29/I-73

Б-125

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

366/2-73

P2 - 6829

В.В. Бабиков, Г.В. Груша,
Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Шульгина

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ФАЗОВЫХ УРАВНЕНИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

P2 - 6829

В.В. Бабиков, Г.В. Груша,
Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Шульгина

ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ФАЗОВЫХ УРАВНЕНИЙ

Направлено в ТМФ

Бабиков В.В., Груша Г.В., Мир-Касимов Р.М., Шульгина Н.Б.

P2 - 6829

Приближенные методы решения релятивистских фазовых уравнений

Релятивистские фазовые уравнения используются при получении разностных уравнений для длины рассеяния и эффективного радиуса. Рассмотрены некоторые случаи точного решения таких уравнений. Предложен последовательный метод вычисления релятивистских поправок и развита теория возмущений.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1972

Babikov V.V., Grusha G.V., Mir-Kasimov R.M., Shulgina N.B.

P2 - 6829

Approximate Methods for Solution of Relativistic Phase Equations

Relativistic phase equations are used for obtaining difference equations for the scattering length and the effective radius. Some cases are considered when such equations are exactly soluble. The successive method is suggested for calculation of relativistic corrections and the perturbation theory is developed.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1972

§ I. Введение

Как показано в работе /I/, известный квантовомеханический метод фазовых функций /2-4/ удается распространить на случай релятивистского квазипотенциального /5-6/ рассеяния двух скалярных частиц в его конечно-разностной формулировке /7-9/. Соответствующие уравнения для фазовой функции, тангенса фазовой функции, парциальной амплитуды рассеяния и элементов диагональной по орбитальному моменту S -матрицы являются конечно-разностными уравнениями первого порядка, обобщающими дифференциальные фазовые уравнения нерелятивистской теории.

Представляет значительный теоретический и практический интерес найти и исследовать для релятивистских разностных фазовых уравнений случаи точного их решения, а также различные приближенные методы, например, теорию возмущений. Известно /2-4/, что метод фазовых функций является очень удобным для этой цели аппаратом, поскольку его уравнения формулируются непосредственно для тех величин, которые являются объектом исследования в задачах рассеяния.

В настоящей работе полученные ранее /I/ релятивистские фазовые уравнения используются при получении разностных уравнений для параметров рассеяния на короткодействующих потенциалах, в первую очередь длины рассеяния и эффективного радиуса, при точном учете релятивистской кинематики (§2). В § 3 используются некоторые случаи точного решения релятивистских фазовых уравнений, представляющие определенный физический интерес. Переход к нерелятивистскому пределу и вычисление первых релятивистских поправок к физическим величинам проводится в § 4. В § 5 развиваются теория возмущений и метод линеаризации (модифицированная теория возмущений).

§ 2. Рассеяние релятивистских частиц на короткодействующем потенциале

В нерелятивистской квантовой механике тангенс фазы рассеяния на короткодействующем потенциале (радиус действия R) может быть разложен в ряд по степеням безразмерного параметра $qR/\hbar$. Ограничение двумя первыми членами этого разложения приводит к известному приближению эффективного радиуса. В релятивистской задаче имеется дополнительная величина, обладающая размерностью длины,- комптоновская длина волны частицы $\lambda = \hbar/mc$. Вообще, в теории рассеяния релятивистских частиц, базирующейся на разностном уравнении Шредингера, фундаментальную роль играет релятивистский масштаб длины для данной частицы - комптоновская длина ее волны. Поэтому здесь разложение носит несколько иной характер, хотя, естественно, имеет правильный нерелятивистский предел.

В дальнейшем удобно ввести в релятивистской задаче величину Q , соответствующую энергии относительного движения в нерелятивистском случае

$$Q = 2(E_q - 1) = \left(2 \operatorname{sh} \frac{\chi_q}{2}\right)^2 , \tag{2.I}$$

где используется обычная для данного формализма параметризация полной энергии двух взаимодействующих частиц

$$2E_q = 2\operatorname{ch} \chi_q. \tag{2.2}$$

Таким образом, аналогом нерелятивистского импульса относительного движения является здесь величина $2sh\frac{\chi_q}{2}$.

В нерелятивистской задаче функция тангенса фазы разлагается в ряд по степеням импульса следующим образом /2-4/

$$t_\ell(r,q)=tg\,\delta_\ell(r,q)=-\frac{1}{(2\ell+1)!!(2\ell-1)!!}\sum_{n=0}^{\infty}a_{\ell n}(r)\,q^{2n+2\ell+1}. \qquad (2.3)$$

В релятивистском случае аналогичное (2.3) разложение имеет вид

$$t_\ell(r,\chi_q)=-\frac{1}{(2\ell+1)!!(2\ell-1)!!}\sum_{n=0}^{\infty}a_{\ell n}(r)\left(2sh\frac{\chi_q}{2}\right)^{2n+2\ell+1}. \qquad (2.4)$$

Тот факт, что в разложения (2.3) и (2.4) входят только нечетные степени соответствующих импульсов, отражает свойство нечетности фаз как в нерелятивистском $\delta_\ell(r,-q)=-\delta_\ell(r,q)$, так и в релятивистском случае $\delta_\ell(r,-\chi_q)=-\delta_\ell(r,\chi_q)$. /I/

Для короткодействующего потенциала основную роль в рассеянии играют состояния с малыми орбитальными моментами $\ell=0,1,2$. Первые коэффициенты $a_{\ell n}(r)$ разложения (2.4) связаны с известными физическими параметрами рассеяния. В частности, при $\ell=0$ величина $a_{00}(r)$ является релятивистским обобщением длины рассеяния, а величина $\rho_0(r)=2a_{01}(r)/a_{00}^2(r)$ соответствующим обобщением эффективного радиуса.

