ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6827

Дао Вонг Дык

МАСШТАБНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ АКСИАЛЬНОГО ТОКА И $\sigma\pi\pi$ - ВЕРШИНА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

P2 - 6827

Дао Вонг Дык

МАСШТАБНАЯ РАЗМЕРНОСТЬ АКСИАЛЬНОГО ТОКА И $\sigma\pi\pi$ - ВЕРШИНА

Направлено в ЯФ

Дао Вонг Дык

P2 - 6827

Масштабная инвариантность аксиального тока и $\sigma\pi\pi$ - вершина

Проводится вычисление масштабной размерности временной компоненты аксиального тока. На основе закона масштабного преобразования тока рассматривается $\sigma\pi\pi$ вершина; полученное выражение хорошо согласуется с экспериментом.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1972

Dao Vong Dyc

P2 - 6827

Scale Dimensionality of Axial Current and $\sigma\pi\pi$ Peak

Scale dimensionality is calculated for time component of axial current. $\sigma\pi\pi$ peak is considered basing on the law of scale transformation of current. The obtained expression agrees well with experiment.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1972

По поведению тока при масштабном преобразовании можно судить о характере матричных элементов соответствующих физических процессов в рамках теории масштабной инвариантности /1-4/. Вопросу о размерности тока уже посвящен ряд работ /5-8/. В настоящей работе проводится вычисление масштабной размерности временной компоненты аксиального тока и затем рассматривается связанная с ней $\sigma\pi\pi$ - вершина. При этом, в отличие от некоторых работ /9-12/, где существенно предположение о характере преобразования плотности гамильтониана, мы исходим из закона масштабного преобразования тока и используем лишь некоторые общепринятые предположения.

1. Допустим, что токи имеют определенное поведение при масштабном преобразовании. Это означает, что имеет место следующее коммутационное соотношение /13/

$$[D(x_0), J_\mu(x)] = -i(\ell_{J_\mu} - x^\nu \partial_\nu) J_\mu(x), \qquad /1/$$

где $D(x_0)$ - генератор масштабного преобразования, который выражается через "улучшенный" тензор энергии-импульса $\theta_{\mu\nu}$ /14/:

$$D(x_0) = -\int d\vec{x}\, x^\nu \theta_{0\nu}(x), \qquad /2/$$

ℓ_{J_μ} - масштабная размерность μ -ой компоненты тока. Вообще говоря, временная и пространственные компоненты могут иметь разные размерности. В самом деле, пользуясь тождеством Якоби, написанным для генераторов однородного преобразования Лоренца $M_{\mu\nu}$, генератора масштабного преобразования $D(0)$ и тока $J_\mu(0)$, можно показать, что все пространственные компоненты тока имеют одинаковую масштабную размерность, а необходимым и достаточным условием для того, чтобы эта размерность совпала с размерностью временной компоненты ℓ_{J_0}, является /5,8/:

$$\int_{x_0=0} d\vec{x}\, x_i\, [\theta^{\mu}_{\mu}(x), J_i(0)] = 0 \qquad /3/$$

или

$$\int_{x_0=0} d\vec{x}\, x_i\, [\theta^{\mu}_{\mu}(x), J_0(0)] = 0. \qquad /4/$$

Как было показано в работе[7], для сохраняющегося векторного тока $\ell_{J_0} = -3$, что находится в согласии с тем, что соответствующие заряды образуют алгебру типа

$$[Q^V_a(t), Q^V_b(t)] = i\epsilon_{abc} Q^V_c(t). \qquad /5/$$

Если же вместе с ними соответствующие аксиальным токам заряды удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[Q^A_a(t), Q^A_b(t)] = i\epsilon_{abc}\, Q^V_c(t), \qquad /6/$$

то сразу следует, что масштабная размерность временной компоненты тока $J^A_{\mu a}$ также равна -3. Однако, как будет показано, в случае несохраняющегося аксиального тока дело обстоит несколько иначе.

