квантовой теории поля. Затем рассматривался некоторый нелокальный лагранжиан классического поля. Например, в случае однокомпонентного скалярного поля $\varphi(x)$ таким лагранжианом может быть

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\varphi(x)(\Box - m^2)\varphi(x) - g\left\{\int dy\, K(x-y)\varphi(y)\right\}^4, \tag{1.1}$$

где $K(x-y)$ – некоторый нелокальный формфактор. Для построения нелокальной S-матрицы в квантовой теории использовался, во-первых, принцип соответствия, т.е. при бесконечно малых g S-матрица записывается в виде

$$S = 1 - ig\int dx :\left\{\int dy\, K(x-y)\varphi(y)\right\}^4:, \tag{I.2}$$

где $\varphi(x)$ – вторично квантованное скалярное поле, удовлетворяющее свободному уравнению

$$(\Box - m^2)\varphi(x) = 0. \tag{I.3}$$

Во-вторых, для построения высших порядков теории возмущений вводилось предписание, согласно которому пропагатор скалярной частицы изменялся следующим образом:

$$\frac{i}{m^2-k^2-i\varepsilon} \longrightarrow \frac{[\tilde{K}(k)]^2}{m^2-k^2-i\varepsilon}. \tag{I.4}$$

Затем указывался класс функций, к которому должен принадлежать формфактор $[\tilde{K}(k)]^2$, и вводилась некоторая промежуточная регуляризационная процедура, в рамках которой строилась S-матрица, конечная в каждом порядке теории возмущений. После снятия регуляризации доказывалось, что S-матрица, построенная согласно предписанию, удовлетворяет всем исходным аксиомам : унитарности, причинности, релятивистской ковариантности, градиентной инвариантности и т.д.

В этом смысле наша схема была чисто конструктивной, так как она давала лишь ряд предписаний, в рамках которых возможно построение конечной S-матрицы, удовлетворяющей всем исходным аксиомам. Однако эта схема не была связана ни с какой процедурой квантования системы классических нелокальных полей типа (I.I).

В настоящей работе мы хотим указать такую процедуру квантования регуляризованной подходящим образом системы классических полей, описываемых нелокальным лагранжианом типа (I.I), которая приводит к появлению дополнительных "духовых" состояний скалярной частицы. При снятии регуляризации "духовые" состояния исчезают, но, как "память" о них, остаётся формфактор $\left[\widetilde{K}(u)\right]^2$, который эффективно изменяет пропагатор скалярной частицы согласно (I.4).

Отдалённой аналогией предлагаемой процедуры может служить метод квантования электромагнитного поля. (См., например,/2/). Реальный физический фотон может находиться лишь в двух состояниях с так называемыми поперечными поляризациями. Однако эти состояния не могут привести к правильной функции распространения. Чтобы получить пропагатор виртуального фотона в форме

$$\mathcal{D}_{\mu\nu}(k^2)=\frac{\delta_{\mu\nu}}{-k^2-i\varepsilon}\,, \tag{I.5}$$

необходимо ввести в рассмотрение нефизические продольные и скалярные квантовые состояния с индефинитной метрикой. Условия Лоренца в форме

$$\partial_\mu A_\mu^{(-)}(x)|0\rangle$$

и сохранения тока $\partial_\mu J_\mu(x)=0$ гарантируют, что продольные и скалярные кванты не могут возникнуть в результате взаимодействий физических поперечных квантов с полем электронов. Однако их роль состоит в том, что они дают вклад в функцию распространения (I.5), т.е. виртуальный фотон состоит как бы из поперечных, продольных и скалярных квантов.

Работа построена следующим образом. В § 2 даётся описание классической системы и ставится задача квантования, в § 3 рассматривается регуляризационная процедура, изменяющая лагранжиан свободной частицы, в § 4 проводится квантование регуляризованной системы и даётся описание векторного пространства состояний, которое содержит "ду́ховые" состояния с индефинитной метрикой. В § 5 рассматриваются функции Грина регуляризованного квантованного поля. В § 6 исследуется взаимодействующая система до снятия регуляризации. В § 7 снимается регуляризация для функций Грина скалярного поля. В § 8 доказывается конечность и унитарность S-матрицы после снятия регуляризации.

2. Описание системы и постановка задачи квантования

Будем рассматривать однокомпонентное скалярное поле $\varphi(x)$. Плотность лагранжиана, описывающего классическое поле $\varphi(x)$, записывается в виде

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\varphi(x)(\Box - m^2)\varphi(x) + g\,U\left(K(\ell^2\Box)\varphi(x)\right). \tag{2.1}$$

Здесь $\Box = -\frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \frac{\partial^2}{\partial \vec{x}^2}$, ℓ – некоторый заданный параметр, имеющий размерность длины, g – константа связи.

$U(w)$ – некоторая функция, описывающая самодействие скалярного поля $\varphi(x)$. Будем предполагать, что $U(w)$ является аналитической в некоторой окрестности вещественной оси комплексной $w = u + iv$ -плоскости. В остальном – это произвольная функция. В работе [9] более подробно рассмотрены классы функций взаимодействия $U(w)$, для которых можно построить нелокальную S-матрицу, конечную в каждом порядке теории возмущений.

Оператор $K(\ell^2\Box)$ в (2.I) является нелокальным и может быть представлен в виде

$$K(\ell^2\Box)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{c_n}{(2n)!}\left(\ell^2\Box\right)^n. \tag{2.2}$$

В дальнейшем мы будем рассматривать оператор

$$V(\ell^2\Box)=\left[K(\ell^2\Box)\right]^2. \tag{2.3}$$

Будем предполагать, что функция $V(z)$ удовлетворяет условиям:

(I) $V(z)$ -целая аналитическая функция в z -плоскости некоторого конечного порядка роста $\frac{1}{2}\leqslant\rho<1$, т.е. существуют такие $C>0$ и $b>0$, что

$$|V(z)|\leqslant C e^{b|z|^\rho},$$

(2) $$\left[V(z)\right]^*=V(z^*),$$

(3) $$V(\ell^2m^2)=1,$$

(4) $V(x)\geqslant 0$ при вещественных x .

(5) $$V(z)=\begin{cases} O\left(\frac{1}{|z|^2}\right), & Re\,z\to-\infty \\ O\left(\exp\{b|x|^\rho\}\right), & Re\,z\to+\infty . \end{cases}$$

В разложении

$$V(z)=\sum_{n=0}^{\infty}v_n\left[z-m^2\cdot\ell^2\right]^n \tag{2.4}$$

коэффициенты v_n удовлетворяют условиям

(7) $v_0 = 1$; $v_n > 0$, $\forall n$.

(8) Существуют такие постоянные $C>0$ и $A>0$, что

$$v_n < C \frac{A^n}{\Gamma\left(\frac{n}{\rho}+1\right)} .$$

Итак, мы полностью описали все величины, входящие в плотность лагранжиана (2.I), описывающего нашу систему.

Уравнение движения, которому подчиняется классическое поле $\varphi(x)$, может быть получено согласно принципу наименьшего действия и записывается в виде:

$$(\Box - m^2)\varphi(x) = -g\, K(\ell^2\Box)\, U'\big(K(\ell^2\Box)\varphi(x)\big).$$

Проблема состоит в том, как понимать это уравнение, каков способ его решения и каковы методы квантования такого сорта уравнений.

Мы поступим следующим образом. Введём поле

$$\Phi(x) = K(\ell^2\Box)\varphi(x) , \tag{2.5}$$

тогда полный лагранжиан (2.I) для поля $\Phi(x)$ будет иметь вид

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\Phi(x) E(\Box)\Phi(x) + g\, U(\Phi(x)), \tag{2.6}$$

где

$$E(\Box) = \frac{\Box - m^2}{V(\ell^2\Box)} . \tag{2.7}$$

Формально уравнение движения запишется

$$E(\Box)\Phi(x) = -g\,U'(\Phi(x)) \tag{2.8}$$

для взаимодействующего поля и

$$E(\Box)\Phi(x) = \frac{\Box - m^2}{V(\ell^2\Box)}\Phi(x) = 0 \tag{2.9}$$

для невзаимодействующего.