Имеет смысл остановиться на этом вопросе подробнее. В нерелятивистском случае короткодействующим считается любой потенциал, спадающий при $r\to\infty$ по крайней мере экспоненциальным образом

$V(r) \simeq O(e^{-\mu r})$, где $\mu > 0$ –произвольная величина, т.е. потенциал, имеющий конечный радиус действия $R = \mu^{-1}$. Действительно, тогда коэффициенты $a_{\ell n}(r)$ разложения (2.3) имеют порядок μ^{-2n}, так что безразмерным малым параметром является величина $(q/\mu)^2$.

Можно получить тот же самый ряд, если в формуле (2.4) воспользоваться разложением величины $2sh\frac{\chi q}{2}$ по степеням $q\lambda$ и ограничиться первыми его членами, что равносильно переходу к нерелятивистскому пределу. Если же мы хотим учитывать релятивистскую кинематику точным образом, то не следует ограничиваться в (2.4) малыми значениями величины $2sh\frac{\chi q}{2}$, а необходимо полагать малой величину R/λ, где R –радиус взаимодействия. Тогда коэффициенты $a_{\ell n}(\infty)$ имеют порядок $(R/\lambda)^{2n}$ и истинным параметром разложения является величина:

$$\frac{R}{\lambda} 2sh\frac{\chi q}{2} < 1. \tag{2.5}$$

Поэтому при сохранении точной релятивистской кинематики для сходимости ряда (2.4) мы должны потребовать выполнения условия малости радиуса действия потенциала по сравнению с комптоновской длиной волны

$$\frac{R}{\lambda} < 1. \tag{2.6}$$

Для потенциалов типа потенциала Юкавы, играющего особую роль в теориях взаимодействия элементарных частиц, радиус его действия непосредственно связан с массой обмениваемой частицы μ: $R = \hbar/\mu c$.

Очевидно, что условию (2.6) удовлетворяют потенциалы, возникающие за счет обмена частицами с массой, большей массы рассеиваемых частиц

$$\frac{m}{\mu} < 1 . \tag{2.7}$$

При получении искомых уравнений для коэффициентов $a_{\ell n}(\tau)$ разложения (2.4) будем исходить из полученного в /I/ конечно-разностного уравнения для тангенса фазовой функции

$$\Delta t_\ell(\tau, x_q) = \frac{V(\tau)}{W_\ell(\tau, x_q)} \left[S_\ell(\tau, x_q) + t_\ell(\tau, x_q) C_\ell(\tau, x_q) \right]^2 \times$$
$$\times \left\{ 1 + i \frac{V(\tau) C_\ell(\tau, x_q)}{W_\ell(\tau, x_q)} \left[S_\ell(\tau, x_q) + t_\ell(\tau, x_q) C_\ell(\tau, x_q) \right] \right\}^{-1} . \tag{2.8}$$

Функции $S_\ell(\tau, x_q)$, $C_\ell(\tau, x_q)$ и их вронскиан $W_\ell(\tau, x_q)$ представимы в виде степенных рядов

$$S_\ell(\tau, x_q) = \sqrt{\frac{\pi}{2} \operatorname{sh} x_q}\, (-1)^{\ell+1} (-2)^{(\ell+1)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{-\ell-\frac{1}{2}} (\operatorname{ch} x_q) =$$
$$= \left(\operatorname{ch} \frac{x_q}{2}\right)^{-\ell} \sum_{n=0}^{\infty} S_{\ell n}(\tau) \left(2 \operatorname{sh} \frac{x_q}{2}\right)^{2n+2\ell+1} , \tag{2.9}$$

$$C_\ell(\tau, x_q) = \sqrt{\frac{\pi}{2} \operatorname{sh} x_q}\, (-2)^{(-\ell)} P_{-\frac{1}{2}+i\tau}^{\ell+\frac{1}{2}} (\operatorname{ch} x_q) =$$
$$= \left(\operatorname{ch} \frac{x_q}{2}\right)^{\ell+1} \sum_{n=0}^{\infty} C_{\ell n}(\tau) \left(2 \operatorname{sh} \frac{x_q}{2}\right)^{2n-\ell} , \tag{2.10}$$

где

$$S_{\ell n} = \frac{\sqrt{\pi}\, (-2)^{(\ell+1)} (-1)^{\ell+1} \left(\tau + \frac{i}{2}\right)^{(n)} \left(-2 + \frac{i}{2}\right)^{(n)}}{2^{2n+\ell+1}\, \Gamma\left(\ell + \frac{3}{2} + n\right) n!} , \tag{2.11}$$

$$C_{\epsilon n}(\tau) = \frac{\sqrt{\pi}\,(-2)^{(-\ell)}\left(\tau+\frac{i}{2}\right)^{(n)}\left(-2+\frac{i}{2}\right)^{(n)}}{2^{2n-\ell}\,\Gamma(1/2-\ell+n)\,n!}\,. \tag{2.12}$$

В формулах (2.9)-(2.12) используется следующее обозначение обобщенной степени /7/

$$\tau^{(n)} = i^{n}\,\frac{\Gamma(-i\tau+n)}{\Gamma(-i\tau)}\,. \tag{2.13}$$

В дальнейшем потребуется также разложение

$$\mathrm{ch}^{\alpha}\frac{X_q}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}+n\right)}{\Gamma\left(-\frac{\alpha}{2}\right)2^{2n}\,n!}\left(2\,\mathrm{sh}\,\frac{X_q}{2}\right)^{2n}. \tag{2.14}$$

В частности, для вронскиана $W_\ell(\tau, X_q)$ имеем

$$W_\ell(\tau, X_q) = (-1)^{\ell}\frac{(-2)^{(\ell+1)}}{\tau^{(\ell+1)}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}+n\right)}{n!\,2^{2n}\,\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)}\left(2\,\mathrm{sh}\,\frac{X_q}{2}\right)^{2n+1}. \tag{2.15}$$

