ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6828

В.В. Бабиков, Г.В. Груша,
Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Шульгина

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ ФАЗОВЫЕ УРАВНЕНИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

P2 - 6828

В.В. Бабиков, Г.В. Груша,
Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Шульгина

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЕ ФАЗОВЫЕ УРАВНЕНИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕОРИИ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО РАССЕЯНИЯ

Направлено в ТМФ

§ I. Введение

Среди различных подходов к релятивистской проблеме двух тел квазипотенциальный метод[I-4]+/ обладает рядом преимуществ. Одним из главных достоинств этого формализма является, на наш взгляд, трехмерность квазипотенциальных уравнений, что позволяет использовать привычные представления и методы нерелятивистской квантовой механики.

В импульсном пространстве трехмерные релятивистские уравнения для амплитуды рассеяния двух скалярных частиц с равными массами $A(\vec{p},\vec{q})$ и для волновой функции относительного движения $\Psi_q(\vec{p})$, полученные в рамках гамильтонова формализма квантовой теории поля[2], имеют вид++/:

$$A(\vec{p},\vec{q}) = -\frac{1}{4\pi} V(\vec{p},\vec{q}) + \frac{1}{(2\pi)^3}\int \frac{V(\vec{p},\vec{k})\, A(\vec{k},\vec{q})\, d\Omega_k}{2E_q - 2E_k + i\varepsilon} , \qquad (I.I)$$

$$\Psi_q(\vec{p}) = (2\pi)^3\sqrt{1+\vec{p}^{\,2}}\,\delta(\vec{p}-\vec{q}) + \frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\int V(\vec{p},\vec{k})\,\Psi_q(\vec{k})\, d\Omega_k}{2E_q - 2E_p + i\varepsilon} . \qquad (I.2)$$

Здесь $d\Omega_k = \frac{d^3k}{\sqrt{1+k^2}}$ лоренц-инвариантный элемент объема, $V(\vec{p},\vec{q})$ -квазипотенциал, зависящий, вообще говоря, от энергии $E_q = \sqrt{1+\vec{q}^{\,2}}$. Волновая функция связана с ре-

---

+/ В обзорах[3,4] имеется подробный список литературы по квазипотенциальному подходу в квантовой теории поля.

++/ В данной работе всюду используется система единиц, в которой $\hbar = c = m = 1$, где m -масса частицы.

лятивистской амплитудой рассеяния вне энергетической поверхности $E_p \neq E_q$ соотношением

$$\psi_q(\vec{p}) = (2\pi)^3 \sqrt{1+\vec{p}^2}\,\delta(\vec{p}-\vec{q}) - 4\pi \frac{1}{2E_q - 2E_p + i\varepsilon} A(\vec{p},\vec{q}). \qquad (I.3)$$

Амплитуда $A(\vec{p},\vec{q})$ удовлетворяет нерелятивистскому по виду условию унитарности[5]:

$$\operatorname{Im} A(\vec{p},\vec{q}) = \frac{|\vec{q}|}{4\pi} \int A(\vec{p},\vec{k}) A^*(\vec{k},\vec{q})\, d\omega_k , \qquad (I.4)$$

где $d\omega_k$-угловая часть трехмерного элемента объема.

Дифференциальное сечение рассеяния выражается через амплитуду рассеяния на энергетической поверхности $E_p = E_q$ также нерелятивистским соотношением

$$\frac{d\sigma}{d\omega} = |A(\vec{p},\vec{q})|^2 . \qquad (I.5)$$

Уравнения (I.2) и (I.3) содержат интегрирование по трехмерному импульсному пространству Лобачевского. Они носят абсолютный характер по отношению к геометрии импульсного пространства, т.е. могут быть получены из своих нерелятивистских аналогов (уравнений Липпмана-Швингера и Шредингера) путем замены нерелятивистских (евклидовых) кинематических связей (выражения для элемента объема, связь между энергией и импульсом) на их релятивистские (неевклидовы) аналоги

$$E_q = \frac{\vec{q}^2}{2} \longrightarrow E_q = \sqrt{1+\vec{q}^2}\,, \qquad (I.6)$$

$$d\Omega_k = d^3k \longrightarrow d\Omega_k = \frac{d^3k}{\sqrt{1+\vec{k}^2}} .$$

Благодаря тому, что в уравнениях (I.I) и (I.2) интегрирование ведется по пространству Лобачевского, оказалось возможным применить аппарат фурье-анализа на группе Лоренца (преобразование Шапиро) и ввести релятивистское конфигурационное пространство[5]. Уравнение Шредингера в этом пространстве является дифференциально-разностным уравнением с шагом, пропорциональным комптоновской длине волны частицы λ (в используемой системе единиц λ = I):

$$\left[H_0 - 2E_q + V(\vec{r})\right]\psi_q(\vec{r}) = 0 . \qquad (I.7)$$

Здесь $\vec{r} = r\vec{n}$ - релятивистский аналог относительного радиус-вектора[5], и свободный гамильтониан H_0 имеет вид:

$$H_0 = 2\operatorname{ch} i\frac{\partial}{\partial r} + \frac{2i}{r}\operatorname{sh} i\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\Delta_{\theta,\varphi}}{r^2}\, e^{i\frac{\partial}{\partial r}} , \qquad (I.8)$$

где $\Delta_{\theta,\varphi}$ - угловая часть оператора Лапласа. В уравнении (I.7) и далее в настоящей работе рассматривается случай локального и не зависящего от энергии E_q квазипотенциала. Это позволяет исследовать в "чистом" виде эффекты релятивистской кинематики в задаче двух тел.

На основе дифференциально-разностного уравнения (I.7) можно построить аппарат, во многом повторяющий черты квантовой механики[4].

Естественно поэтому поставить в рамках конечно-разностного уравнения Шредингера задачу о релятивистском обобщении известного метода фазовых функций[7-9], успешно применяемого в квантовой механике*/. Распространение метода фазовых функций на случай взаимодействия релятивистских частиц представляет особый интерес в связи с актуальностью релятивистского рассмотрения ряда задач ядерной физики, в частности, проблемы нуклон-нуклонного взаимодействия/10/. При этом отпадает необходимость нахождения в задачах рассеяния промежуточного результата, каким является, например, волновая функция.

Прямая и наглядная связь параметров рассеяния с потенциалом позволяет получать в рамках метода фазовых функций известные общие теоремы и приближения квантовой механики более естественным и простым, чем обычно, образом. Весьма удобен этот метод также в практических вычислениях на электронно-счетных машинах, поскольку решения фазовых уравнений обладают более монотонным поведением, чем осциллирующие волновые функции, и алгоритмы решения уравнений первого порядка проще, чем алгоритмы решения уравнения Шредингера.

В настоящей работе кратко формулируются исходные конечно-разностные уравнения для радиальных волновых фунций (§ 2) и выводятся нелинейные конечно-разностные уравнения первого порядка для различных параметров рассеяния: парциальной амплитуды рассеяния (§ 3), тангенса фазовой функции (§ 4), парциальной фазы рассеяния (§ 5). В целях иллюстрации аппарата исчисления конечных разностей каждое из уравнений выводится независимо и различными способами. В последнем параграфе даны некоторые обобщения фазовых уравнений.

---

*/В монографиях/7,8/ и обзорной статье/9/ имеется весьма полная библиография по методу фазовых функций.