Возникает вопрос, как понимать эти уравнения, как их исследовать и решать и как проводить квантование поля $\Phi(x)$?

Наша идея состоит в следующем. Вместо уравнения (2.8) или (2.9) мы рассмотрим регуляризованное уравнение

$$E^{\delta}(\Box)\Phi^{\delta}(x) = -g\,U'(\Phi^{\delta}(x)) \tag{2.10}$$

или в случае $g = 0$

$$E^{\delta}(\Box)\Phi^{\delta}(x) = 0. \tag{2.10a}$$

Здесь δ -параметр регуляризации такой, что

$$\lim_{\delta\to 0} E^{\delta}(\Box) = E(\Box) = \frac{\Box - m^2}{V(\ell^2\Box)}. \tag{2.11}$$

Соответственно, вместо лагранжиана (2.6) получим

$$\mathcal{L}^{\delta}(x) = \frac{1}{2}\Phi^{\delta}(x)E^{\delta}(\Box)\Phi^{\delta}(x) + g\,U(\Phi^{\delta}(x)). \tag{2.12}$$

Регуляризация подбирается таким образом, чтобы функция $E^{\delta}(k^2) = \dfrac{k^2-m^2}{V^{\delta}(k^2\ell^2)}$ имела нули в некоторой последовательности точек

$$E^{\delta}(k^2) \sim (k^2-m^2)\prod_{j=1}^{\infty}\left(k^2-m_j^2(\delta)\right). \tag{2.13}$$

Будем предполагать, что

$$m_j^2(\delta) > 0 \qquad (j=1,2,3,\dots)$$

и

$$m_j^2(\delta) \to \infty \qquad \text{при } \delta\to\infty.$$

Тогда поле $\Phi^{\delta}(x)$ при $\delta>0$ может быть проквантовано с привлечением методов индефинитной метрики (см. работы Д.И. Блохинцева/4/, А. Пайса, Г. Уленбена/5/ и К. Надя/7/).

При $\delta>0$ для невзаимодействующей системы можно построить гамильтониан H_0^{δ} и векторное пространство состояний с индефинитной метрикой $\mathcal{H}^{\delta}$. Далее для взаимодействующей системы можно найти матрицу рассеяния S^{δ}, а также различные операторы типа тока $J^{\delta}(x) = i\,\dfrac{\delta S^{\delta}}{\delta\Phi^{\delta}(x)}\,S^{\delta+}$, функций Грина $G^{\delta}(x-y) = \langle 0|T(\Phi^{\delta}(x)\Phi^{\delta}(y)S^{\delta})|0\rangle$ и Вайтмана $W^{\delta}(x_1,\dots,x_n) = \langle 0|\Phi^{\delta}(x_1)\dots\Phi^{\delta}(x_n)|0\rangle$ и т.д.

По определению, будем считать, что предел всех этих величин при $\delta\to 0$ является квантовополевым решением исходной системы (2.6).

Задача состоит в том, чтобы указать такую регуляризационн процедуру, которая при $\delta \to 0$ обеспечивает существование предел операторов и матричных элементов всех физических величин и прив к самосогласованной теории. Решению этой проблемы и посвящена д ная работа.

3. Регуляризационная процедура

Регуляризация будет введена следующим образом. Вместо функ

$$V(\kappa^2 \ell^2) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n (\kappa^2 - m^2)^n \ell^{2n}$$

(

введём регуляризованную функцию

$$V^{\delta}(\kappa^2 \ell^2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n (\kappa^2 - m^2)^n \ell^{2n}}{\prod_{j=1}^{n+2} \left(1 - \frac{\delta}{j} \frac{\kappa^2 - m^2}{m^2}\right)} .$$

(

Удобно ввести безразмерные переменные

$$z = \frac{\kappa^2}{m^2}, \qquad \lambda = m^2 \ell^2 .$$

(

Тогда

$$V^{\delta}(z\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n \lambda^n (z-1)^n}{\prod_{j=1}^{n+2} \left(1 - \frac{\delta}{j}(z-1)\right)} .$$

(3

Рассмотрим функцию

$$E^{\delta}(\kappa^2) = \frac{\kappa^2 - m^2}{V^{\delta}(\kappa^2 \ell^2)} = m^2 \frac{z-1}{V^{\delta}(z\lambda)} . \tag{3.5}$$

Справедливо представление

$$\frac{1}{E^{\delta}(\kappa^2)} = \frac{V^{\delta}(\kappa^2 \ell^2)}{\kappa^2 - m^2} = \frac{1}{m^2} \frac{V^{\delta}(z\lambda)}{z-1} = \frac{1}{m^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-)^j A_j^{\delta}}{z - \mu_j} , \tag{3.6}$$

Здесь

$$\mu_j = 1 + \frac{j}{\delta} \qquad (j = 0, 1, 2, \dots) \tag{3.7}$$

$$A_j^{\delta} = \sum_{n=\max\{0, j-2\}}^{\infty} v_n \lambda^n \frac{(n+2)!}{j!\,(n+2-j)!} \left(\frac{j}{\delta}\right)^n , \tag{3.8}$$

причём $A_0^{\delta} = 1$.

$$\sum_{j=0}^{\infty} (-)^j A_j^{\delta} \mu_j^s = 0 \qquad \text{для } s = 0, 1 \tag{3.9}$$

Величину A_j^{δ} можно ещё представить в виде:

$$A_j^{\delta} = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{d\zeta\,(1+\zeta)^2}{\zeta^{j+1}} V\left((1+\zeta)\frac{j}{\delta}\lambda\right).$$

Из этой формулы легко получить оценку

$$A_j^\delta \leqslant \frac{(1+N)^2}{N^j} \bar V\left((1+N)\frac{j}{\delta}\lambda\right) \leqslant C\,\frac{(1+N)^2}{N^j}\, e^{b\left[(1+N)\frac{j}{\delta}\lambda\right]^\rho} \qquad (3.10)$$

при произвольных числах $N>0$.

Функция $D^\delta(\kappa^2)=\left[E^\delta(\kappa^2)\right]^{-1}$ обладает свойствами:

1). $D^\delta(\kappa^2)$ – мероморфная функция в комплексной κ^2-плоскости и имеет простые полюса в точках

$$m_j^2(\delta)=m^2\mu_j=m^2\left(1+\frac{j}{\delta}\right) \qquad (j=0,1,2,\dots).$$

2). Вычеты в этих полюсах равны

$$\underset{\kappa^2=m_j^2(\delta)}{\mathrm{Res}} D^\delta(\kappa^2)=(-)^j A_j^\delta .$$

3). При $|\kappa^2|\to\infty$ во всей κ^2-плоскости, кроме луча $[m^2,\infty)$

$$D^\delta(\kappa^2)=\frac{V^\delta(\kappa^2\ell^2)}{\kappa^2-m^2}=O\left(\frac{1}{|\kappa^2|^3}\right).$$

4). Возможно, функция $D^\delta(\kappa^2)$ имеет нули в точках a_ρ $(\rho=1,2,3,\dots)$

5). $$\lim_{\delta\to 0} D^\delta(\kappa^2)=\frac{V(\kappa^2\ell^2)}{\kappa^2-m^2}.$$

4. Квантование регуляризованного уравнения

Рассмотрим классическую систему, описываемую плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L}^{\delta}(x) = \frac{1}{2}\Phi^{\delta}(x) E^{\delta}(\Box)\Phi^{\delta}(x) + g\,U(\Phi^{\delta}(x)), \tag{4.I}$$

где регуляризованный оператор $E^{\delta}(\Box)$ обладает свойствами, перечисленными в предыдущем параграфе.