Подставляя разложения (2.4), (2.9), (2,10), (2.14), (2.15) в уравнение (2.8) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $2\,\mathrm{sh}\,\frac{X_q}{2}$, получаем рекуррентную систему конечно-разностных уравнений для коэффициентов $a_{\ell n}(\tau)$. Приведем здесь уравнение для коэффициента $a_{\ell 0}(\tau)$, определяющего основной член разложения (2.4)

$$\Delta a_{\ell 0}(\tau) = \frac{V(2)}{2\ell+1}(-1)^{\ell+1}\frac{\tau^{(\ell+1)}}{(-2)^{(\ell+1)}}\left[(-2)^{(\ell+1)} + a_{\ell 0}(2)\,(-2)^{(-\ell)}\right]^2 \times \tag{2.16}$$

$$\times\left\{1 + \frac{iV(2)}{2\ell+1}\,\frac{(-1)^{\ell+1}\tau^{(\ell+1)}(-2)^{(-\ell)}}{(-2)^{(\ell+1)}}\left[(-2)^{(\ell+1)} + a_{\ell 0}(2)\,(-2)^{(-\ell)}\right]\right\}^{-1}.$$

Граничным условием является

$$a_{l0}(0)=0. \tag{2.17}$$

В нерелятивистском пределе (2.16) переходит в известное нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dr}a_{l0}(r)=\frac{V(r)}{(2l+1)r^{2l}}\left[r^{2l+1}-a_{l0}(r)\right]^2. \tag{2.18}$$

Для случая $l=0$ приведем уравнения для двух первых коэффициентов разложения (2.4). Величина $a_{00}(r)\equiv a(r)$ является релятивистской длиной рассеяния и удовлетворяет сравнительно простому уравнению

$$\Delta a(r)=V(r)\,\frac{[r-a(r)]^2}{1-iV(r)[r-a(r)]}. \tag{2.19}$$

Величина $a_{01}(r)$ определяет релятивистский эффективный радиус $\rho_0(r)=$ $=\frac{2a_{01}(r)}{a_{00}^2(r)}$ и является решением уравнения

$$\Delta a_{01}(r)+X(r)\,a_{01}(r)=Y(r), \tag{2.20}$$

$$a_{01}(0)=0,$$

где введены обозначения

$$X(r)=\frac{2V(r)\{[a(r)-r]-\Delta a(r)\,iV(r)\}}{1-iV(r)[r-a(r)]}, \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned}Y(r)\cdot\{1-iV(r)[r-a(r)]\}&=\Delta a(r)\cdot\Big\{\frac{1}{8}+\\&+iV(r)\Big[a(r)r^2+\frac{1}{2}a(r)-\frac{13}{24}r-\frac{2}{3}r^3\Big]\Big\}-\\&-V(r)\Big[\frac{1}{3}r^4+r^2a^2(r)-\frac{4}{3}r^3a(r)+\frac{7}{12}r^2-\frac{1}{2}a^2(r)-\frac{4}{3}r\,a(r)\Big].\end{aligned} \tag{2.22}$$

Уравнение (2.20) имеет известный нерелятивистский предел /2-4/. Заметим, что в полной аналогии с нерелятивистским случаем не только при $\ell=0$ и $n=1$, но и при всех ℓ и $n \geqslant 1$ уравнения для коэффициентов $a_{\ell n}(r)$ линейны, и могут быть проинтегрированы в общем виде при известных решениях $a_{\ell 0}(r)$. В частности, если известна длина рассеяния $a(r)$, то решение уравнения (2.20) имеет вид

$$a_{01}(r) = a_{01}^{(0)}(r) \int_{c}^{\infty} \frac{[\hat{\theta}(r-r')-\hat{\theta}(-r')]}{a_{01}^{(0)}(r')} \cdot \frac{Y(r')}{[1+iX(r')]} dr', \quad (2.23)$$

где $a_{01}^{(0)}(r)$ является решением уравнения (2.20) при $Y(r)=0$:

$$a_{01}^{(0)}(r) = e^{i\int_0^{\infty}[\hat{\theta}(r-r')-\hat{\theta}(-r')]\,C_n[1+X(r')]dr'} . \quad (2.24)$$

Функция $a_{00}(r)=a(r)$ имеет смысл длины рассеяния на "обрезанном в точке r" потенциале

$$V(r',r) = V(r')\hat{\theta}(r-r')\hat{\theta}(r+r')[1-\hat{\theta}(-r-r')]. \quad (2.25)$$

В работе /I/ было указано, что фазовые функции при конечных значениях аргумента r являются из-за наличия мнимой части в функции $\hat{\theta}(r)$ комплексными даже для реальных потенциалов $V(r)$, но становятся, однако, асимптотически вещественными при $r \to \infty$. То же самое относится к рассмотренным в настоящем параграфе параметрам рассеяния на короткодействующем потенциале. В следующем параграфе выводятся более удобные в практических расчетах модифицированные уравнения для параметров рассеяния, решения которых удовлетворяют условию унитарности при произвольных значениях r.

§ 3. Некоторые точные решения фазовых уравнений

Как и в нерелятивистской теории точные решения релятивистских фазовых уравнений могут быть найдены в замкнутом аналитическом виде для некоторых простых потенциалов. Такими потенциалами являются, например, прямоугольный потенциальный барьер или яма конечного радиуса R.

Прежде, однако, мы приведем модифицированные фазовые уравнения, обладающие унитарными при всех r решениями, которые более удобны для получения точных решений. Фактически речь будет идти о новых функциях $\tilde{t}_\ell(r,x)$, $\tilde{A}_\ell(r,x)$, $\tilde{a}_{\ell n}(r)$ и т.д., обладающих теми же асимптотиками при $r \to \infty$ и $r \to 0$, что и рассмотренные выше величины $t_\ell(r,x)$, $A_\ell(r,x)$, $a_{\ell n}(r)$ и т.д., но являющимися отличными от них интерполяциями при конечных значениях r. Заметим, что аналогичная ситуация с возможностью различных интерполяций фазовых функций имеет место также в нерелятивистской теории для потенциалов, зависящих от импульса $V(r,p^2)$ /2/.