§ 2. Конечно-разностное уравнение Шредингера

Релятивистское конечно-разностное уравнение Шредингера для радиальной волновой функции $\psi_{q\ell}(r)$ имеет вид/6/

$$\left[H_0^r - 2E_q + V(r)\right]\psi_{q\ell}(r) = 0 , \tag{2.1}$$

где H_0^r -радиальная часть свободного гамильтониана (ср. (1.8))

$$H_0^r = 2\operatorname{ch} i\frac{d}{dr} + \frac{\ell(\ell+1)}{r(r+i)}\, e^{i\frac{d}{dr}} . \tag{2.2}$$

Введем операторы конечно-разностного дифференцирования Δ и Δ^*

$$\Delta \equiv \frac{e^{-i\frac{d}{dr}} - 1}{-i} , \quad \Delta^* \equiv \frac{e^{i\frac{d}{dr}} - 1}{i} \tag{2.3}$$

и связанные с ними операторы

$$\nabla \equiv e^{-i\frac{d}{dr}} = (1 - i\Delta), \quad \nabla^* \equiv e^{i\frac{d}{dr}} = 1 + i\Delta^* . \tag{2.4}$$

Оператор H_0^r в терминах ∇ и ∇^* записывается в виде

$$H_0^r = \nabla + \omega_\ell(r)\nabla^* , \tag{2.5}$$

где

$$\omega_\ell(r) = 1 + \frac{\ell(\ell+1)}{r(r+i)} . \tag{2.6}$$

В дальнейшем нам понадобятся правила конечно-разностного дифференцирования произведения и частного

$$\Delta\left(\alpha(z)\beta(z)\right)=\left(\Delta\alpha(z)\right)\beta(z)+\alpha(z)\left(\Delta\beta(z)\right)+\frac{1}{i}\left(\Delta\alpha(z)\right)\left(\Delta\beta(z)\right)= \tag{2.7a}$$

$$=\left(\Delta\alpha(z)\right)\beta(z)+\left(\nabla\alpha(z)\right)\left(\Delta\beta(z)\right)=\left(\Delta\alpha(z)\right)\left(\nabla\beta(z)\right)+\alpha(z)\Delta\beta(z),$$

$$\Delta\frac{\alpha(z)}{\beta(z)}=\frac{\left(\Delta\alpha(z)\right)\beta(z)-\alpha(z)\left(\Delta\beta(z)\right)}{\beta(z)\left(\nabla\beta(z)\right)}. \tag{2.7б}$$

Релятивистскую энергию E_q в непрерывном спектре удобно параметризовать следующим образом

$$E_q=ch\,\chi_q. \tag{2.8}$$

Решение свободного уравнения (2.I), регулярное в нуле, записывается в виде

$$S_\ell(z,\chi_q)=\sqrt{\frac{\pi}{2}sh\chi_q}\,(-1)^{\ell+1}(-z)^{(\ell+1)}P^{-\ell-\frac{1}{2}}_{-\frac{1}{2}+iz}(ch\chi_q), \tag{2.9}$$

где $z^{(\lambda)}$ -обобщенная степень /4/

$$z^{(\lambda)}=i^{\lambda}\frac{\Gamma(-iz+\lambda)}{\Gamma(-iz)}, \tag{2.10}$$

$P^{\mu}_{\nu}(ch\chi)$- функция Лежандра первого рода. Функции $S_\ell(z,\chi)$ удовлетворяют следующим условиям ортогональности и полноты

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty dz\;S_\ell(z,\chi)S_\ell^*(z,\chi')=\delta(\chi-\chi'), \tag{2.11a}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty d\chi\;S_\ell(z,\chi)S_\ell^*(z',\chi)=\delta(z-z'). \tag{2.11б}$$

Решение, нерегулярное в нуле, также выражается через функцию Лежандра

$$C_\ell(z,\chi)=(-1)^\ell S_{-\ell-1}(z,\chi)=\sqrt{\frac{\pi}{2}sh\chi}\,(-z)^{(-\ell)}P^{\frac{1}{2}+\ell}_{-\frac{1}{2}+iz}(ch\chi). \tag{2.12}$$

Используется также другая пара линейно-независимых решений, выражающихся через функции Лежандра второго рода

$$e_\ell^{(1,2)}(z,\chi)=\frac{1}{i}\sqrt{\frac{2}{\pi}sh\chi}\,(-1)^{\ell+1}(-z)^{(\ell+1)}Q^{-\frac{1}{2}-\ell}_{-\frac{1}{2}\mp iz}(ch\chi). \tag{2.13}$$

Рассмотрим процедуру перехода к нерелятивистскому пределу. Для этого следует вернуться к размерным величинам и произвести замену

$$z\to\frac{zmc}{\hbar}=\frac{z}{\lambda},$$

$$\chi_q\to arsh\frac{\hbar q}{mc}=arsh\,\lambda q, \tag{2.14}$$

где q -волновое число. Легко видеть, что формальный нерелятивистский предел $c\to\infty$ соответствует переходу во всех формулах к асимптотическим выражениям при

$$z\to\infty,\quad \chi\to0,\quad z\chi\to zq. \tag{2.15}$$

Функции $S_\ell(r,\chi_q)$, $C_\ell(r,\chi_q)$ и $e_\ell^{(1,2)}(r,\chi_q)$ в нерелятивистском пределе переходят в соответствующие решения уравнения Шредингера[*/]

$$S_\ell(r,\chi_q) \to \sqrt{\frac{\pi q r}{2}}\, J_{\ell+\frac{1}{2}}(qr) = j_\ell(qr), \tag{2.16а}$$

$$C_\ell(r,\chi_q) \to -\sqrt{\frac{\pi q r}{2}}\, N_{\ell+\frac{1}{2}}(qr) = -n_\ell(qr), \tag{2.16б}$$

$$e_\ell^{(1,2)}(r,\chi_q) \to \pm i\sqrt{\frac{\pi q r}{2}}\, H^{(1,2)}_{\ell+\frac{1}{2}}(qr) = \pm i h_\ell^{(1,2)}(qr). \tag{2.16в}$$

В релятивистской теории рассеяния эти функции играют ту же роль, что и их нерелятивистские аналоги. В Приложении I дана сводка важнейших соотношений для решений свободного конечно-разностного уравнения Шредингера. Приведем теперь важнейшие формулы теории рассеяния. Волновая функция $\psi_{q\ell}^{(+)}(r)$ является решением интегрального уравнения

$$\begin{aligned}\psi_{q\ell}^{(+)}(r) &= S_\ell(r,\chi_q) + \int G_\ell^{(+)}(r,r';\chi_q)\, V(r')\, \psi_{q\ell}^{(+)}(r')\,dr' = \\ &= S_\ell(r,\chi_q) - \frac{\operatorname{sh}\chi_q}{\pi}\int d\chi_p\, \frac{S_\ell(r,\chi_p)\, A_\ell(p,q)}{\operatorname{ch}\chi_q - \operatorname{ch}\chi_p + i\varepsilon},\end{aligned} \tag{2.17}$$

где $A_\ell(p,q)$ -парциальная амплитуда рассеяния вне энергетической поверхности

[*/] Функции $j_\ell(qr)$, $n_\ell(qr)$, $h_\ell^{(1,2)}(qr)$ называют функциями Риккати-Бесселя и Риккати-Ганкеля соответственно (см., например, /7/).

$$A_\ell(p,q) = -\frac{1}{\operatorname{sh}\chi_q}\int_0^\infty dr\, S_\ell^*(r,\chi_p)\, V(r)\, \psi_{q\ell}^{(+)}(r). \tag{2.18}$$

Связь парциальных амплитуд с полной амплитудой $A(\vec{p},\vec{q})$ задается разложением

$$A(\vec{p},\vec{q}) = \frac{1}{\operatorname{sh}\chi_q}\sum_{\ell=0}^{\infty}(2\ell+1)\, A_\ell(p,q)\, P_\ell\left(\frac{\vec{p}\cdot\vec{q}}{pq}\right). \tag{2.19}$$

Парциальная функция Грина, удовлетворяющая уравнению

$$[H_0^r - 2\operatorname{ch}\chi_q]\, G_\ell^{(+)}(r,r';\chi_q) = -\delta(r-r'), \tag{2.20}$$

имеет вид

$$\begin{aligned}G_\ell^{(+)}(r,r';\chi_q) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{S_\ell(r,\chi_k)\, S_\ell^*(r',\chi_k)\, d\chi_k}{\operatorname{ch}\chi_q - \operatorname{ch}\chi_k + i\varepsilon} = \\ &= -\frac{1}{W[e_\ell^{(1)}(r';\chi_q)\, e_\ell^{(2)}(r';\chi_q)]}\Big\{\hat{\theta}(r-r')\, e_\ell^{(1)}(r,\chi_q)\, e_\ell^{(2)}(r',\chi_q) + \\ &+ \hat{\theta}^*(r'-r)\, e_\ell^{(1)}(r';\chi_q)\, e_\ell^{(2)}(r,\chi_q) - \hat{\theta}(r+r')\, e_\ell^{(1)}(r;\chi_q)\, e_\ell^{(1)}(r';\chi_q) - \\ &- \hat{\theta}^*(-r-r')\, e_\ell^{(2)}(r,\chi_q)\, e_\ell^{(2)}(r';\chi_q)\Big\}.\end{aligned} \tag{2.21}$$

Как и в квантовой механике, выражение (2.21) представляет собой комбинацию решений свободного уравнения Шредингера с тем существенным отличием, что вместо обычной ступенчатой функции $\theta(r)$ в него входит ее конечно-разностный аналог $\hat{\theta}(r)$ (см. Приложение II).