Согласно принципу наименьшего действия, уравнение движения для системы, описываемой лагранжианом (4.I), имеет вид

$$E^{\delta}(\Box)\Phi^{\delta}(x) = -g\,U'(\Phi^{\delta}(x)). \tag{4.2}$$

Это дифференциальное уравнение бесконечного порядка, т.е. фактически это интегральное уравнение. Для решения задачи Коши необходимо задание значений функции $\Phi^{\delta}(x)$ и всех её производных в начальный момент времени.

Займёмся теперь решением этого уравнения. Мы будем следовать схеме, предложенной А. Пайсом и Г. Уленбеком /5/. Введём систему полей

$$\Phi_j^{\delta}(x) = \sqrt{A_j^{\delta}}\,\frac{E^{\delta}(\Box)}{\Box - m_j^2(\delta)}\,\Phi^{\delta}(x), \tag{4.3}$$

где

$$m_j^2(\delta) = m^2\left(1 + \frac{j}{\delta}\right) \quad (j = 0,1,2,\ldots). \tag{4.4}$$

Согласно определению (4.3), поля $\Phi_j^{\delta}(x)$ не являются независимыми при различных j и удовлетворяют соотношению

$$\sqrt{A_j^{\delta}}\,\frac{E^{\delta}(\Box)}{\Box - m_j^2(\delta)}\,\Phi_i^{\delta}(x) = \sqrt{A_i^{\delta}}\,\frac{E^{\delta}(\Box)}{\Box - m_i^2(\delta)}\,\Phi_j^{\delta}(x). \tag{4.5}$$

Поле $\Phi^{\delta}(x)$ выражается через поля $\varphi_j^{\delta}(x)$ следующим образом

$$\Phi^{\delta}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}(-)^j\sqrt{A_j^{\delta}}\,\varphi_j^{\delta}(x). \tag{4.6}$$

Действительно, с одной стороны, справедлива цепочка равенств:

$$\Phi^{\delta}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}(-)^j\sqrt{A_j^{\delta}}\cdot\sqrt{A_j^{\delta}}\cdot\frac{E^{\delta}(\square)}{\square-m_j^2(\delta)}\,\Phi^{\delta}(x)=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-)^j A_j^{\delta}}{\square-m_j^2(\delta)}\cdot E^{\delta}(\square)\Phi^{\delta}(x)=\frac{1}{E^{\delta}(\square)}\cdot E^{\delta}(\square)\Phi^{\delta}(x)=\Phi^{\delta}(x),$$

с другой стороны, воспользовавшись (4.5), получим

$$\varphi_j^{\delta}(x)=\sqrt{A_j^{\delta}}\,\frac{E^{\delta}(\square)}{\square-m_j^2(\delta)}\sum_{i=0}^{\infty}(-)^i\sqrt{A_i^{\delta}}\,\varphi_i^{\delta}(x)=$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty}(-)^i\sqrt{A_i^{\delta}}\sqrt{A_i^{\delta}}\,\frac{E^{\delta}(\square)}{\square-m_i^2(\delta)}\,\varphi_j^{\delta}(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-)^i A_i^{\delta}}{\square-m_i^2(\delta)}\,E^{\delta}(\square)\,\varphi_j^{\delta}(x)=$$

$$=\varphi_j^{\delta}(x).$$

Используя соотношение (4.3), (4.5) и (4.6), плотность лагранжиана (4.I) в терминах полей $\varphi_j^{\delta}(x)$, запишется:

$$\mathcal{L}^{\delta}(x)=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}(-)^j\varphi_j^{\delta}(x)\left(\square-m_j^2(\delta)\right)\varphi_j^{\delta}(x)+$$
$$+g\,U\Big(\sum_{j=0}^{\infty}(-)^j\sqrt{A_j^{\delta}}\,\varphi_j^{\delta}(x)\Big). \tag{4.7}$$

Уравнение (4.2) может быть записано в виде бесконечной системы

$$\left(\Box - m_j^2(\delta)\right)\phi_j^\delta(x) = -\sqrt{A_j^\delta}\, g\, U'\left(\sum_{i=0}^{\infty}(-)^i\sqrt{A_i^\delta}\,\phi_i^\delta(x)\right). \quad (j=0,1,2,3,\ldots) \tag{4.8}$$

Действительно, подставляя (4.6) в (4.2) и воспользовавшись (4.5), получим

$$E^\delta(\Box)\phi^\delta(x) = E^\delta(\Box)\sum_{j=0}^{\infty}(-)^j\sqrt{A_j^\delta}\,\phi_j^\delta(x) =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}(-)^j\sqrt{A_j^\delta}\,\frac{1}{\sqrt{A_k^\delta}}\left(\Box - m_k^2(\delta)\right)\sqrt{A_k^\delta}\,\frac{E^\delta(\Box)}{\Box - m_k^2(\delta)}\,\phi_j^\delta(x) =$$

$$= \frac{\Box - m_k^2(\delta)}{\sqrt{A_k^\delta}}\sum_{j=0}^{\infty}(-)^j\sqrt{A_j^\delta}\sqrt{A_j^\delta}\,\frac{E^\delta(\Box)}{\Box - m_j^2(\delta)}\,\phi_k^\delta(x) =$$

$$= \frac{\Box - m_k^2(\delta)}{\sqrt{A_k^\delta}}\,\phi_k^\delta(x) = -g\,U'\left(\sum_{i=0}^{\infty}(-)^i\sqrt{A_i^\delta}\,\phi_i^\delta(x)\right),$$

откуда следует (4.8).

Итак, лагранжиан (4.7) и система уравнений (4.8) полностью эквивалентны лагранжиану (4.I) и уравнению (4.2).

При доказательстве эквивалентности мы считаем, что поля $\Phi_j^{\delta}(x)$ не являются независимыми, поскольку они определяются соотношением (4.3). Однако представление лагранжиана в форме (4.7) и уравнения движения в виде системы (4.8) позволяет считать эти поля полностью независимыми.

Использованный нами приём известен в теории дифференциальных уравнений. Он применяется, когда одно уравнение с высшими производными заменяется системой уравнений низшего порядка.

Если исходить из лагранжиана (4.7), описывающего систему независимых полей $\{\Phi_j^{\delta}\}$ и приводящего к системе уравнений (4.8), то легко показать, что поле $\Phi^{\delta}(x)=\sum_{j=0}^{\infty}(-)^j\sqrt{A_j^{\delta}}\,\Phi_j^{\delta}(x)$ удовлетворяет уравнению (4.2), а также справедливо соотношение (4.5).

Таким образом, мы можем считать, что наша исходная система (4.I) описывается лагранжианом (4.7), где поля $\Phi_j^{\delta}(x)$ независимы и удовлетворяют уравнениям движения (4.8).

Все вышесказанные рассуждения касались классической теории поля. Квантование системы классических полей $\{\Phi_j^{\delta}\}$ можно провести согласно канонической схеме квантования (См., например,/6/).

Импульс, сопряжённый координате поля $\Phi_j^{\delta}(\vec{x},0)$, равен

$$\Pi_j^{\delta}(\vec{x},0)=\frac{\delta}{\delta\dot{\Phi}_j^{\delta}(\vec{x},0)}\int d\vec{y}\,\mathcal{L}^{\delta}(\vec{y},0)=(-)^j\dot{\Phi}_j^{\delta}(\vec{x},0). \tag{4.9}$$

Условия квантования записываются

$$\left[\Phi_j^{\delta}(\vec{x},0),\Phi_{j'}^{\delta}(\vec{x}',0)\right]_-=\left[\Pi_j^{\delta}(\vec{x},0),\Pi_{j'}^{\delta}(\vec{x}',0)\right]_-=0$$

$$\left[\Phi_j^{\delta}(\vec{x},0),\Pi_{j'}^{\delta}(\vec{x}',0)\right]_-=i\,\delta_{jj'}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}') \tag{4.I0}$$

или

$$\left[\phi_j^\delta(\vec{x},0),\ \dot{\phi}_{j'}^\delta(\vec{x}',0)\right]_- = i(-)^j \delta_{jj'}\,\delta(\vec{x}-\vec{x}'). \qquad (4.11)$$

Итак,мы видим, что для квантования нашей регуляризованной системы необходимо привлечение индефинитной метрики (см./7/).