Положим

$$\tilde{t}_\ell(r,x) = \left\{t_\ell(r,x) + \frac{iV(r)}{2W_\ell(r,x)} s_\ell(r,x)\left[s_\ell(r,x) + t_\ell(r,x)c_\ell(r,x)\right]\right\} \times \tag{3.1}$$
$$\times \left\{1 - \frac{iV(r)}{2W_\ell(r,x)} c_\ell(r,x)\left[s_\ell(r,x) + t_\ell(r,x)c_\ell(r,x)\right]\right\}^{-1},$$

$$\tilde{A}_\ell(r,x) = \left\{A_\ell(r,x) + \frac{iV(r)s_\ell(r,x)}{2W_\ell(r,x)}\left[s_\ell(r,x) + A_\ell(r,x)e_\ell^{(1)}(r,x)\right]\right\} \times \tag{3.2}$$
$$\times \left\{1 - \frac{iV(r)e_\ell^{(1)}(r,x)}{2W_\ell(r,x)}\left[s_\ell(r,x) + A_\ell(r,x)e_\ell^{(1)}(r,x)\right]\right\}^{-1},$$

$$\tilde{S}_e(r,x)=\left\{S_e(r,x)-\frac{V(r)\,\ell_e^{(2)}(r,x)}{4W_e(r,x)}\left[-\ell_e^{(2)}(r,x)+S_e(r,x)\ell_e^{(1)}(r,x)\right]\right\}\times$$
$$\times\left\{1-\frac{V(r)\,\ell_e^{(1)}(r,x)}{4\,W_e(r,x)}\left[-\ell_e^{(2)}(r,x)+S_e(r,x)\ell_e^{(1)}(r,x)\right]\right\}^{-1}. \qquad (3.3)$$

Заметим, что функции $\tilde{t}_e$, $\tilde{A}_e$, $\tilde{S}_e$ связаны между собой теми же соотношениями, что и функции t_e, A_e, S_e.

Как нетрудно показать, имеют место следующие уравнения для функции $\tilde{t}_e(r,x)$:

$$\Delta\tilde{t}_e(r,x)\left\{1+\frac{iV(r)C_e(r,x)}{2W_e(r,x)}\left[S_e(r,x)+\tilde{t}_e(r,x)C_e(r,x)\right]+\frac{i}{2}\nabla\left[\frac{C_e(r,x)V(r)}{W_e(r,x)}\right]\times\right.$$
$$\left.\times\left[\nabla S_e(r,x)+\tilde{t}_e(r,x)\nabla C_e(r,x)\right]-\frac{i}{4}V(r)\nabla\left[\frac{V(r)\,C_e(r,x)}{W_e(r,x)}\right]\left[S_e(r,x)+\tilde{t}_e(r,x)C_e(r,x)\right]\right\}=$$
$$=\frac{V(r)}{2W_e(r,x)}\left[S_e(r,x)+\tilde{t}_e(r,x)C_e(r,x)\right]^2+\nabla\left[\frac{V(r)}{2W_e(r,x)}\right]\left[\nabla S_e(r,x)+\tilde{t}_e(r,x)\nabla C_e(r,x)\right]^2-$$
$$-\frac{1}{4}V(r)\nabla\left[\frac{V(r)}{W_e(r,x)}\right]\left[S_e(r,x)+\tilde{t}_e(r,x)C_e(r,x)\right]\left[\nabla S_e(r,x)+\tilde{t}_e(r,x)\nabla C_e(r,x)\right]. \qquad (3.4)$$

Аналогичные уравнения получаются для функций $\tilde{A}_e(r,x)$, $\tilde{S}_e(r,x)$. Разлагая $\tilde{t}_e(r,x)$ в ряд по степеням $2sh\,x/2$, аналогично разложению (2.4), получаем для коэффициентов $\tilde{a}_{en}(r)$ систему уравнений, исходя из уравнения (3.4). Приведем здесь лишь уравнение для длины рассеяния $\tilde{a}_{oo}(r)\equiv\tilde{a}(r)$:

$$\Delta\left(\tilde{a}(r)-r\right)=i\,\frac{\left[1-\frac{iV(r-i)}{2}(\tilde{a}(r)-r)\right]\left[\tilde{a}(r)-r+i-\frac{V(r)}{2}(\tilde{a}(r)-r)\right]}{1+i\frac{V(r)}{2}(\tilde{a}(r)-r)+i\,\frac{V(r-i)}{2}\left[\tilde{a}-2+i-\frac{V(r)}{2}(\tilde{a}(r)-r)\right]}. \qquad (3.5)$$

Функции $\tilde{a}(r)$ и $a(r)$ связаны соотношением

$$a(r)-r=\frac{\tilde{a}(r)-r}{1-\frac{i}{2}V(r)\left[\tilde{a}(r)-r\right]}. \qquad (3.6)$$