Из уравнения (2.17) находим, что при $r \to \infty$ $\psi_{qe}^{(+)}(r)$ имеет следующую асимптотику[6]

$$\psi_{qe}^{(+)}(r) \approx \sin\left(r\chi_q - \frac{\pi\ell}{2}\right) + A_e(q,q)\, e^{i\left(r\chi_q - \frac{\pi\ell}{2}\right)} . \qquad (2.22)$$

В полной аналогии с квантовой механикой введем фазы рассеяния и диагональные элементы S -матрицы

$$\psi_{qe}^{(+)}(r) \approx e^{i\delta_e} \sin\left(r\chi_q - \frac{\pi\ell}{2} + \delta_e\right), \qquad (2.23)$$

$$S_e(q) = e^{2i\delta_e} = 1 + 2i A_e(q,q) . \qquad (2.24)$$

Условие унитарности (1.4) приводит к следующему соотношению для парциальных амплитуд

$$\operatorname{Im} A_e(q,q) = |A_e(q,q)|^2 \qquad (2.25)$$

и матрицы рассеяния

$$S_e(q) \cdot S_e^{*}(q) = 1 , \qquad (2.26)$$

что равносильно требованию вещественности фаз.

§ 3. Уравнение для тангенса фазовой функции

В нерелятивистском методе фазовых функций тангенс фазовой функции

$$t_e(r) = \operatorname{tg} \delta_e(r) \qquad (3.1)$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dr} t_e(r) = -\frac{1}{q} V(r) \left[j_e(qr) - t_e(r)\, n_e(qr) \right]^2 ,$$

$$t_e(0) = 0. \qquad (3.2)$$

Выведем релятивистский аналог (3.2). С целью получения конечно-разностного уравнения для тангенса фазы запишем радиальную волновую функцию $\psi_{qe}^{(+)}(r)$ в виде:

$$\psi_{qe}^{(+)}(r) = E_e(q,r) S_e(r,\chi_q) + D_e(q,r)\, C_e(r,\chi_q) , \qquad (3.3)$$

где $E_e(q,r)$ и $D_e(q,r)$ -неизвестные пока функции. Из формул (2.17) и (2.21) нетрудно получить следующие выражения для $E_e(q,r)$ и $D_e(q,r)$:

$$E_e(q,r) = 1 - \int_0^\infty \left\{ -i S_e(r',\chi_q) + \left[\hat\theta(r-r') - \hat\theta(r+r') \right] C_e(r',\chi_q) \right\} \times \frac{\psi_{qe}^{(+)}(r') V(r')}{W_e(r',\chi_q)} dr' , \qquad (3.4)$$

$$D_e(q,r) = \int_0^\infty \left\{ 1 - \hat\theta(r-r') - \hat\theta(r+r') \right\} S_e(r',\chi_q) \times \frac{\psi_{qe}^{(+)}(r') V(r')}{W_e(r',\chi_q)} dr' . \qquad (3.5)$$

Дифференцируя разностным образом соотношения (3.4) и (3.5) и учитывая тот факт, что дельта-функция $\delta(r+r')$ не дает вклада, получим

$$\Delta E_e(q,r) = - \frac{C_e(r,\chi_q)\, \psi_{qe}^{(+)}(r) V(r)}{W_e(r,\chi_q)} , \qquad (3.6)$$

$$\Delta \mathcal{D}_e(q,r) = \frac{S_e(r,x_q)\,\psi^{(+)}_{qe}(r)\,V(r)}{W_e(r,x_q)}\,. \tag{3.7}$$

Умножим (3.6) на $\mathcal{D}_e(q,r)$, (3.7) на $E_e(q,r)$ и вычтем получившиеся выражения друг из друга. Пользуясь соотношением (2.7б), придем к следующему равенству

$$\Delta t_e(q,r) = -\frac{E_e(q,r)}{\nabla E_e(q,r)}\cdot\frac{V(r)}{W_e(r,x_q)}\left[S_e(r,x_q)+t_e(q,r)C_e(r,x_q)\right]^2, \tag{3.8}$$

где

$$t_e(q,r) = \frac{\mathcal{D}_e(q,r)}{E_e(q,r)}\,. \tag{3.9}$$

Множитель $\dfrac{E_e(q,r)}{\nabla E_e(q,r)}$ можно исключить, воспользовавшись формулой (3.6).

$$\nabla E_e(q,r) = E_e(q,r) - i\Delta E_e(q,r) =$$

$$= E_e(q,r)\left[1+\frac{i\,C_e(r,x_q)\,V(r)}{W_e(r,x_q)}\left[S_e(r,x_q)+t_e(q,r)C_e(r,x_q)\right]\right]. \tag{3.10}$$

Окончательно получаем конечно-разностное уравнение для $t_e(q,r)$ в виде

$$\Delta t_e(q,r) = \frac{-V(r)}{W_e(r,x_q)}\cdot\frac{\left[S_e(r,x_q)+t_e(q,r)C_e(r,x_q)\right]^2}{1+i\,\dfrac{C_e(r,x_q)V(r)}{W_e(r,x_q)}\left[S_e(r,x_q)+t_e(q,r)C_e(r,x_q)\right]} \tag{3.11}$$

с начальным условием $t_e(q,0)=0$.

Уравнение (3.11) в нерелятивистском пределе переходит в (3.2).

§ 4. Уравнение для парциальной фазы рассеяния

В данном параграфе при выводе уравнения для фазы рассеяния мы используем другой эквивалентный метод - конечно-разностный метод вариации постоянных (ср.[6]). С этой целью введем в рассмотрение две новые функции $\delta_e(r)$ и $K_e(r)$, положив

$$\psi^{(0)}_{qe}(r) = K_e(r)\left[\cos\delta_e(r)\,S_e(r,x_q)+\sin\delta_e(r)\,C_e(r,x_q)\right]. \tag{4.1}$$

Поскольку мы вместо одной неизвестной функции $\psi^{(0)}_{qe}(r)$ ввели две функции $\delta_e(r)$ и $K_e(r)$, очевидно, что мы должны наложить некоторое дополнительное условие. Потребуем выполнения этого условия в виде (ср.[7])

$$\Delta\left(K_e(r)\cos\delta_e(r)\right)S_e(r,x_q)+\Delta\left(K_e(r)\sin\delta_e(r)\right)C_e(r,x_q)=0, \tag{4.2}$$

или, эквивалентно

$$\Delta^*\left(K_e(r)\cos\delta_e(r)\right)\nabla^* S_e(r,x_q)+\Delta^*\left(K_e(r)\sin\delta_e(r)\right)\nabla^* C_e(r,x_q)=0\,. \tag{4.3}$$