Поскольку точно решить систему уравнений (4.8) мы не в состоянии, а дальнейшая наша задача состоит в построении S-матрицы по теории возмущений, рассмотрим квантование невзаимодействующей системы полей $\{\phi_j^\delta(x)\}$, т.е. случай, когда $g=0$. Вместо (4.8) получим систему

$$\left(\Box - m_j^2(\delta)\right)\phi_j^\delta(x) = 0 \qquad (j=0,1,2,\dots). \qquad (4.12)$$

Решение этих уравнений можно записать в форме (см./2,8/):

$$\phi_j^\delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\int\frac{d\vec{k}}{\sqrt{2\omega_{j\vec{k}}^\delta}}\left(d_{j\vec{k}}\,e^{-ikx} + d_{j\vec{k}}^{+}\,e^{ikx}\right) \qquad (4.13)$$

$$\omega_{j\vec{k}}^\delta = \sqrt{\vec{k}^2 + m_j^2(\delta)} = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2\left(1+\frac{j}{\delta}\right)}.$$

Условия квантования (4.10) и (4.11) приводят к тому, что операторы $d_{j\vec{k}}$ удовлетворяют следующим перестановочным соотношениям:

$$\left[d_{j\vec{k}}, d_{j'\vec{k}'}\right]_- = \left[d_{j\vec{k}}^{+}, d_{j'\vec{k}'}^{+}\right]_- = 0$$

$$\left[d_{j\vec{k}}, d_{j'\vec{k}'}^{+}\right]_- = (-)^j\,\delta_{jj'}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}'). \qquad (4.14)$$

Гамильтониан невзаимодействующей системы может быть получен согласно обычным правилам (см., например[2,8]). Запишем его в нормальной форме:

$$H_0^\delta = \sum_{j=0}^{\infty} (-)^j \int d\vec{k}\, \omega_{j\vec{k}}^\delta\, d_{j\vec{k}}^+\, d_{j\vec{k}}. \tag{4.15}$$

Рассматриваемая система состоит из квантов со спектром масс

$$m_j^2(\delta) = \begin{cases} m^2 , & j=0 \\ m^2\left(1+\frac{j}{\delta}\right), & j=1,2,3,\ldots \end{cases} \tag{4.16}$$

Будем далее иногда обозначать

$$d_{0\vec{k}} = a_{\vec{k}} \quad , \quad d_{0\vec{k}}^+ = a_{\vec{k}}^+. \tag{4.17}$$

При $\delta\to 0$ масса квантов с $j=1,2,\ldots$ стремится к бесконечности, согласно (4.16). Эти кванты будем называть ду́ховыми состояниями, или просто "ду̀хами". Кванты с $j=0$ имеют конечную массу m^2. Мы будем называть их нормальными частицами, или просто скалярными частицами массы m.

Пространство состояний $\mathcal{H}^\delta$, является векторным пространством с индефинитной метрикой. Оно состоит из векторов:

1). Состояние вакуума $|0\rangle$, оно единственно и определяется условиями

$$d_{j\vec{k}}|0\rangle = 0 \qquad (j=0,1,2,\ldots).$$

Оно нормировано

$$\langle 0|0\rangle = 1.$$

2). Одночастичные состояния $|j,\vec{k}\rangle = d_{j\vec{k}}^+|0\rangle.$

Они нормированы условием

$$\langle j,\vec{k}\,|\,j',\vec{k}'\rangle = (-)^j \delta_{jj'}\,\delta(\vec{k}-\vec{k}')$$

и являются собственными состояниями гамильтониана (4.15)

$$H_0^\delta |j,\vec{k}\rangle = \omega^\delta_{j\vec{k}}\,|j,\vec{k}\rangle .$$

3). Многочастичные состояния. Если имеется группа n -частиц с импульсами $\vec{k}_1,\dots,\vec{k}_n$, состоящая из ν_1, ν_2 , ... , ν_α $(n=\nu_1+\nu_2+\dots+\nu_\alpha)$ одинаковых частиц (т.е. с одинаковыми индексами j), то такое состояние описывается

$$|j_1\vec{k}_1,\dots,j_n\vec{k}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{\nu_1!\dots\nu_\alpha!}}\, d^+_{j_1\vec{k}_1}\dots d^+_{j_n\vec{k}_n}|0\rangle .$$

Они также являются собственными состояниями гамильтониана H_0^δ :

$$H_0^\delta |j_1\vec{k}_1,\dots,j_n\vec{k}_n\rangle = \left(\omega^\delta_{j_1\vec{k}_1}+\dots+\omega^\delta_{j_n\vec{k}_n}\right)|j_1\vec{k}_1,\dots,j_n\vec{k}_n\rangle .$$

Все эти состояния образуют полную систему в векторном пространстве $\mathcal{H}^\delta$, т.е.

$$\circledast^\delta \underset{Df}{=} |0\rangle\langle 0| + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j_1\dots j_n=0}^{\infty}(-)^{j_1+\dots+j_n}\int d\vec{k}_1\dots\int d\vec{k}_n\,|j_1\vec{k}_1,\dots,j_n\vec{k}_n\rangle\langle j_1\vec{k}_1,\dots,j_n\vec{k}_n| = 1 .$$

Что происходит с пространством $\mathcal{H}^\delta$ при $\delta\to 0$? При $\delta\to 0$ массы всех "ду́ховых" квантово растут, согласно (4.16). Поэтому, если мы характеризуем физические состояния определённым значением энергии, то в пределе $\delta \to 0$ ни одно физическое состояние с произвольным, но конечным значением энергии не может состоять из ду́ховых квантов. В этом смысле

$$\lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^{\delta} = \mathcal{H}, \tag{4.18}$$

где $\mathcal{H}$ является гильбертовым пространством, состоящим из

1) вакуума $|0\rangle$, причём

$$a_{\vec{k}}|0\rangle = 0;$$

2) одночастичных состояний $|\vec{k}\rangle = a^{+}_{\vec{k}}|0\rangle$, нормированных условием

$$\langle \vec{k}|\vec{k}'\rangle = \delta(\vec{k}-\vec{k}');$$

3) многочастичных состояний

$$|\vec{k}_1,\ldots,\vec{k}_n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\, a^{+}_{\vec{k}_1}\ldots a^{+}_{\vec{k}_n}|0\rangle.$$

Соотношение полноты записывается следующим образом:

$$\otimes \underset{Df}{=} |0\rangle\langle 0| + \sum_{n=1}^{\infty}\int d\vec{k}_1\ldots\int d\vec{k}_n\, |\vec{k}_1,\ldots,\vec{k}_n\rangle\langle\vec{k}_1,\ldots,\vec{k}_n| = 1.$$

5. Функции Грина поля $\Phi^{\delta}(x)$

Рассмотрим прежде всего перестановочную функцию поля $\Phi^{\delta}(x)$, т.е. коммутатор

$$\Delta^{\delta}(x-y) = \left[\Phi^{\delta}(x), \Phi^{\delta}(y)\right]_{-}. \tag{5.1}$$

Подставляя в (5.I) представление (4.8) и используя (4.9) и (4.I3), получим

$$\Delta^{\delta}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-)^j A_j^{\delta} \Delta_j^{\delta}(x), \tag{5.2}$$

где

$$\Delta_j^{\delta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k\, \mathcal{E}(k_0)\, \delta(k^2 - m_j^2(\delta))\, e^{-ikx} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \mathcal{E}(x_0)\, \delta(x^2) - \frac{m_j(\delta)}{4\pi i \sqrt{x^2}}\, \theta(x^2)\, J_1\left(m_j(\delta)\sqrt{x^2}\right). \tag{5.3}$$

Так как ряд (5.2) абсолютно сходится, то

$$\Delta^{\delta}(x) = 0 \qquad \text{при} \qquad x^2 < 0. \tag{5.4}$$

Таким образом, оператор $\phi^{\delta}(x)$ удовлетворяет локальным перестановочным соотношениям.