Подчеркнем еще раз, что асимптотики при $r \to \infty$ величин $a(r)$ и $\tilde{a}(r)$ совпадают

$$\tilde{a}(\infty) = a(\infty). \qquad (3.7)$$

Рассмотрим теперь конкретный потенциал, а именно, потенциальную яму глубиной V_0, имеющую радиус R:

$$V(r) = -V_0\,\theta(R-r), \; V_0 > 0. \qquad (3.8)$$

Нетрудно найти решение уравнений (2.I9) и (3.5) в области $r<R$. Соответственно имеем

$$a(r) = r - \frac{tg\,\sigma r}{sh\,\sigma - i(ch\,\sigma - 1)\,tg\,\sigma r}, \; r<R \qquad (3.9)$$

$$\tilde{a}(r) = r - \frac{tg\,\sigma r}{sh\,\sigma}, \; r<R. \qquad (3.10)$$

Здесь введено обозначение

$$\sigma = arch\left(\frac{V_0}{2}+1\right). \qquad (3.11)$$

В области $r>R$, где потенциал исчезает, имеем

$$a(r) = \tilde{a}(r) = R - \frac{tg\,\sigma R}{sh\,\sigma}. \qquad (3.12)$$

Выражение (3.I2) переходит в известное нерелятивистское выражение для длины рассеяния на потенциальной яме, если глубина ямы много меньше энергии покоя частицы $\frac{V_0}{mc^2} \to 0$ и $\sigma \to V_0^{1/2}$.

$$a(R) = R - \frac{\operatorname{tg}(R\sqrt{V_0})}{\sqrt{V_0}} . \tag{3.13}$$

Из уравнения (3.12) видно, что в релятивистском случае длина рассеяния также может при определенных значениях глубины и ширины ямы обращаться в бесконечность, что соответствует появлению в яме уровней с нулевой энергией связи. Условием этого является соотношение

$$R_n \sigma = (2n+1)\frac{\pi}{2} , \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.14}$$

Решение уравнения (3.4) также может быть найдено в случае потенциала (3.8) в явном виде. Соответствующая фаза рассеяния равна

$$\tilde{\delta}_c(r, \chi) = \chi r - \operatorname{arctg}\left(\frac{\operatorname{sh}\chi}{\operatorname{sh}\sigma} \operatorname{tg}\sigma r\right), \quad r \le R . \tag{3.15}$$

Для прямоугольного потенциального барьера $(V_0 > 0)$

$$V(r) = V_0\, \theta\,(R - r). \tag{3.16}$$

Следует разделять значения $V_0 < 4mc^2$ и $V_0 > 4mc^2$; соответственно параметризация имеет вид

$$\begin{aligned} \cos\sigma &= 1 - \frac{V_0}{2} , \quad V_0 < 4 , \\ \operatorname{ch}\sigma &= \frac{V_0}{2} - 1 , \quad V_0 > 4 , \end{aligned} \tag{3.17}$$

и длины рассеяния равны $(r \geq R)$

$$a(r) = \tilde{a}(r) = R - \frac{\operatorname{tg} \sigma R}{\sin \sigma}, \quad V_0 < 4, \tag{3.18}$$

$$a(r) = \tilde{a}(r) = R + \frac{\operatorname{tg} \sigma R}{\operatorname{sh} \sigma}, \quad V_0 > 4.$$

В предельном случае твердой отталкивательной сердцевины $(V_0 = \infty)$ длина рассеяния, как и в нерелятивистском случае, равна

$$\tilde{a}(r) = r, \quad r \leq R, \tag{3.19}$$

$$a(r) = \tilde{a}(r) = R, \quad r \geq R.$$

Соответственно тангенс фазы в области $r \geq R$ равен

$$t_\ell(r, X) = \tilde{t}_\ell(r, X) = -\frac{S_\ell(R, X)}{C_\ell(R, X)}. \tag{3.20}$$

В заключение отметим, что, как можно легко убедиться, длина рассеяния $\tilde{a}(r)$ для потенциала (3.8) удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dr} \tilde{a}(r) = \left(1 - \frac{\sigma}{\operatorname{sh} \sigma}\right) - \sigma \operatorname{sh} \sigma [\tilde{a}(r) - r]^2. \tag{3.21}$$

Любопытно, что уравнение (3.21) можно записать в виде, имеющем в точности вид нерелятивистского фазового уравнения для длины рассеяния, если ввести перенормированные величины $\bar{r}, \bar{a}(\bar{r}), \bar{V}$:

$$\bar{r} = r \frac{\sigma}{\operatorname{sh} \sigma}, \tag{3.22}$$

$$\bar{a}(\bar{r}) - \bar{r} = \tilde{a}(r) - r, \quad \bar{V} = V_0 + \frac{V_0^2}{4}.$$

Уравнение имеет вид

$$\frac{d}{d\bar{r}} \bar{a}(\bar{r}) = -\bar{V} [\bar{a}(\bar{r}) - \bar{r}]^2, \quad \bar{a}(0) = 0. \tag{3.23}$$

§ 4. Релятивистские поправки

Разностное уравнение Шредингера /I/ описывает релятивистское движение частицы в квазипотенциальном поле. В пределе $c \to \infty$ это уравнение переходит в уравнение Шредингера. Решения разностного уравнения переходят в решения уравнения Шредингера и т.д.

Естественно искать релятивистские поправки к различным квантовомеханическим величинам, исходя именно из разностного уравнения Шредингера и соответствующих фазовых уравнений.

Рассмотрим сначала длину рассеяния. Разложение по степеням комптоновской длины $\lambda\!\!\!^{-}$ ($\lambda\!\!\!^{-} = \frac{\hbar}{mc} \to 0$ при $c \to \infty$) имеет вид:

$$\tilde{a}(r) = \tilde{a}^{(0)}(r) + \lambda\!\!\!^{-}\tilde{a}^{(1)}(r) + \lambda\!\!\!^{-2}\tilde{a}^{(2)}(r) + O(\lambda\!\!\!^{-3}). \qquad (4.1)$$

В случае потенциалов $V(r)$, не зависящих от $\lambda\!\!\!^{-}$, получается следующее уравнение для первой релятивистской поправки $\tilde{a}^{(1)}(r)$ к длине рассеяния $\tilde{a}^{(0)}(r)$:

$$\frac{d}{dr}\tilde{a}^{(1)}(r) = 2V(r)\tilde{a}^{(1)}(r)\left[\tilde{a}^{(0)}(r) - r\right]. \qquad (4.2)$$

При начальных условиях $\tilde{a}^{(0)}(0) = 0$ и $\tilde{a}^{(1)}(0) = 0$ уравнение (4.2) не имеет нетривиальных решений.