С учетом дополнительного условия Δ -производная волновой функции имеет вид

$$\Delta \Psi_{qe}^{(c)}(r) = \nabla\left(K_e(r)\cos\delta_e(r)\right)\Delta S_e(r,\chi_q) +$$

$$+\nabla\left(K_e(r)\sin\delta_e(r)\right)\Delta C_e(r,\chi_q). \qquad (4.4)$$

Далее, используя (4.2) и уравнение Шредингера со свободным гамильтонианом H_0^r в виде (2.5), будем иметь

$$\nabla\Psi_{qe}^{(0)}(r) = \frac{1}{i}\Delta\left(K_e(r)\cos\delta_e(r)\right)\nabla S_e(r,\chi_q) + \frac{1}{i}\Delta\left(K_e(r)\sin\delta_e(r)\right)\times \qquad (4.5)$$

$$\times\nabla C_e(r,\chi_q) - W_e(r)\nabla^*\Psi_{qe}^{(0)}(r) + 2E_q\Psi_{qe}^{(0)}(r),$$

$$\nabla^*\Psi_{qe}^{(0)}(r) = \left(K_e(r)\cos\delta_e(r)\right)\nabla^* S_e(r,\chi_q) +$$

$$+\left(K_e(r)\sin\delta_e(r)\right)\nabla^* C_e(r,\chi_q) = 0. \qquad (4.6)$$

Подставляя (4.5) и (4.6) в уравнение (2.I), получим:

$$\Delta\left(K_e(r)\cos\delta_e(r)\right)\nabla S_e(r,\chi_q) + \Delta\left(K_e(r)\sin\delta_e(r)\right)\nabla C_e(r,\chi_q) = \qquad (4.7)$$

$$= -i\,V(r)\Psi_{qe}^{(0)}(r).$$

Из (4.2) и (4.7) вытекает система разностных уравнений для $K_e(r)$ и $\delta_e(r)$:

$$\Delta\left(K_e(r)\cos\delta_e(r)\right) = -\frac{V(r)\Psi_{qe}^{(0)}(r)\,C_e(r,\chi_q)}{W_e(r,\chi_q)}, \qquad (4.8)$$

$$\Delta\left(K_e(r)\sin\delta_e(r)\right) = \frac{V(r)\Psi_{qe}^{(0)}(r)\,S_e(r,\chi_q)}{W_e(r,\chi_q)}. \qquad (4.9)$$

Исключая из (4.8) и (4.9) величину $K_e(r)$, получим следующее уравнение для фазовой функции

$$tg\left[i\Delta\delta_e(r)\right] = i\frac{V(r)}{W_e(r,\chi_q)}\left[S_e(r,\chi_q)\cos\delta_e(r) + C_e(r,\chi_q)\sin\delta_e(r)\right]^2\times$$

$$\times\left\{1 + i\frac{V(r)}{W_e(r,\chi_q)}\left[S_e(r,\chi_q)\cos\delta_e(r) + C_e(r,\chi_q)\sin\delta_e(r)\right]\times \qquad (4.10)\right.$$

$$\left.\times\left[S_e(r,\chi_q)\sin\delta_e(r) - C_e(r,\chi_q)\cos\delta_e(r)\right]\right\}^{-1}.$$

Граничным условием для этого уравнения является

$$\delta_e(0) = 0. \qquad (4.11)$$

В нерелятивистском пределе уравнение (4.I0) переходит в известное фазовое уравнение квантовой механики

$$\frac{d}{dr}\delta_e(r) = -\frac{V(r)}{q}\left[j_e(qr)\cos\delta_e(r) - n_e(qr)\sin\delta_e(r)\right]^2. \qquad (4.12)$$

Для функции $K_e(r)$ получаем уравнение

$$\Delta K_e(r) + i\,\mathcal{P}_e(r)K_e(r) = 0, \qquad (4.13)$$

где величина $\mathcal{P}_e(r)$ имеет вид

$$\mathcal{P}_e(r) = 1 - \left\{1 + \frac{2iV(r)}{W_e(r,\chi_q)}\left[S_e(r,\chi_q)\cos\delta_e(r) + C_e(r,\chi_q)\sin\delta_e(r)\right]\times\right.$$

$$\times\left[S_e(r,\chi_q)\sin\delta_e(r) - C_e(r,\chi_q)\cos\delta_e(r)\right] - \qquad (4.14)$$

$$-\frac{V^2(r)}{W_e^2(r,\chi_q)}\left[S_e(r,\chi_q)\cos\delta_e(r) + C_e(r,\chi_q)\sin\delta_e(r)\right]^2\times$$

$$\left.\times\left[S_e^2(r,\chi_q) + C_e^2(r,\chi_q)\right]\right\}^{1/2}.$$

В отличие от фазового уравнения (4.10) уравнение (4.13) линейно. Величина $\mathcal{P}_e(r)$ зависит от фазовой функции $\delta_e(r)$. В случае, когда известно решение уравнения (4.10) $\delta_e(r)$, для $K_e(r)$ получается замкнутое выражение

$$K_e(r)=e^{i\int\limits_0^\infty[\hat{\theta}(r-r')-\hat{\theta}(-r')]\ln[1-i\mathcal{P}_e(r')]dr'}. \qquad (4.15)$$

Выражение (4.15) имеет правильный нерелятивистский предел/7/.

§ 5. Уравнение для парциальной амплитуды рассеяния

В нерелятивистской теории рассеяния фазовые уравнения (3.2), (4.12) могут быть получены также путем варьирования соответствующих параметров рассеяния по радиусу обрезания потенциала/7,8/

$$V(r';r)=V(r')\theta(r-r'), \qquad (5.1)$$

что позволяет придать фазовым функциям ясный физический смысл параметров рассеяния на определенной части потенциала.

Ниже показывается, что в релятивистской квазипотенциальной теории рассеяния существует формальное обобщение "обрезания" потенциала (5.1), приводящее к тем же релятивистским фазовым уравнениям, которые получены в предыдущих параграфах. Это будет продемонстрировано на примере уравнения для парциальной амплитуды рассеяния.

Рассмотрим общий случай потенциала $V(r';r)$, зависящего от некоторого параметра r. В этом случае волновая функция $\psi^{(+)}_{qe}(r';r)$ и парциальная амплитуда рассеяния $A_e(p,q,r)$ также зависят от данного параметра.

Продифференцируем разностным образом по параметру r соотношение (2.18) и уравнение (2.17). С учетом правил Δ - дифференцирования (2.7а) найдем

$$\Delta A_e(p,q,r)=-\frac{1}{sh\chi_q}\int\limits_0^\infty S_e^*(r',\chi_p)[\Delta V(r';r)\psi^{(+)}_{qe}(r';r)+ \qquad (5.2)$$
$$+\nabla V(r';r)\Delta\psi^{(+)}_{qe}(r';r)]dr',$$

$$\Delta\psi^{(+)}_{qe}(r';r)=\int\limits_0^\infty G_e^{(+)}(r',r'';\chi_q)[\Delta V(r'';r)\psi^{(+)}_{qe}(r'';r)+ \qquad (5.3)$$
$$+\nabla V(r'';r)\Delta\psi^{(+)}_{qe}(r'';r)]dr''.$$

Интегрируя соотношение (5.3) относительно $\Delta\psi^{(+)}_{qe}(r',r)$, получим ряд

$$\Delta\psi^{(+)}_{qe}(r';r)\doteq\int\limits_0^\infty G_e^{(+)}(r',r'';\chi_q)\Delta V(r'';r)\psi^{(+)}_{qe}(r'';r)dr''+$$
$$+\int\limits_0^\infty G_e^{(+)}(r,r';\chi_q)\nabla V(r'';r)G_e^{(+)}(r'',r''')\Delta V(r''';r)\psi^{(+)}_{qe}(r''';r)dr''dr'''+\ldots \qquad (5.4)$$

После подстановки ряда (5.4) в (5.3) получим

$$\Delta A_e(p,q,r)=-\frac{1}{sh\chi_q}\Big\{\int\limits_0^\infty dr'[S_e^*(r',\chi_p)+$$
$$+\int\limits_0^\infty dr''S_e^*(r'',\chi_p)\nabla V(r'';r)G_e^{(+)}(r'',r';\chi_q)+$$

$$+\int_0^\infty dr'' dr''' \, S_e^*(r'; x_p) \nabla V(r''', r) G_e^{(+)}(r''', r''; x_q) \nabla V(r'', r) \times$$
$$\times G_e^{(+)}(r'', r'; x_q) + \ldots] \Delta V(r', r) \psi_{qe}^{(+)}(r', r) \} . \qquad (5.5)$$

Рассмотрим теперь уравнение

$$\tilde{\psi}_{qpe}^{(+)} = S_e^*(r', x_q) + \int_0^\infty \tilde{\psi}_{qpe}^{(+)}(r'', r) V(r'', r) G_e^{(+)}(r'', r'; x_p) dr'' . \qquad (5.6)$$