Введём теперь $\Delta^{\delta}_{(\pm)}$ функции, согласно

$$\Delta^{\delta}_{(-)}(x-y) = \Delta^{\delta}_{(+)}(y-x) = \langle 0 | \phi^{\delta}(x)\, \phi^{\delta}(y) | 0 \rangle. \tag{5.5}$$

Имеем

$$\Delta^{\delta}_{(-)}(x) = \sum_{j=0}^{\infty} (-)^j A_j^{\delta} \Delta^{\delta}_{j(-)}(x), \tag{5.6}$$

где

$$\Delta^{\delta}_{j(-)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4k\, \theta(k_0)\, \delta(k^2 - m_j^2(\delta))\, e^{-ikx}. \tag{5.7}$$

При $x^2 \to 0$ имеем, согласно /2/,

$$\Delta^{\delta}_{j(-)}(x) = -\frac{i}{4\pi}\varepsilon(x_0)\delta(x^2) - \frac{1}{4\pi^2 x^2} +$$

$$+ \frac{m_j^2}{16\pi^2}\log\frac{m_j^2|x^2|}{4} + \frac{i\,m_j^2}{16\pi}\varepsilon(x_0)\theta(x^2) + O(x^2\log x^2).$$

Подставляя это разложение в (5.6), получим:

$$\Delta^{\delta}_{(-)}(x) = \left[-\frac{i}{4\pi}\varepsilon(x_0)\delta(x^2) - \frac{1}{4\pi^2 x^2}\right]\sum_{j=0}^{\infty}(-)^j A^{\delta}_j +$$

$$+ \left[\frac{1}{16\pi^2}\log\frac{|x^2|}{4} + \frac{i}{16\pi}\varepsilon(x_0)\theta(x^2)\right]\sum_{j=0}^{\infty}(-)^j A^{\delta}_j m_j^2 +$$

$$+ \frac{1}{16\pi^2}\sum_{j=0}^{\infty}(-)^j A^{\delta}_j m_j^2 \log m_j^2 + O(x^2\log x^2) =$$

$$= \frac{m^2}{16\pi^2}\sum_{j=0}^{\infty}(-)^j A^{\delta}_j \mu_j \log\mu_j + O(x^2\log x^2).$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (3.9). Отсюда следует, что функция $\Delta^{\delta}_{(-)}(x)$ ограничена в нуле и

$$\Delta^{\delta}_{(-)}(0) = \frac{m^2}{16\pi^2}\sum_{j=0}^{\infty}(-)^j A^{\delta}_j \mu_j \log\mu_j < \infty . \tag{5.8}$$

Это означает, что оператор $\phi^\delta(x)$ хорошо определён, так как

$$\langle 0|\phi^\delta(x)\phi^\delta(x)|0\rangle = \Delta^\delta_{(-)}(0) < \infty. \tag{5.9}$$

Рассмотрим теперь причинную функцию Грина

$$\Delta^\delta_c(x-y) = \langle 0|T(\phi^\delta(x)\phi^\delta(y))|0\rangle =$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}(-)^j A^\delta_j \Delta^\delta_{jc}(x-y), \tag{5.10}$$

где

$$\Delta^\delta_{jc}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4 i}\int \frac{dk\, e^{-ikx}}{m_j^2(\delta)-k^2-i\varepsilon}.$$

Иначе

$$\Delta^\delta_c(x) = \frac{1}{(2\pi)^4 i}\int dk\, \tilde{\Delta}^\delta_c(k^2) e^{-ikx}, \tag{5.11}$$

где

$$\tilde{\Delta}^\delta_c(k^2) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(-)^j A^\delta_j}{m_j^2(\delta)-k^2-i\varepsilon} = \frac{1}{m^2-k^2-i\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{v_n \ell^{2n}(k^2-m^2)^n}{\prod_{j=1}^{n+2}\left(1-\frac{\delta}{j}\frac{k^2-m^2+i\varepsilon}{m^2}\right)}. \tag{5.12}$$

Функция $\tilde{\Delta}^\delta_c(k^2)$ аналитична комплексной k^2-плоскости при $\operatorname{Im} k^2 \geqslant 0$.

Запаздывающая и опережающая функции Грина могут быть построены согласно формулам:

$$\Delta^{\delta}_{ret}(x) = \theta(x_0)\Delta^{\delta}(x) = \Delta^{\delta}_{c}(x) + \Delta^{\delta}_{(+)}(x)$$

$$\Delta^{\delta}_{adv}(x) = -\theta(-x_0)\Delta^{\delta}(x) = \Delta^{\delta}_{c}(x) - \Delta^{\delta}_{(-)}(x). \qquad (5.13)$$

Они удовлетворяют условиям:

$$\Delta^{\delta}_{ret}(x) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} x^2 < 0 \\ x^2 > 0, \ x_0 < 0 \end{cases}$$

$$\Delta^{\delta}_{adv}(x) = 0 \quad \text{при} \quad \begin{cases} x^2 < 0 \\ x^2 > 0, \ x_0 > 0. \end{cases} \qquad (5.14)$$

Итак, мы видим, что все функции Грина и перестановочная функция удовлетворяют всем требованиям локальной квантовой теории поля. Значит, поле $\phi^{\delta}(x)$ является локальным.

Между регуляризованными функциями Δ^{δ}_{c} и $\Delta^{\delta}_{(\pm)}$ справедливы соотношения

$$\Delta^{\delta}_{c}(x) = \theta(x_0)\Delta^{\delta}_{(-)}(x) + \theta(-x_0)\Delta^{\delta}_{(+)}(x)$$

$$\Delta^{\delta *}_{c}(x) = \theta(-x_0)\Delta^{\delta}_{(-)}(x) + \theta(x_0)\Delta^{\delta}_{(+)}(x). \qquad (5.15)$$

Отметим ещё одно соотношение, играющее важную роль при доказательстве унитарности регуляризованной S-матрицы:

$$\langle 0|T\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu}\phi^\delta(x)\frac{\partial}{\partial y_\nu}\phi^\delta(y)\right)|0\rangle=\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial y_\nu}\langle 0|T(\phi^\delta(x)\phi^\delta(y))|0\rangle. \tag{5.16}$$

Другими словами, при $\delta>0$ T-произведение в смысле Вика (правая часть соотношения (5.16)) равно T-произведению в смысле Дайсона (левая часть (5.16)), т.е. условно

$$T_W = T_D. \tag{5.17}$$

Действительно, для полей $\phi_j^\delta(x)$ легко получить

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial y_\nu}\langle 0|T(\phi_j^\delta(x)\phi_{j'}^\delta(y))|0\rangle =$$

$$=\langle 0|T\left(\frac{\partial\phi_j^\delta(x)}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\phi_{j'}^\delta(y)}{\partial y_\nu}\right)|0\rangle +$$

$$+i(-)^j\delta_{jj'}\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0}\delta^{(4)}(x-y).$$