Для поправки порядка $\lambda\!\!\!^{-2}$ получается уравнение

$$\frac{d}{dr}\tilde{a}^{(2)}(r) - 2V(r)\tilde{a}^{(2)}(r)\left[\tilde{a}^{(0)}(r) - r\right] =$$

$$= -\frac{V(r)}{6} - \frac{V^2(r)}{12}\left[\tilde{a}^{(0)}(r) - r\right]^2 - \frac{1}{12}\cdot\frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2}\left[\tilde{a}^{(0)}(r) - \qquad (4.3)\right.$$

$$\left. - r\right]^2 + \frac{1}{3}\frac{\partial V(r)}{\partial r}\left[\tilde{a}^{(0)}(r) - r\right];$$

$$\tilde{a}^{(2)}(0) = 0.$$

В случае потенциальной ямы уравнение (4.3) имеет решение

$$\tilde{a}^{(2)}(r) = \frac{V_0 r}{24\cos^2(r\sqrt{V_0})} - \frac{\sqrt{V_0}\, tg(r\sqrt{V_0})}{24}. \qquad (4.4)$$

Достаточно простой вид имеют также уравнения для новых поправок к тангенсу фазы в случае $l=0$:

$$\tilde{t}_0(r,q) = \tilde{t}_0^{(0)}(r,q) + \varkappa\, \tilde{t}_0^{(1)}(r,q) + \varkappa^2\, \tilde{t}_0^{(2)}(r,q) + O(\varkappa^3). \qquad (4.5)$$

Уравнение для первой поправки (q -волновое число)

$$\frac{d\tilde{t}_0^{(1)}(r,q)}{dr} = -\frac{V(r)}{q}\sin 2qr\, \tilde{t}_0^{(1)}(r,q),$$
$$\tilde{t}_0^{(0)}(0)=0, \qquad \tilde{t}_0^{(1)}(0)=0 \qquad (4.6)$$

легко интегрируется и дает

$$\tilde{t}_0^{(1)}(r,q) \equiv 0. \qquad (4.7)$$

Уравнение для второй поправки имеет вид

$$\frac{d\tilde{t}_0^{(2)}(r)}{dr} = -\frac{V(r)}{q}\sin 2qr\, \tilde{t}_0^{(2)}(r) + \varphi(q,r), \qquad (4.8)$$

где

$$\varphi(q,r) = \frac{1}{3}M(r,q)V(r)q - \frac{3}{4}M(r,q)N(r,q)\frac{dV(r)}{dr} -$$
$$-\frac{1}{2}V(r)q^2 r\, M(r,q)N(r,q) + \frac{1}{3}V(r)\,q\,N^2(r,q) +$$
$$+\frac{V^2(r)}{q}M^2(q,r) + \frac{1}{6}\frac{V^2(r)}{q}M^2(q,r)[N(q,r)\cos qr + \qquad (4.9)$$

$$+4M(q,r)\sin qr\Big] + \frac{V^3(r)}{6q^3} M^3(q,r)\cos^2 qr - \frac{N^2(q,r)}{12q} \times$$
$$\times \frac{\partial^2 V(r)}{\partial r^2} - \frac{4}{3} V(r)\frac{\partial V(r)}{\partial r}\cdot\frac{\cos qr}{q^2} M^3(q,r);$$

$$M(q,r) = \sin qr + \tilde{t}_0^{(0)}(r)\cos qr;$$

$$N(q,r) = \cos qr - \tilde{t}_0^{(0)}(r)\sin qr.$$

(4.10)

Решая уравнение (4.8), получим поправку порядка λ^2 к тангенсу фазовой функции

$$\tilde{t}_0^{(2)}(r) = \int_0^r \varphi(q,r')e^{-\frac{1}{q}\left(\int_{r'}^{r} V(r'')\sin 2qr''\,dr''\right)}dr'. \quad (4.11)$$

При получении поправок в случае $\ell \neq 0$ основную трудность представляет нахождение поправочных членов к свободным решениям уравнения Шредингера $S_\ell(r,\lambda)$, $C_\ell(r,\lambda)$. Можно идти двумя путями. Первый путь состоит в том, чтобы разлагать $H_0(r)$ и свободные решения $S_\ell(r,\lambda)$ и $C_\ell(r,\lambda)$ по степеням λ :

$$H_0 = H_0^{(0)} + \lambda H_0^{(1)} + \lambda^2 H_0^{(2)} + \ldots$$

$$S_\ell(r,\lambda) = j_\ell(qr) + \lambda S_\ell^{(1)}(r,q) + \lambda^2 S_\ell^{(2)}(r,q) + \ldots \quad (4.12)$$

$$C_\ell(r,\lambda) = -n_\ell(qr) + \lambda C_\ell^{(1)}(r,q) + \lambda^2 C_\ell^{(2)}(r,q) + \ldots$$

Тогда для поправок $S_e^{(n)}(r,q)$ и $C_e^{(n)}(r,q)$ к свободным решениям получатся обыкновенные дифференциальные уравнения, выражающие зависимость $n-x$ поправок от свободных нерелятивистских решений и $n-1$ низшую поправку.