На энергетической поверхности $p = q$ уравнение (5.6) эквивалентно уравнению (2.I7). Действительно, умножая (2.I7) на величину $V_e(r)$ (см.(П.I.I0)) и учитывая соотношения

$$S_e^*(r, x_p) = V_e(r) \, S_e(r, x_p) ,$$
$$G_e^{(+)}(r, r'; x_p) = \frac{V_e(r')}{V_e(r)} G_e^{(+)}(r', r; x_p) , \qquad (5.7)$$

получим

$$\tilde{\psi}_{qe}^{(+)}(r', r) = S_e^*(r'; x_q) + \int_0^\infty \tilde{\psi}_{qe}^{(+)}(r'', r) V(r'', r) G_e^{(+)}(r'', r'; x_q) dr'' , \qquad (5.8)$$

где через $\tilde{\psi}_{qe}^{(+)}(r', r)$ обозначена величина

$$\tilde{\psi}_{qe}^{(+)}(r', r) = V_e(r') \psi_{qe}^{(+)}(r', r) = \tilde{\psi}_{qqe}^{(+)}(r', r) . \qquad (5.9)$$

Легко видеть, что выражение в квадратных скобках в (5.5) есть не что иное как итерационный ряд для величины $\nabla \tilde{\psi}_{pqe}^{(+)}(r', r)$,

удовлетворяющей уравнению

$$\nabla \tilde{\psi}_{pqe}^{(+)}(r', r) = S_e^*(r'; x_p) + \int_0^\infty \nabla \tilde{\psi}_{pqe}^{(+)}(r'', r) \nabla V(r'', r) G_e^{(+)}(r'', r'; x_q) dr'' . \qquad (5.10)$$

Таким образом, приходим к следующему представлению для величины $\Delta A_e(p, q, r)$:

$$\Delta A_e(p, q, r) = -\frac{1}{sh \, x_q} \int_0^\infty \nabla \tilde{\psi}_{pqe}^{(+)}(r', r) \Delta V(r', r) \psi_{qe}^{(+)}(r', r) dr' . \qquad (5.11)$$

Подчеркнем, что соотношение (5.II) справедливо также вне энергетической поверхности $p = q$. Оно задает своеобразный способ выхода за поверхность энергии.

В дальнейшем мы будем интересоваться только величинами на поверхности энергии. Формула (5.II) принимает в этом случае вид

$$\Delta A_e(q, r) = \int_0^\infty \frac{\nabla \psi_{qe}^{(+)}(r', r) \Delta V(r', r) \psi_{qe}^{(+)}(r', r) dr'}{W_e(r', x_q)} , \qquad (5.12)$$

$$A_e(q, r) \equiv A_e(q, q; r) .$$

Выберем "обрезание" потенциала $V(r', r)$ в следующем виде,

$$V(r', r) = V(r') \hat{\theta}(r - r') \hat{\theta}(r + r') [1 - \hat{\theta}(-r - r')] , \qquad (5.13)$$

имеющем правильный нерелятивистский предел (5.I). Таким образом $V(r', 0) = 0$, $V(r', \infty) = V(r')$. Для потенциала (5.I3) с учетом (П2.6) находим из (5.II)

$$\Delta A_\ell(q,r)=\frac{1}{W_\ell(r,\chi_q)}\nabla\psi^{(+)}_{q\ell}(r',r)\Big/V(r)\hat\theta(2r)[1-\hat\theta(-2r)]\psi^{(+)}_{q\ell}(r,r)\Big|_{r'=r} \quad (5.14)$$

Пользуясь тождеством (П2.6), можно показать, что фактор $\hat\theta(2r)[1-\hat\theta(-2r)]$ является несущественным для физических величин, и его можно опустить.

Из уравнения (2.17), с использованием (2.18), (П2.8), (П2.6) и учетом зависимости волновой функции и амплитуды рассеяния от параметра обрезания следует

$$\psi^{(+)}_{q\ell}(r',r)=B_\ell(q,r',r)[S_\ell(r',\chi_q)+A_\ell(q,r',r)e^{(1)}_\ell(r',\chi_q)], \quad (5.15)$$

причем

$$B_\ell(q,r,r)=1,\ A_\ell(q,r,r)=A_\ell(q,r). \quad (5.16)$$

Разрешая теперь уравнения (5.14) относительно $\Delta A_\ell(q,r)$, получим конечно-разностное уравнение для амплитуды рассеяния в виде

$$\Delta A_\ell(q,r)=\frac{V(r)}{W_\ell(r,\chi_q)}[S_\ell(r,\chi_q)+A_\ell(q,r)e^{(1)}_\ell(r,\chi_q)]^2\times$$
$$\times\left\{1+\frac{iV(r)e^{(1)}_\ell(r,\chi_q)}{W_\ell(r,\chi_q)}[S_\ell(r,\chi_q)+A_\ell(q,r)e^{(1)}_\ell(r,\chi_q)]\right\}^{-1}, \quad (5.17)$$

с начальным условием $A_\ell(q,0)=0.$

В нерелятивистском пределе (5.17) переходит в известное дифференциальное уравнение для парциальной амплитуды рассеяния /7-9/:

$$\frac{d}{dr}A_\ell(q,r)=-\frac{V(r)}{q}[j_\ell(qr)+iA_\ell(q,r)h^{(1)}_\ell(qr)]^2. \quad (5.18)$$

Легко проверить, что из условий связи параметров рассеяния

$$A_\ell(q,r)=\frac{t_\ell(q,r)}{1-it_\ell(q,r)},\quad t_\ell(q,r)=\frac{A_\ell(q,r)}{1+iA_\ell(q,r)},$$
$$A_\ell(q,r)=e^{i\delta_\ell(r)}\sin\delta_\ell(r),\quad t_\ell(q,r)=\operatorname{tg}\delta_\ell(q,r). \quad (5.19)$$

следует эквивалентность уравнений (5.17), (4.10) и (3.11).

Учитывая формулу

$$A_\ell(q,r)=\frac{S_\ell(q,r)-1}{2i}, \quad (5.20)$$

получаем также уравнение для диагонального элемента матрицы рассеяния $S_\ell(q,r)$:

$$\Delta S_\ell(q,r)=\frac{1}{2i}\frac{V(r)}{W_\ell(r,\chi_q)}\left[e^{(2)}_\ell(r,\chi_q)-S_\ell(q,r)e^{(1)}_\ell(r,\chi_q)\right]^2\times$$
$$\times\left\{1-\frac{V(r)e^{(1)}_\ell(r,\chi_q)}{2W_\ell(r,\chi_q)}[e^{(2)}_\ell(r,\chi_q)-S_\ell(q,r)e^{(1)}_\ell(r,\chi_q)]\right\}^{-1} \quad (5.21)$$

с начальным условием $S_\ell(q,0)=1.$

В нерелятивистском пределе (5.18) переходит в уравнение

$$\frac{d}{dr}S_\ell(q,r)=-\frac{i}{2q}V(r)[h^{(2)}_\ell(qr)+S_\ell(q,r)h^{(1)}_\ell(qr)]^2. \quad (5.22)$$

Учитывая свойства симметрии (П1.5) и (П1.11), получим формулы

$$\delta_\ell(r,-\chi_q)=-\delta_\ell(r,\chi_q), \quad (5.23)$$

$$\mathcal{S}_\ell(r,-\chi_q) = \mathcal{S}_\ell^{-1}(r,\chi_q), \tag{5.24}$$

нерелятивистские аналоги которых хорошо известны.