Поэтому

$$\frac{\partial^2}{\partial x_\mu \partial y_\nu}\langle 0|T(\phi^\delta(x)\phi^\delta(y))|0\rangle-\langle 0|T\left(\frac{\partial\phi^\delta(x)}{\partial x_\mu}\cdot\frac{\partial\phi^\delta(y)}{\partial y_\nu}\right)|0\rangle =$$

$$=i\delta_{\mu 0}\delta_{\nu 0}\delta^{(4)}(x-y)\sum_{j=0}^{\infty}(-)^j A_j^\delta = 0.$$

согласно (3.9). Таким образом, справедливы соотношения

$$\partial_\mu \partial_\nu \Delta_c^\delta(x) = \Theta(x_0)\,\partial_\mu \partial_\nu \Delta_{(-)}^\delta(x) + \Theta(-x_0)\,\partial_\mu \partial_\nu \Delta_{(+)}^\delta(x)$$

$$\partial_\mu \partial_\nu \Delta_{(-)}^\delta(x) = \Theta(x_0)\,\partial_\mu \partial_\nu \Delta_c^\delta(x) + \Theta(-x_0)\,\partial_\mu \partial_\nu \Delta_c^{\delta *}(x). \tag{5.18}$$

6. Взаимодействующая система до снятия регуляризации

Взаимодействующая система описывается плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L}^\delta(x) = \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}(-)^j \phi_j^\delta(x)(\Box - m_j^2(\delta))\phi_j^\delta(x) + gU\Big(\sum_{j=0}^{\infty}(-)^j \sqrt{A_j^\delta}\,\phi_j^\delta(x)\Big). \tag{6.1}$$

Полный гамильтониан этой системы имеет вид

$$H^\delta = H_0^\delta + H_I^\delta, \tag{6.2}$$

где

$$H_0^\delta = \sum_{j=0}^{\infty}(-)^j \int d\vec{k}\; \omega_{j\vec{k}}^\delta\, d_{j\vec{k}}^+ d_{j\vec{k}} \tag{6.3}$$

$$H_I^\delta = -g\int d\vec{x}\, :U(\phi^\delta(\vec{x},0)): \tag{6.4}$$

Хотя оператор $\phi^{\delta}(x)$ хорошо определён, как было показано в предыдущем параграфе, гамильтониан H_I^{δ} не определён, поскольку теория трансляционно инвариантна. Поэтому для того, чтобы оператор H_I^{δ} был хорошо определён и самосопряжен, необходимо ввести функцию, включающую взаимодействие. Итак, вместо константы связи введём неотрицательную функцию $g(\vec{x})$, убывающую на бесконечности достаточно быстро, чтобы сходился интеграл

$$\int d\vec{x}\, g(\vec{x}) < \infty .$$

Будем считать, что $g(\vec{x})$ удовлетворяют условиям:

(1) $0 \leq g(\vec{x}) \leq g$

(2) $g(0) = g$

(3) $|g(\vec{x}) - g| < \varepsilon$ в некоторой сфере около точки $\vec{x} = 0$

(4) $g(\vec{x}) \in Z_a \quad \left(a < \frac{2\rho}{2\rho - 1} \right)$.

Пространство основных функций $Z_a \left(1 < a < \frac{1}{2\rho - 1}\right)$ состоит из всех тех целых функций $f(z_1, \ldots, z_n)$ от n комплексных переменных $z_j = x_j + i y_j \ (j = 1, \ldots, n)$, которые удовлетворяют условиям:

(I) для любой $f(z_1, \ldots, z_n) \in Z_a$ существуют такие положительные $C > 0$ и $A_j > 0 \ (j = 1, \ldots, n)$, что

$$|f(z_1, \ldots, z_n)| \leq C \exp\left\{ \sum_{j=1}^{n} A_j \, |z_j|^a \right\}; \qquad (6.5)$$

(2) для любых $y_1, \ldots, y_n$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \, |f(x_1 + i y_1, \ldots, x_n + i y_n)| < \infty .$$

Хотя оператор $\Phi^{\delta}(x)$ хорошо определён, как было показано в предыдущем параграфе, гамильтониан H_I^{δ} не определён, поскольку теория трансляционно инвариантна. Поэтому для того, чтобы оператор H_I^{δ} был хорошо определён и самосопряжен, необходимо ввести функцию, включающую взаимодействие. Итак, вместо константы связи введём неотрицательную функцию $g(\vec{x})$, убывающую на бесконечности достаточно быстро, чтобы сходился интеграл

$$\int d\vec{x}\; g(\vec{x}) < \infty .$$

Будем считать, что $g(\vec{x})$ удовлетворяют условиям:

(1) $0 \leq g(\vec{x}) \leq g$

(2) $g(0) = g$

(3) $|g(\vec{x}) - g| < \varepsilon$ в некоторой сфере около точки $\vec{x} = 0$

(4) $g(\vec{x}) \in Z_a \quad \left(a < \frac{2\rho}{2\rho - 1} \right)$.

Пространство основных функций $Z_a \left(1 < a < \frac{1}{2\rho-1} \right)$ состоит из всех тех целых функций $f(z_1, \ldots, z_n)$ от n комплексных переменных $z_j = x_j + i y_j \; (j = 1, \ldots, n)$, которые удовлетворяют условиям:

(I) для любой $f(z_1, \ldots, z_n) \in Z_a$ существуют такие положительные $C > 0$ и $A_j > 0 \; (j = 1, \ldots, n)$, что

$$|f(z_1, \ldots, z_n)| \leq C \exp\left\{ \sum_{j=1}^{n} A_j \, |z_j|^a \right\}; \tag{6.5}$$

(2) для любых $y_1, \ldots, y_n$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{\infty} dx_n \, |f(x_1 + i y_1, \ldots, x_n + i y_n)| < \infty .$$

Число a выбирается в зависимости от рассматриваемого лагранжиана взаимодействия и порядка роста формфактора $V(k^2\ell^2)$.

Пространство $\widetilde{Z}_a$, являющееся пространством фурье-образов функций f из Z_a, состоит из дифференцируемых функций $\mathcal{F}(p_1,\ldots,p_n)$, удовлетворяющих условию:

(3) всегда существуют такие положительные $C>0$ и $B_j>0$ $(j=1,\ldots,n)$, что

$$|\mathcal{F}(p_1,\ldots,p_n)| \leqslant C \exp\left\{-\sum_{j=1}^{n} B_j\, |p_j|^{\gamma}\right\}, \qquad (6.6)$$

где
$$\gamma = \frac{a}{a-1} > 1 \quad \text{и} \quad \rho < \frac{\gamma}{2}. \qquad (6.7)$$

Итак, введём

$$H^{\delta}_{I,L} = \int d\vec{x}\, g\left(\frac{\vec{x}}{L}\right) : U\left(\phi^{\delta}(\vec{x},0)\right): , \qquad (6.8)$$

где L – большой параметр, так что

$$\lim_{L\to\infty} g\left(\frac{\vec{x}}{L}\right) = g(0) = g. \qquad (6.9)$$

Окончательно, полный гамильтониан, описывающий нашу систему, записывается в виде

$$H^{\delta}_{L} = H^{\delta}_{0} + H^{\delta}_{I,L}. \qquad (6.10)$$

Ещё раз подчеркнем, что при $\delta>0$ гамильтониан $H^{\delta}_{I,L}$ хорошо определён, так что не надо вводить никакого обрезания при больших импульсах (ультрафиолетовое обрезание).