Первая поправка к $j_e(qr)$ имеет вид

$$S_e^{(1)}(r,q) = -\frac{i\ell(\ell+1)}{2}\cdot\frac{j_e(qr)}{r}. \tag{4.13}$$

т.о., $S_0^{(1)}(r,q) \equiv 0.$

Вторая поправка удовлетворяет уравнению:

$$\frac{d^2}{dr^2}S_e^{(2)}(r,q) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}S_e^{(2)}(r,q) + q^2 S_e^{(2)}(r,q) =$$
$$= \frac{q^2 j_e(qr)}{4} + \frac{1}{12}\frac{d^4 j_e(qr)}{dr^4} - \frac{\ell(\ell+1)}{8r^2}\frac{d^2 j_e(qr)}{dr^2} + \tag{4.14}$$
$$+ \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\left[\frac{1}{r}\frac{d j_e(qr)}{dr} - \frac{j_e(qr)}{r^2} + i\frac{d}{dr}S_e^{(1)}(r,q) - \frac{i}{r}S_e^{(1)}(r,q)\right].$$

Еще более громоздкие уравнения получаются для последующих поправок. Ввиду этого мы воспользуемся способом вычисления поправок, связанным с рекуррентным соотношением, полученным в /7/,

$$S_e(r,X_q) = (-1)^{\ell}\frac{(sh X_q)^{\ell+1}}{r(\ell+1)}\,r\left(\frac{d}{d\,ch X_q}\right)^{\ell}\frac{\sin rX_q}{sh X_q}. \tag{4.15}$$

Используя разложения

$$\frac{d}{d\,ch X_q} = \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{q}{mc}\right)^2 - \frac{1}{4}\left(\frac{q}{mc}\right)^4\right]\frac{d}{q\,dq} + \dots \tag{4.16}$$

$$\sin rX_q = \left(1 + \frac{r\chi^2}{6}\frac{d^3}{dr^3}\right)\sin rq + \dots,$$

будем иметь

$$\left(\frac{d}{d\,ch\,\chi_q}\right)^{\ell}\frac{\sin(r\chi_q)}{sh\,\chi_q}=\left(\frac{d}{q\,dq}\right)^{\ell}\left(\frac{\sin qr}{q}\right)+\lambda^2\left[\frac{\ell q^2}{2}\left(\frac{d}{q\,dq}\right)^{\ell}+\right.$$

$$\left.+\frac{\ell(\ell-1)}{2}\frac{d^{\ell-1}}{(q\,dq)^{\ell-1}}+\frac{r}{6}\frac{d^3}{dr^3}\right]\left(\frac{\sin qr}{q}\right)+O(\lambda^4). \tag{4.17}$$

Для $S_\ell(r,\chi_q)$ получим

$$S_\ell(r,\chi_q)=j_\ell(qr)-\frac{i\ell(\ell+1)}{2}\left(\frac{\lambda}{r}\right)j_\ell(qr)-$$

$$-\lambda^2\left\{\ell(\ell+1)\left[\frac{1}{12}+\frac{\ell(\ell+1)}{8}\right]\frac{j_\ell(qr)}{r^2}+\right. \tag{4.18}$$

$$\left.+\frac{1}{6}\left[\frac{\ell(\ell+1)}{r}-q^2r\right]\frac{dj_\ell(qr)}{dr}\right\}+O(\lambda^3).$$

Из разложения (4.18) и соотношений

$$C_\ell(r,\chi_q)=(-1)^{\ell}S_{-\ell-1}(r,\chi_q),$$

$$n_\ell(qr)=(-1)^{\ell+1}j_{-\ell-1}(qr) \tag{4.19}$$

получаем

$$C_\ell(r,\chi_q)=-n_\ell(qr)+\frac{i\ell(\ell+1)}{2}\left(\frac{\lambda}{r}\right)n_\ell(qr)+$$

$$+\lambda^2\left\{\ell(\ell+1)\left[\frac{1}{12}+\frac{\ell(\ell+1)}{8}\right]\frac{n_\ell(qr)}{r^2}+\right. \tag{4.20}$$

$$\left.+\frac{1}{6}\left[\frac{\ell(\ell+1)}{r}-q^2r\right]\frac{d}{dr}n_\ell(qr)\right\}+O(\lambda^3).$$

Заметим, что поправки к $j_\ell(qr)$ регулярны при $r=0$, а поправки к $n_\ell(qr)$ сингулярны при $r=0$.

§ 5. Теория возмущений и метод линеаризации

В настоящем параграфе мы кратко остановимся на теории возмущений и методе линеаризации, которые весьма эффективно используются в нерелятивистском методе фазовых функций.

Пусть длина рассеяния $\tilde{a}(r)$ разложена по "степеням потенциала"

$$\tilde{a}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n(r). \qquad (5.1)$$

Тогда для первого борновского приближения $\tilde{a}_1(r)$ получается уравнение

$$\Delta \tilde{a}_1(r) = \frac{1}{2}\left[V(r)r^2 + V(r-i)(r-i)^2\right] \equiv \tilde{V}(r). \qquad (5.2)$$

Действительное решение этого уравнения

$$\tilde{a}_1(r) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left[\left(\hat{\theta}(r-r') - \hat{\theta}(-r')\right)\tilde{V}(r') + \left(\hat{\theta}^*(r-r') - \hat{\theta}^*(-r')\right)\tilde{V}^*(r')\right]dr' \qquad (5.3)$$

в нерелятивистском пределе переходит в величину (ср/2/)

$$a_1(r) = \int_0^{r} V(r')r'^2\,dr'. \qquad (5.4)$$

Для второго члена разложения (5.1) получается уравнение, также имеющее действительное решение

$$\Delta \tilde{a}_2(r) = \varphi(r)\,\tilde{a}_1(r) + \Psi(r), \qquad (5.5)$$

где

$$\varphi(r) = -(1+\nabla)\,[r\,V(r)]\,,$$

$$\psi(r) = -\frac{1}{4}(V(r)r)\,\nabla\,(V(r)r) + \frac{i}{4}(1+\nabla)[V(r)^2 r^3] +$$
$$+\frac{i}{4}V(r)[\nabla V(r)]\,[r(\nabla r^2) + (\nabla r)\,r^2]. \tag{5.6}$$

Применение теории возмущений к тангенсу фазовой функции

$$\tilde{t}_0(r, x_q) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{t}_{0n}(r, x_q) \tag{5.7}$$