Параметры квазипотенциального рассеяния удовлетворяют для веществених потенциалов условию унитарности (I.4). Введенные выше фазовые функции соответствуют параметрам рассеяния на комплексном потенциале $V(r',r)$ (5.I3), мнимая часть которого асимптотически при $r\to\infty$ обращается в нуль. Поэтому условие унитарности выполняется только для асимптотик фазовых функций $t_\ell(q,r)$, $\delta_\ell(q,r)$, $\mathcal{A}_\ell(q,r)$, $\mathcal{S}_\ell(q,r)$, являющихся физическими параметрами рассеяния:

$$\begin{gathered}
\lim_{r\to\infty}\left[t_\ell(q,r) - t_\ell^*(q,r)\right] = 0,\\
\lim_{r\to\infty}\left[\delta_\ell(q,r) - \delta_\ell^*(q,r)\right] = 0,\\
\lim_{r\to\infty}\left[\operatorname{Im}\mathcal{A}_\ell(q,r) - \frac{\mathcal{A}_\ell(q,r)\mathcal{A}_\ell^*(q,r)}{\operatorname{sh}\chi_q}\right] = 0,\\
\lim_{r\to\infty}\left[\mathcal{S}_\ell(q,r)\cdot \mathcal{S}_\ell^*(q,r)\right] = 1.
\end{gathered} \tag{5.25}$$

§ 6. Обобщенные конечно-разностные фазовые уравнения

Можно рассмотреть, подобно тому, как это сделано в квантовой механике[7-9], более общие формы фазовых уравнений. Пусть в исходном разностном уравнении Шредингера потенциал $V(r)$ разбивается на две части

$$V(r) = U(r) + W(r), \tag{6.1}$$

таким образом, что два линейно независимых решения $Y_e^{(1,2)}(r, \chi_q)$ уравнения

$$\left[2 ch\, i \frac{d}{dr} + \frac{e(e+1)}{r(r+i)} e^{i\frac{d}{dr}} + W(r)\right] Y_e^{(1,2)}(r, \chi_q) = 2E_q Y_e^{(1,2)}(r, \chi_q) \tag{6.2}$$

известны.

Асимптотические выражения для этих функций представляются в стандартном виде

$$Y_e^{(1)}(r, \chi_q) \approx \sin\left(r\chi_q - \frac{\pi \ell}{2} + \mu_e(\chi_q)\right), \; r \to \infty; \tag{6.3а}$$

$$Y_e^{(2)}(r, \chi_q) \approx \cos\left(r\chi_q - \frac{\pi \ell}{2} + \mu_e(\chi_q)\right), \; r \to \infty, \tag{6.3б}$$

где $\mu_e(\chi_q)$ –фазы рассеяния на потенциале $W(r)$.

Будем использовать решения $Y_e^{(1)}(r, \chi_q)$ и $Y_e^{(2)}(r, \chi_q)$ в качестве базисных функций вместо функций $S_e(r,\chi)$, $C_e(r,\chi)$, отвечающих свободному движению, и представим волновую функцию $\Psi_{qe}(r)$ в виде

$$\Psi_{qe}^{(+)}(r) = \alpha_e(r, \chi_q) Y_e^{(1)}(r, \chi_q) + \beta_e(r, \chi_q) Y_e^{(2)}(r, \chi_q). \tag{6.4}$$

Для дальнейшего удобно ввести следующие обозначения

$$tg\, \rho_e(r, \chi_q) \equiv \frac{\alpha_e(r, \chi_q)}{\beta_e(r, \chi_q)} \equiv \tau_e(r, \chi_q). \tag{6.5}$$

Очевидно, волновая функция $\Psi_{qe}(r)$ имеет асимптотику

$$\psi_{q\ell}^{(+)}(r,\varkappa_q) \approx \alpha_\ell(\infty,\varkappa_q)\sin\left[r\varkappa_q - \frac{\pi\ell}{2} + \mu_\ell(\varkappa_q) + \beta_\ell(\infty,\varkappa_q)\right], \tag{6.6}$$

так что полная фаза рассеяния на потенциале (6.I) равна

$$\delta_\ell(\varkappa_q) = \beta_\ell(\infty,\varkappa_q) + \mu_\ell(\varkappa_q). \tag{6.7}$$

По аналогии с (2.2I) введем функцию Грина для уравнения (6.2).

$$G_{\ell Y}^{(+)}(r,r';\varkappa_q) = -\frac{1}{W[Y_\ell^{(1)}(r',\varkappa_q)Y_\ell^{(2)}(r',\varkappa_q)]}\Big\{\hat\theta(r-r')\big[Y_\ell^{(1)}(r,\varkappa_q)Y_\ell^{(2)}(r',\varkappa_q) - Y_\ell^{(2)}(r,\varkappa_q)Y_\ell^{(1)}(r',\varkappa_q)\big] - \hat\theta(r+r')\big[Y_\ell^{(1)}(r,\varkappa_q)Y_\ell^{(2)}(r',\varkappa_q) + Y_\ell^{(2)}(r,\varkappa_q)Y_\ell^{(1)}(r',\varkappa_q)\big] + Y_\ell^{(1)}(r',\varkappa_q)\big(Y_\ell^{(2)}(r,\varkappa_q) - i\,Y_\ell^{(1)}(r,\varkappa_q)\big)\Big\}. \tag{6.8}$$

Волновая функция $\psi_{q\ell}(r)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\psi_{q\ell}^{(+)}(r,\varkappa_q) = Y_\ell^{(1)}(r,\varkappa_q) + \int_0^\infty G_{\ell Y}^{(+)}(r,r',\varkappa_q)\,U(r')\,\psi_{q\ell}^{(+)}(r')\,dr'. \tag{6.9}$$

Используя (6.8), получим по аналогии с § 3 конечно-разностное уравнение для $\tau_\ell(r,\varkappa_q)$:

$$\Delta\tau_\ell(r,\varkappa_q) = \frac{U(r)}{W_\ell(r,\varkappa_q)}\left[Y_\ell^{(1)}(r,\varkappa_q) + \tau_\ell(r,\varkappa_q)Y_\ell^{(2)}(r,\varkappa_q)\right]^2 \times \tag{6.10}$$

$$\times\left\{1 + i\,\frac{Y_\ell^{(2)}(r,\varkappa_q)\,U(r)}{W_\ell(r,\varkappa_q)}\left[Y_\ell^{(1)}(r,\varkappa_q) + \tau_\ell(r,\varkappa_q)Y_\ell^{(2)}(r,\varkappa_q)\right]\right\}^{-1},$$

с начальным условием $\tau_\ell(0,\varkappa_q) = 0$.

Функция $\alpha_\ell(r,\varkappa_q)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\Delta\alpha_\ell(r,\varkappa_q) + i\,\alpha_\ell(r,\varkappa_q)\,\mathcal{P}_\ell(r) = 0, \tag{6.11}$$

где величина $\mathcal{P}_\ell(r)$ получается из выражения (4.I4) заменой $S_\ell(r,\varkappa_q) \to Y_\ell^{(1)}(r,\varkappa_q)$, $C_\ell(r,\varkappa_q) \to Y_\ell^{(2)}(r,\varkappa_q)$.

Решение уравнения (6.II) имеет вид (4.I5).

Рассмотрим два частных случая. Пусть $W(r) = \frac{g}{r}$ – кулоновский потенциал. Тогда $Y_\ell^{(1)}(r,\varkappa_q)$, $Y_\ell^{(2)}(r,\varkappa_q)$ – линейно-независимые решения разностного уравнения

$$\left[2\operatorname{ch} i\frac{d}{dr} + \frac{\ell(\ell+1)}{r(r+i)}e^{i\frac{d}{dr}} + \frac{g}{r}\right]Y_\ell^{(1,2)}(r,\varkappa_q) = 2\operatorname{ch}\varkappa_q\,Y_\ell^{(1,2)}(r,\varkappa_q). \tag{6.12}$$

Решение $Y_\ell^{(1)}(r,\varkappa_q)$ уравнения (6.I2), регулярное при $r = 0$, найдено в работе [6]; оно имеет вид

$$Y_\ell^{(1)}(r,\varkappa_q) = C_\ell^{(1)}(\varkappa_q)\,e^{ir\varkappa_q}\,(-r)^{(\ell+1)}\,F(\ell+1+i\eta, -ir+\ell+1, 2\ell+2, 2\operatorname{sh}\varkappa e^{-\varkappa}), \tag{6.13}$$

где $C_\ell^{(1)}(\varkappa_q)$ – нормирующий множитель, $\eta = -\frac{g}{2\operatorname{sh}\varkappa_q}$. Второе решение $Y_\ell^{(2)}(r,\varkappa_q)$ можно получить из (6.I3) путем замены $\ell \to -\ell-1$. Напомним, что линейно-независимые решения свободного уравнения $S_\ell(r,\varkappa_q)$ и $C_\ell(r,\varkappa_q)$ также связаны этой заменой. Второе решение имеет вид

$$Y_\ell^{(2)}(r,\varkappa_q) = C_\ell^{(2)}(\varkappa_q)\,e^{ir\varkappa_q}(-r)^{(-\ell)}\,\frac{F(-\ell+i\eta, -ir-\ell, -2\ell, 2\operatorname{sh}\varkappa e^{-\varkappa})}{\Gamma(-2\ell)}. \tag{6.14}$$