Гамильтониан взаимодействия $H^{\delta}_{I,L}$ в представлении взаимодействия записывается в виде:

$$H^{\delta}_{I,L}(t) = e^{-iH_0^{\delta}t} H^{\delta}_{I,L} e^{iH_0^{\delta}t} =$$

$$= -\int d\vec{x}\, g\left(\frac{\vec{x}}{L}\right) : U(\phi^{\delta}(\vec{x},t)) : \tag{6.11}$$

Для того, чтобы построить S-матрицу, отвечающую за переходы между асимптотически свободными состояниями из векторного пространства $\mathcal{H}^{\delta}$, необходимо ввести понятие адиабатического включения взаимодействия. Для этого в (6.11) следует считать, что функция $g\left(\frac{\vec{x}}{L}\right)$ зависит ещё и от времени $t=x_0$, так что мы имеем функцию $g\left(\frac{x}{L}\right)=g\left(\frac{\vec{x}}{L}, \frac{x_0}{L}\right)$, причем

(1) $\int d^4x\, g(x) = \int d\vec{x} \int dx_0\, g(x_0,\vec{x}) < \infty$

(2) $\lim\limits_{L\to\infty} g\left(\frac{x}{L}\right) = g(0) = g_1$.

Итак:

$$H^{\delta}_{I,L}(t) = -\int d\vec{x}\, g\left(\frac{x}{L}\right) : U(\phi^{\delta}(x)) : \tag{6.12}$$

Тогда S-матрица записывается

$$S^{\delta,L} = T\exp\left\{-i\int_{-\infty}^{\infty} dt\, H_{I,L}^{\delta}(t)\right\} =$$

$$= T\exp\left\{i\int dx\, g\left(\frac{x}{L}\right) : U(\phi^{\delta}(x)) : \right\}. \qquad (6.13)$$

Здесь знак T имеет смысл оператора строгого упорядочения квантованных полей $\phi^{\delta}(x)$ по времени. Хронологическая свёртка, или причинная функция Грина операторов $\phi^{\delta}(x)$ даётся формулами (5.10-12).

Поскольку операторы $\phi^{\delta}(x)$ и $H_{I,L}^{\delta}(t)$ хорошо определены и локальны, $S^{\delta,L}$ -матрица на векторном пространстве $\mathcal{H}^{\delta}$ унитарна и микропричинна, т.е.

$$S^{\delta,L} \cdot S^{\delta,L+} \underset{Df}{=} S^{\delta,L} \circledast^{\delta} S^{\delta,L+} = 1 \qquad (6.14)$$

$$\frac{\delta}{\delta\phi^{\delta}(x)}\left(\frac{\delta S^{\delta,L}}{\delta\phi^{\delta}(y)} S^{\delta,L+}\right) = 0 \quad \text{при} \quad x \lesssim y. \qquad (6.15)$$

Дальнейшая задача состоит в переходе к пределам:

(1) $\delta \to 0$, т.е. устранение всех д̀уховых состояний из теории.

(2) $L \to \infty$ переход к бесконечному объёму.

Мы докажем существование и унитарность предельной S-матрицы в каждом порядке теории возмущений.

7. <u>Функции Грина в пределе $\delta \to 0$</u>

Функции Грина в пределе $\delta \to 0$ являются обобщёнными функциями, заданными на пространстве основных функций Z_a. Поэтому мы должны рассматривать несобственные предельные переходы, т.е. изучать пределы

$$\lim_{\delta\to 0}\int dx\, G^{\delta}(x) f(x) = \lim_{\delta\to 0}\int dk\, \tilde{G}^{\delta}(k)\tilde{f}(k) = ?, \tag{7.1}$$

где $G^{\delta}(x)$ – некоторая функция Грина, а $f(x)\in Z_a$.

Прежде всего, рассмотрим перестановочную функцию $\Delta^{\delta}(x)$. Имеем:

$$\lim_{\delta\to 0}\int dx\, \Delta^{\delta}(x) f(x) = \lim_{\delta\to 0}\int dk\, \tilde{\Delta}^{\delta}(k)\tilde{f}(k) =$$

$$= \lim_{\delta\to 0}\int\frac{dk}{(2\pi)^3}\tilde{f}(k)\sum_{j=0}^{\infty}(-)^j A_j^{\delta}\,\varepsilon(k_0)\,\delta(k^2-m_j^2(\delta)) =$$

$$= \int\frac{dk}{(2\pi)^3}\varepsilon(k_0)\,\delta(k^2-m^2)\tilde{f}(k) + \lim_{\delta\to 0} Q^{\delta}, \tag{7.2}$$

где

$$Q^{\delta} = \int\frac{dk}{(2\pi)^3}\tilde{f}(k)\sum_{j=1}^{\infty}(-)^j A_j^{\delta}\,\varepsilon(k_0)\,\delta(k^2-m_j^2(\delta)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty}(-)^j A_j^{\delta}\iint\frac{d\vec{k}\,dk_0}{(2\pi)^3} f(\vec{k},k_0)\,\varepsilon(k_0)\,\delta(k^2-m_j^2(\delta)). \tag{7.3}$$

Получим оценку

$$I_j^\delta = \left| \iint \frac{d\vec{k}\, dk_0}{(2\pi)^3} \tilde{f}(\vec{k}, k_0)\, \mathcal{E}(k_0)\, \delta(k^2 - m_j^2(\delta)) \right| =$$

$$= \left| \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^3 2\omega_{j\vec{k}}^\delta} \left[\tilde{f}(\vec{k}, \omega_{j\vec{k}}^\delta) - \tilde{f}(\vec{k}, -\omega_{j\vec{k}}^\delta) \right] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{d\vec{k}}{2\omega_{j\vec{k}}^\delta} \left[\left| \tilde{f}(\vec{k}, \omega_{j\vec{k}}^\delta) \right| + \left| \tilde{f}(\vec{k}, -\omega_{j\vec{k}}^\delta) \right| \right] \leqslant$$

$$\leqslant \mathrm{Const} \int \frac{d\vec{k}}{\omega_{j\vec{k}}^\delta} e^{-B\left[|\vec{k}|^\gamma + (\omega_{j\vec{k}}^\delta)^\gamma \right]}.$$

Воспользуемся неравенством

$$|\vec{k}|^\gamma + (\omega_{j\vec{k}}^\delta)^\gamma = |\vec{k}|^\gamma + \left(\sqrt{\vec{k}^2 + m_j^2} \right)^\gamma \geqslant h_1 (m_j)^\gamma + h_2 |\vec{k}|^\gamma,$$

где $h_1 = 2^{\frac{\gamma}{2} - 1}$, $\quad h_2 = 1 + 2^{\frac{\gamma}{2} - 1}$.

Получим

$$I_j^\delta \leqslant e^{-Bh_1 m_j^\gamma} \cdot \mathrm{Const} \cdot \int \frac{d\vec{k}\, e^{-Bh_2 |\vec{k}|^\gamma}}{\sqrt{m_j^2(\delta) + \vec{k}^2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\delta}{j} e^{-B_1 \left(\frac{j}{\delta} \right)^{\gamma/2}} \cdot \mathrm{Const}, \quad \text{где } B_1 = Bh_1 m^\gamma.$$

Теперь для величины Q^δ имеем оценку

$$|Q^\delta| \le \sum_{j=0}^{\infty} A_j^\delta I_j^\delta \le Const \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1+N)^2}{N^j} e^{\ell[(1+N)\frac{j}{\delta}]^\rho} \cdot \frac{\delta}{j} e^{-B_1\left(\frac{j}{\delta}\right)^{\gamma/2}}.$$

Поскольку $\frac{1}{2}\gamma > \rho$, то

$$|Q^\delta| \le \delta \cdot Const \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1+N)^2}{N^j j} \le \delta \cdot Const.$$

Окончательно имеем

$$\lim_{\delta\to 0} Q^\delta = 0.$$

Таким образом, перестановочная функция $\Delta^\delta(x)$ в пределе $\delta \to 0$ переходит в перестановочную функцию скалярного поля $\varphi(x)$:

$$\lim_{\delta\to 0} \Delta^\delta(x) = \Delta(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int dk\, \varepsilon(k_0)\,\delta(k^2-m^2)\, e^{-ikx}. \tag{7.4}$$

Точно таким же образом легко доказать, что в смысле обобщённых функций, заданных на Z_a ,

$$\lim_{\delta\to 0} \Delta^\delta_{(\pm)}(x) = \Delta_{(\pm)}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int dk\, \theta(\mp k_0)\,\delta(k^2-m^2)\, e^{-ikx}. \tag{7.5}$$

Существование этих пределов означает, что существует слабый предел

$$\lim_{\delta\to 0} \Phi^\delta(x) = \varphi(x), \tag{7.6}$$

где $\varphi(x)$ – поле скалярной частицы массы m , подчиняющееся уравнению

$$(\Box - m^2)\varphi(x) = 0.$$

Итак, в пределе $\delta \to 0$ все ду́ховые состояния исчезают. Это согласуется с утверждением

$$\lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}^{\delta} = \mathcal{H},$$

сделанным в конце § 4.