приводит к уравнению для первого члена разложения (5.7)

$$\Delta\,\tilde{t}_{01}(r, x_q) = \frac{1}{\alpha\,sh\,x_q}(1+\nabla)[V(r)\sin^2 x_q\, r] \equiv \tilde{\tilde{V}}(r, x_q)\,. \tag{5.8}$$

Вещественное решение этого уравнения

$$\tilde{t}_{01}(r, x_q) = \frac{1}{2}\int_0^{\infty} Re\left[(\hat{\theta}(r-r') - \hat{\theta}(r'))\,\tilde{\tilde{V}}(r', x_q)\right] dr' \tag{5.9}$$

переходит в соответствующее выражение для нерелятивистской поправки к тангенсу фазовой функции (ср. /2/)

$$t_{01}(r) = -\frac{1}{q}\int_0^{r} V(r')\,\hat{j}_e^{\,2}(qr')\,dr'. \tag{5.10}$$

Для второго члена разложения (5.7) получается уравнение

$$\Delta\,\tilde{t}_{02}(r, x_q) = \tilde{t}_{01}(r, x_q)\,\xi(r, x_q) + \eta(r, x_q), \tag{5.11}$$

где

$$\xi(r, \chi_q) = \frac{1}{\operatorname{sh}\chi_q}(1+\nabla)\left[V(r)\sin\chi_q r\right],$$

$$\eta(r, \chi_q) = \frac{1}{4\operatorname{sh}\chi_q}\left(V(r)\sin\chi_q r\right)\nabla\left(V(r)\sin\chi_q r\right) +$$
$$+\frac{i}{4\operatorname{sh}^2\chi_q}(1+\nabla)\left[V^2(r)\sin^3\chi_q r\right] + \frac{i}{4\operatorname{sh}^2\chi_q}V(r)\left[\nabla V(r)\right]\times \tag{5.12}$$
$$\times\left[(\sin\chi_q r)\nabla(\sin^2\chi_q r) + (\sin^2\chi_q r)\nabla(\sin\chi_q r)\right].$$

В заключение данного параграфа приведем линеаризованные разностные уравнения для первых двух членов разложения длины рассеяния

$$\tilde{a}(r) = \sum_{n=0}^{\infty}\tilde{a}^{(n)}(r) \tag{5.13}$$

$$\Delta\tilde{a}^{(1)}(r) = \left\{(1+\nabla)\left(\frac{Vr^2}{2}\right) - 2\tilde{a}^{(1)}(r)(1+\nabla)\left(\frac{Vr}{2}\right) -\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}(Vr)\nabla(Vr) + \tilde{a}^{(1)}(r)(2r-i)V\nabla V\right\}\times\left\{1 - i(1+\nabla)\left(\frac{Vr}{2}\right) +\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}(Vr)\nabla(Vr)\right\}^{-1}; \tag{5.14}$$

$$\Delta\tilde{a}^{(2)}(r) = \left\{\frac{V(r)}{2}\left[\tilde{a}^{(1)}(r)^2 + r^2 - 2r\tilde{a}^{(2)}(r)\right] +\right.$$
$$+\frac{V(r-i)}{2}\left[(\tilde{a}^{(1)}(r))^2 + (r-i)^2 - 2(r-i)\tilde{a}^{(2)}(r)\right] - \frac{V(r)V(r-i)}{4}\times$$
$$\left.\times\left[r(r-i) - \tilde{a}^{(1)}(r)(2r-i) - \tilde{a}^{(2)}(r)(2r-i) + (\tilde{a}^{(1)}(r))^2\right]\right\}\times \tag{5.15}$$
$$\times\left\{1 + \frac{i}{2}V(r)(\tilde{a}^{(1)}(r) - r) + \frac{i}{2}V(r-i)(\tilde{a}^{(1)}(r) - (r-i)) -\right.$$
$$\left.-\frac{1}{4}V(r)V(r-i)(\tilde{a}^{(1)}(r) - r)\right\}^{-1}.$$

§ 6. Заключение

Выше рассмотрены некоторые возможности применения релятивистского метода фазовых функций к проблеме вычисления релятивистской длины рассеяния для ряда потенциалов,в частности,для точно решаемого случая прямоугольного потенциального барьера и прямоугольной ямы.Предложен также последовательный метод вычисления релятивистских поправок к параметрам рассеяния,развит ряд приближенных способов решения конечно-разностных уравнений.

Представляется весьма актуальной задача разработки алгоритмов точного решения релятивистских фазовых уравнений для произвольных потенциалов. Тогда развитый в /I/ и настоящей работе подход можно будет эффективно использовать в большом ряде конкретных физических задач.

Авторы приносят благодарность В.Р.Гарсеванишвили, А.Д.Донкову, Е.П.Жидкову, В.Г.Кадышевскому, М.Д.Матееву, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодорову за полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.В.Бабиков, Г.В.Груша, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Шульгина. Препринт ОИЯИ , Дубна, (1972).
2. В.В.Бабиков "Метод фазовых функций в квантовой механике" Наука, Москва, 1968.
3. В.В.Бабиков, УФН, 92, 3 (1967).
4. Ф.Калоджеро "Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния", "Мир", Москва, 1972.
5. **A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, Nuovo Cimento** 29,380(1963).
6. **V.G.Kadyshevsky, Nucl.Phys.** B6, 125 (1968).
7. В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Скачков, ЭЧАЯ. т.2,вып.3.
8. **V.G.Kadyshevsky, R.M.Mir-Kasimov, N.B.Skachkov. Nuovo Cimento,** 55A,233(1968).
9. **M.Freeman, M.D.Mateev, R.M.Mir-Kasimov, Nucl. Phys.** B12, 197 (1969).

Рукопись поступила в издательский отдел
I декабря 1972 года.