Асимптотика функций $Y_e^{(1,2)}(r, \chi_q)$ при $r\to\infty$ такова:

$$Y_e^{(1)}(r,\chi_q) \simeq \sin\left[r\chi_q - \eta\ln(2r\,sh\,\chi_q) - \frac{\pi l}{2} + \sigma_e(\chi_q)\right], \tag{6.15}$$

$$Y_e^{(2)}(r,\chi_q) \simeq \cos\left[r\chi_q - \eta\ln(2r\,sh\,\chi_q) - \frac{\pi l}{2} + \sigma_e(\chi_q)\right], \tag{6.16}$$

где

$$\sigma_e(\chi_q) = \frac{1}{2}\arg\frac{\Gamma(l+1+i\eta)}{\Gamma(l+1-i\eta)}. \tag{6.17}$$

Рассмотрим теперь потенциал

$$V(r) = U(r) + \frac{g}{r}. \tag{6.18}$$

Полная фаза рассеяния на этом потенциале имеет вид

$$\delta_e = \rho_e(\infty,\chi_q) + \sigma_e(\chi_q) - \eta\ln(2r\,sh\,\chi_q). \tag{6.19}$$

Рассмотрим теперь в качестве $W(r)$ центробежный потенциал

$$W_e(r) = -\frac{l(l+1)}{r(r+i)}e^{i\frac{d}{dr}}. \tag{6.20}$$

Уравнение Шредингера (6.2) имеет тогда вид

$$2ch\left(i\frac{d}{dr}\right)Y^{(1,2)}(r,\chi_q) = 2ch\,\chi_q\,Y^{(1,2)}(r,\chi_q), \tag{6.21}$$

а его решения равны

$$Y^{(1)}(r,\chi_q) = \sin r\chi_q, \quad Y^{(2)}(r,\chi_q) = \cos r\chi_q. \tag{6.22}$$

Фаза рассеяния записывается следующим образом:

$$\delta_e = \rho_e(\infty,\chi_q) + \frac{\pi l}{2}. \tag{6.23}$$

Волновую функцию для полного потенциала $V(r)$ следует тогда искать в виде

$$\psi_{qe}^{(+)}(r) = A_e(r)\sin\left[r\chi_q + \rho_e(r,\chi_q)\right]. \tag{6.24}$$

Фазовая функция $\rho_e(r,\chi_q)$ удовлетворяет уравнению:

$$tg\left[i\Delta\rho_e(r,\chi_q)\right] = \frac{iU(r)}{sh\,\chi_q}\sin^2\left[r\chi_q + \rho_e(r,\chi_q)\right]\cdot \times\left\{1 + \frac{iU(r)}{2sh\,\chi_q}\sin\left[2(r\chi_q + \rho_e(r,\chi_q))\right]\right\}^{-1}, \tag{6.25}$$

с граничным условием $\rho_e(0,\chi_q) = 0$.

В нерелятивистском пределе уравнение (6.25) переходит в известное фазовое уравнение

$$\frac{d}{dr}\rho_e(r,q) = -\frac{U(r)}{q}\sin^2(rq + \rho_e(r,q)). \tag{6.26}$$

§ 7. З а к л ю ч е н и е

В данной работе изложен общий подход к выводу нелинейных конечно-разностных уравнений первого порядка в рамках релятивис ского метода фазовых функций. Этот метод является непосредственным обобщением соответствующего метода квантовой механики. Нелинейность данных уравнений носит несколько более сложный характер по сравнению с нерелятивистским случаем. Тем не менее, они позволяют в принципе вычислять по заданному потенциалу взаимодействия двух релятивистских частиц некоторые параметры рассеяния: амплитуду рассеяния, фазы рассеяния, тангенс фазы рассеяния. Нетрудно, исходя из этих уравнений, вывести, аналогично нерелятивистскому случаю[7-9], также уравнения для других параметров рассеяния: длины рассеяния, эффективного радиуса и т.д.[11]. Заметим, что использованная форма обрезания потенциала (5.13) вследствие (П2.4) содержит мнимую часть. Следовательно, даже для вещественного потенциала $V(r)$, при конечных r фазовые функции не удовлетворяют условию унитарности. Очевидно, однако, что асимптотически при $r \to \infty$ унитарность выполняется.

В последующей работе[11] используется модифицированная форма обрезания потенциала, при которой условие унитарности выполняется для всех значений "радиуса обрезания". Различные физические приложения релятивистского метода фазовых функций, некоторые приближенные методы и исследование релятивистских поправок к параметрам рассеяния приведены в[11].

Авторы приносят благодарность В.Р. Гарсеванишвили, А.Д. Донкову, Е.П. Жидкову, В.Г. Кадышевскому, М.Д. Матееву, А.Н. Тавхелидзе, И.Т. Тодорову за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ I.

Свойства решений свободного уравнения Шредингера

Асимптотическое поведение при $\tau \to \infty,\ \tau X \gg \ell$

$$S_\ell(\tau, X) \approx \sin\left(\tau X - \frac{\pi \ell}{2}\right),$$
$$C_\ell(\tau, X) \approx \cos\left(\tau X - \frac{\pi \ell}{2}\right), \qquad (\text{П}I.I)$$
$$e_\ell^{(1,2)}(\tau, X) \approx e^{\pm i\left(\tau X - \frac{\pi \ell}{2}\right)}.$$

Связь между двумя парами линейно независимых решений

$$e_\ell^{(1,2)}(\tau, X) = C_\ell(\tau, X) \pm i\, S_\ell(\tau, X). \qquad (\text{П}I.2)$$

Правила комплексного сопряжения

$$S_\ell^{*}(\tau, X) = V_\ell(\tau)\, S_\ell(\tau, X),$$
$$C_\ell^{*}(\tau, X) = V_\ell(\tau)\, C_\ell(\tau, X), \qquad (\text{П}I.3)$$
$$e_\ell^{(1,2)*}(\tau, X) = V_\ell(\tau)\, e_\ell^{(2,1)}(\tau, X),$$

где

$$V_\ell(\tau) = (-1)^{\ell+1} \frac{\tau^{(\ell+1)}}{(-\tau)^{(\ell+1)}}. \qquad (\text{П}I.4)$$

В нерелятивистском пределе $V_\ell(r) = 1$.

Свойства симметрии

$$
\begin{aligned}
&S_\ell(r,-X) = (-1)^{\ell+1}\, S_\ell(r,X),\\
&C_\ell(r,-X) = (-1)^{\ell}\, C_\ell(r,X),\\
&e_\ell^{(1,2)}(r,-X) = (-1)^{\ell}\, e_\ell^{(2,1)}(r,X).
\end{aligned}
\tag{П1.5}
$$

Рекуррентные соотношения ($Z_\ell(r,X)$ обозначают любую из функций $S_\ell(r,X)$, $C_\ell(r,X)$, $e_\ell^{(1,2)}(r,X)$):

$$
\begin{aligned}
&(ir+\ell)Z_{\ell-1}(r,X) + (ir-\ell-1)Z_{\ell+1}(r,X) = i\,\mathrm{cth}X\,(2\ell+1)\,Z_\ell(r,X),\\
&(ir+\ell)(ir+\ell+1)e^{i\frac{d}{dr}} Z_\ell(r,X) - ir(ir-1)e^{-i\frac{d}{dr}} Z_\ell(r,X) =\\
&= 2r\,(ir-1)\,\mathrm{sh}X\, Z_{\ell+1}(r,X),\\
&\left[(ir-\ell)(ir-\ell-1)e^{i\frac{d}{dr}} - ir(ir-1)e^{-i\frac{d}{dr}}\right] Z_\ell(r,X) = -2r\,(ir-1)\,\mathrm{sh}X\, Z_{\ell-1}(r,X),\\
&\left[(ir+\ell)\, e^{i\frac{d}{dr}} - (ir-\ell)\,\mathrm{ch}X\right] Z_\ell(r,X) = (r+i)\,\mathrm{sh}X\, Z_{\ell+1}(r,X),\\
&\left[(ir+\ell+1)\,\mathrm{ch}X - ir\, e^{-i\frac{d}{dr}}\right] Z_\ell(r,X) = -i\,(ir-\ell-1)\,\mathrm{sh}X\, Z_{\ell+1}(r,X),\\
&\left[(ir-1)\,\mathrm{ch}X - (ir-\ell-1)e^{i\frac{d}{dr}}\right] Z_\ell(r,X) = -i\,(ir-1)\,\mathrm{sh}X\, Z_{\ell-1}(r,X),\\
&\left[ir\, e^{-i\frac{d}{dr}} - (ir-\ell)\,\mathrm{ch}X\right] Z_\ell(r,X) = -i\,(ir+\ell)\,\mathrm{sh}X\, Z_{\ell-1}(r,X).
\end{aligned}
\tag{П1.6}
$$