Рассмотрим теперь причинную функцию $\Delta_c^{\delta}(x)$. Имеем:

$$\lim_{\delta \to 0} \int dx\, \Delta_c^{\delta}(x) f(x) = \lim_{\delta \to 0} \int \frac{dk}{(2\pi)^4 i} \tilde{\Delta}_c(k) \tilde{f}(k) =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \int \frac{dk}{(2\pi)^4 i} \tilde{f}(k) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-)^j A_j^{\delta}}{m_j^2(\delta) - k^2 - i\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\delta \to 0} \int \frac{dk}{(2\pi)^4 i} \frac{\tilde{f}(k)}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{v_n \ell^{2n} (k^2 - m^2)^n}{\prod_{j=1}^{n+2} \left(1 - \frac{\delta}{j} \frac{k^2 - m^2 + i\varepsilon}{m^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int \frac{dk\, V(k^2 \ell^2) \tilde{f}(k)}{m^2 - k^2 - i\varepsilon}.$$

Этот интеграл сходится, поскольку при больших импульсах

$$|V(k^2\ell^2)\tilde{f}(k)| \leq C e^{\ell |k^2|^{\rho} \ell^{2\rho} - B\{|k_0|^{\gamma} + |\vec{k}|^{\gamma}\}}$$

и $2\rho < \gamma$.

Таким образом, причинная функция $\tilde{\Delta}_c^{\delta}(k)$ в пределе $\delta \to 0$ переходит в

$$\lim_{\delta \to 0} \tilde{\Delta}_c^{\delta}(k) = \frac{\bar{V}(k^2 \ell^2)}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} = \tilde{\Delta}_c(k). \tag{7.7}$$

Функция $\tilde{\Delta}_c(k)$ имеет только один полюс при $k^2 = m^2$, соответствующий скалярной частице массы m. Полюса, соответствующие духовым состояниям, исчезли. Функция $\bar{V}(k^2\ell^2)$ является целой и не соответствует никакому реальному состоянию. Она описывает нелокальный характер взаимодействия скалярных частиц.

Итак, в пределе $\delta \to 0$ теория становится нелокальной. Происходит как бы следующее. "Ду̀хи", удаляясь при предельном переходе, как память о себе, делают теорию нелокальной.

Таким образом, нелокальный характер взаимодействия, заложенный в лагранжиане классических полей (2.I), в квантовой теории поля проявляется, как остаточный эффект от нефизических духовых состояний, когда эти "ду̀хи" устраняются из теории при предельном переходе.

8. Существование и унитарность S-матрицы в пределе $\delta \to 0$ и $L \to \infty$

Перейдём к доказательству существования пределов при $\delta \to 0$ и $L \to \infty$ в выражении для регуляризованной S-матрицы (6.I3). Существеннна последовательность предельных переходов. Мы рассмотрим существование S-матрицы как

$$S = \lim_{L \to \infty} \lim_{\delta \to 0} S^{\delta, L}. \tag{8.I}$$

Рассмотрим переход $\delta \to 0$. Введённая нами регуляризация удовлетворяет всем свойствам, при выполнении которых предельная S^L-матрица

$$S^L = \lim_{\delta \to 0} S^{\delta, L} \tag{8.2}$$

конечна и унитарна. Доказательство изложено в работе /9/, оно полностью переносится на рассматриваемый здесь случай. Таким образом, S^L в (8.2) существует и

$$S^L S^{L+} = 1. \tag{8.3}$$

Рассмотрим теперь переход к пределу $L \to \infty$. Существование этого предела связано с устранением амплитуды перехода вакуум-вакуум и перенормировкой массы скалярной частицы δm^2 и волновой функции Z_2. Поэтому вместо выражения (6.13) необходимо рассматривать

$$S_r^{\delta, L} = e^{-i\Psi_L} \cdot T\exp\Big\{ i\int dx \Big[g\big(\tfrac{x}{L}\big) : U(\phi^\delta(x)) : - \\ - \tfrac{1}{2} g^2\big(\tfrac{x}{L}\big)\delta m^2 : \big(\phi^\delta(x)\big)^2 : - \tfrac{1}{2} g^2\big(\tfrac{x}{L}\big) Z_2 : \phi^\delta(x)(\Box - m^2)\phi^\delta(x) : \Big]\Big\}, \tag{8.4}$$

где

$$e^{i\Psi_L} = \lim_{\delta \to 0} \langle 0 | T\exp\Big\{ i\int dx \Big[g\big(\tfrac{x}{L}\big) : U(\phi^\delta(x)) : - \\ - \tfrac{1}{2} g^2\big(\tfrac{x}{L}\big)\delta m^2 : \big(\phi^\delta(x)\big)^2 : - \tfrac{1}{2} g^2\big(\tfrac{x}{L}\big) Z_2 : \phi^\delta(x)(\Box - m^2)\phi^\delta(x) : \Big]\Big\}.$$

Предел при $\delta \to 0$ этой S-матрицы с контрчленами δm^2 и Z_2 также существует, и предельная S-матрица унитарна, поскольку при $\delta > 0$ T-произведение в виковской и дайсоновской форме совпадает, как говорилось в конце § 5.

Предел при $L \to \infty$ будет существовать, и предельная S-матрица (8.I) будет унитарна (см./9/), если контрчлены δm^2 и Z_2 выбрать таким образом, чтобы сильно связанные части массового оператора скалярной частицы

$$\Sigma_r(k^2) = \Sigma(k^2) - g^2 \delta m^2 - g^2 Z_2 (k^2 - m^2) \tag{8.5}$$

в каждом порядке теории возмущений удовлетворяли условию:

$$\Sigma_r(m^2) = \Sigma_r'(m^2) = 0 \tag{8.6}$$

Таким образом, предельная S-матрица (8.I) существует и унитарна в каждом порядке теории возмущений.

В заключение выражаю благодарность проф. Д.И. Блохинцеву и проф. В.Я. Файнбергу за полезные обсуждения.

Литература:

1. Г.В. Ефимов. Commun. Math. Phys. (об одном классе реш-ний об ф 7, I38, I968; Препринт ИТФ-52,54, Киев, I968; Проблемы физики ЭЧАЯ, том. I, вып. I. 256, I970, Сб. ОИЯИ, 2-5400, Дубна, I970.
2. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, I957.
3. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев, М.К. Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений. Физматгиз, Москва, I958.

4. Д.И. Блохинцев. ЖЭТФ, 17, 116, 1947.

5. A. Pais, G.E. Uhlenbeck. Phys.Rev., 79, 145, 1950.

6. Г. Вентцель. Введение в квантовую теорию волновых полей. ОГИЗ, Гостехиздат, Москва, 1947.

7. К. Надь. Пространства состояний с индефинитной метрикой в квантовой теории поля. Библиотека сборника "Математика", "Мир", Москва, 1969.

8. С. Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИИЛ, Москва, 1963.

9. В.А. Алебастров, Г.В. Ефимов. ОИЯИ, Р2-6586, Дубна, 1972. Препринт ИТФ-72-110Р, Киев, 1972.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 декабря 1972 года.