Функции S_ℓ , C_ℓ и $e_\ell^{(1,2)}$, как и их нерелятивистские аналоги (2.16), выражаются через элементарные функции. В частности, при ℓ =0 имеем

$$
\begin{aligned}
&S_0(r,X) = \sin rX, \qquad C_0(r,X) = \cos rX,\\
&e_0^{(1,2)}(r,X) = e^{\pm irX}.
\end{aligned}
\tag{П1.7}
$$

Решения с $\ell \neq 0$ выражаются через S_0 , C_0 и $e_0^{(1,2)}$ при помощи соотношений

$$
Z_\ell(r,X) = (-1)^\ell \frac{(\mathrm{sh}X)^{\ell+1} r}{r(\ell+1)} \left(\frac{d}{d\,\mathrm{ch}X}\right)^\ell \frac{Z_0(r,X)}{\mathrm{sh}X}, \tag{П1.8а}
$$

$$
Z_\ell(r,X) = -\frac{(-r)^{(\ell+1)}}{(\mathrm{sh}X)^\ell} \left(\frac{1}{ir}\,\mathrm{sh}\, i\frac{d}{dr}\right)^\ell \frac{Z_0(r,X)}{r}, \tag{П1.8б}
$$

В исчислении конечных разностей показано, что два решения $Z^{(1)}(r)$ и $Z^{(2)}(r)$ линейно независимы, если определитель

$$
W(Z^{(1)}, Z^{(2)}) = \begin{vmatrix} Z^{(1)}(r) & Z^{(2)}(r) \\ \Delta Z^{(1)}(r) & \Delta Z^{(2)}(r) \end{vmatrix} \tag{П1.9}
$$

отличен от нуля. Вронскианы решений свободного уравнения Шредингера имеют вид

$$
\begin{aligned}
&W(S_\ell, C_\ell) = W(S_\ell, e_\ell^{(1,2)}) = \mp W(e_\ell^{(1,2)}, C_\ell) =\\
&= \frac{1}{2i}\, W(e_\ell^{(1)}, e_\ell^{(2)}) = -\frac{\mathrm{sh}X}{V_\ell(r)} \equiv W_\ell(r,X).
\end{aligned}
\tag{П1.10}
$$

В нерелятивистском пределе $\Delta \to \frac{d}{dr}$, и (П1.10) переходит во вронскиан решений свободного уравнения Шредингера $j_\ell(qr)$ и $n_\ell(qr)$, равный q .

Отметим также, что вследствие (П1.5) справедливо равенство

$$We(\tau, x_q) = -We(\tau, -x_q). \tag{П1.11}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ П.

Свойства $\hat{\theta}$ – функции

Как и в квантовой механике, релятивистская функция Грина (2.21) представляет собой комбинацию решений свободного уравнения Шредингера. Однако вместо обычной ступенчатой функции

$$\theta(\tau) = \begin{cases} 1 & \tau > 0 \ , \\ 0 & \tau < 0 \ , \end{cases} \tag{П2.1}$$

в это выражение входит величина $\hat{\theta}(\tau)$ /4/. Эта величина является конечно-разностным обобщением ступенчатой функции (П2.1). Она определяется интегральным представлением

$$\hat{\theta}(\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\varkappa\tau}}{e^{\varkappa - i\varepsilon} - 1} d\varkappa \tag{П2.2}$$

и удовлетворяет уравнению

$$\Delta \hat{\theta}(\tau) = \delta(\tau). \tag{П2.3}$$

Из интегрального представления (П2.2) следует, что $\hat{\theta}(\tau)$ имеет мнимую часть

$$\mathrm{Im}\, \hat{\theta}(\tau) = \frac{i}{2}\delta(\tau), \tag{П2.4}$$

а также справедливо соотношение

$$\hat{\theta}(\tau) + \hat{\theta}^*(-\tau) = 1. \tag{П2.5}$$

Можно так определить произведение обобщенных функций $\hat{\theta}(z)$, чтобы, аналогично нерелятивистскому случаю, выполнялись равенства

$$\hat{\theta}(\tau)\,\hat{\theta}(\tau)=\hat{\theta}(z),$$
$$\hat{\theta}(\tau)\,\hat{\theta}^{*}(-\tau)=0. \qquad (\Pi 2.6)$$

Различные представления функции Грина

С помощью формул (П1.2) и (П2.5) функцию Грина (2.21) можно представить в виде комбинаций различных пар независимых решений релятивистского уравнения Шредингера

$$G_{\ell}^{(+)}(\tau,\tau';X_q)=-\frac{1}{W_\ell(z',X)}\Big\{\hat{\theta}(z-z')\big[S_\ell(z,X_q)C_\ell(z',X_q)-$$
$$-C_\ell(z,X_q)S_\ell(z',X_q)\big]-\hat{\theta}(z+z')\big[S_\ell(z,X_q)C_\ell(z',X_q)+ \qquad (\Pi 2.7)$$
$$+C_\ell(z,X_q)S_\ell(z',X_q)\big]+S_\ell(z',X_q)\big(C_\ell(z,X_q)-i\,S_\ell(z,X_q)\big)\Big\};$$

$$G_{\ell}^{(+)}(\tau,\tau';X_q)=\frac{1}{W_\ell(z',X_q)}\Big\{\hat{\theta}(z-z')e_\ell^{(1)}(z,X_q)S_\ell(z',X_q)+$$
$$+\hat{\theta}^{*}(z'-z)e_\ell^{(1)}(z',X_q)S_\ell(z,X_q)+\hat{\theta}^{*}(-z-z')\big[2i\,S_\ell(z,X_q)S_\ell(z',X_q)-$$
$$-e_\ell^{(1)}(z,X_q)S_\ell(z',X_q)-e_\ell^{(1)}(z',X_q)S_\ell(z,X_q)\big]\Big\}.$$

(П2.8)

Литература

1. A.A. Logunov, A.N. Tavkhelidze. Nuovo Cimento 29, 380 (1963).
2. V.G. Kadyshevsky. Nucl. Phys., B6, 125 (1968).
3. В.Г. Кадышевский, А.Н. Тавхелидзе. "Проблемы теоретической физики". Сб., посвященный Н.Н. Боголюбову в связи с его шестидесятилетием. Наука, Москва, 1969.
4. В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Скачков. ЭЧАЯ, т.2, вып. 3, Атомиздат, Москва, 1971.
5. V.G. Kadyshevsky, R.M. Mir-Kasimov, N.B. Skachkov. Nuovo Cim., 55A, 233 (1968).
6. M. Freeman, M.D. Mateev, R.M. Mir-Kasimov. Nucl.Phys., B12, 197 (1969).
7. В.В. Бабиков. "Метод фазовых функций в квантовой механике". Наука, Москва, 1968.
8. Ф. Калоджеро. "Метод фазовых функций в теории потенциального рассеяния". "Мир", Москва, 1972.
9. В.В. Бабиков. УФН, 92, 3 (1967).
10. В.В. Бабиков, Пак Бен Гир. Препринт ИТФ, 71-77Р, Киев (1971).
11. В.В. Бабиков, Г.В. Груша, Р.М. Мир-Касимов, Н.Б. Шульгина. Препринт ОИЯИ Р2-6829, Дубна, (1972).

Рукопись поступила в издательский отдел
1 декабря 1972 года.