Для определенности рассмотрим $J^A_{\mu 3}$. Берем матричные элементы от обеих частей уравнения /1/, написанного для $J^A_{03}(0)$ по протонному состоянию /как барионное состояние с наименьшей массой/, и разлагаем полученную левую часть по полному набору промежуточных состояний. Тогда имеем:

$$\sum_m \{ \langle p(\vec{p}s)|D(0)|m\rangle\langle m|J^A_{03}(0)|p(\vec{p}s)\rangle - (D \rightleftarrows J^A_{03}) \} =$$

$$= -i\ell_{J_0} \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})_{ss}}{2M} f^A_1(0), \qquad /7/$$

где $\vec{p}$, s, M - импульс, направление поляризации и масса протона, соответственно, $f^A_1(0)$ представляет собой константу перенормировки слабых взаимодействий, $f^A_1(0) = G^A$, и определяется уравнением:

$$<N_j(\vec{p}\,'s')|\,J^A_{\mu a}(0)\,|N_i(\vec{p}s)> =$$

$$= i\,\bar{u}^{(s')}(\vec{p}\,')\{\gamma_\mu f_1^A(t) + i\sigma_{\mu\nu}(p'-p)^\nu f_2^A(t) + (p'-p)_\mu f_3^A(t)\}\times \qquad /8/$$

$$\times\gamma_5 u^{(s)}(\vec{p})(\frac{\tau_a}{2})_{ji}, \qquad t \equiv (p'-p)^2.$$

Преобразуем теперь левую часть уравнения /7/. Для этого, используя /2/ и свойство трансляционной инвариантности, перепишем $<p(\vec{p}s)|D(0)|m>$ в виде:

$$<p(\vec{p}s)|\,D(0)\,|m> = -i(2\pi)^3\frac{\partial}{\partial p_k(m)}\delta(\vec{p}-\vec{p}(m))<p(\vec{p}s)|\theta_{0k}(0)|m>. \qquad /9/$$

Выделим сначала из суммы $\sum_m$ однонуклонное состояние. Имеем:

$$\sum_{m=N}<p(\vec{p}s)|D(0)|m><m|\,J^A_{03}(0)\,|p(\vec{p}s)> =$$

$$= \sum_r i\frac{\partial}{\partial q_k}\{\frac{M}{q^0}<p(\vec{p}s)|\theta_{0k}(0)|p(\vec{q}r)><p(\vec{q}r)|J^A_{03}(0)|p(\vec{p}s)>\}_{\vec{q}=\vec{p}}. \qquad /10/$$

Из общего выражения для матричного элемента от тензора энергии-импульса между однонуклонными состояниями /15/

$$<p(\vec{p}s)|\theta_{\mu\nu}(0)|\,p(\vec{q}r)> =$$

$$= \bar{u}^{(s)}(\vec{p})\{a(k^2)(k_\mu k_\nu - k^2 g_{\mu\nu}) + b(k^2)P_\mu P_\nu + \qquad /11/$$

$$+ c(k^2)(P_\mu\gamma_\nu + \gamma_\mu P_\nu)\}u^{(p)}(\vec{p}),\quad k \equiv p-q,\quad P \equiv \frac{1}{2}(p+q)$$

можно найти

$$\frac{\partial}{\partial q_k}<p(\vec{p}s)|\theta_{0k}(0)|p(\vec{q}r)>|_{\vec{q}=\vec{p}} = \frac{1}{2M}(\frac{\vec{p}^2}{p^0} + 3p^0)\delta_{sr}, \qquad /12/$$

а из /8/:

$$\frac{\partial}{\partial q_k} \langle p(\vec{q}r) | J^A_{03}(0) | p(\vec{p}s) \rangle \Big|_{\vec{q}=\vec{p}} = -\frac{f^A_1(0)}{4M} (\sigma^k)_{rs} - \frac{f^A_2(0)}{4M(M+p_0)} \times \times [(\vec{\sigma}\vec{p})\sigma^k , \vec{\sigma}\vec{p}]_{rs} . \qquad /13/$$

Подставляя /8/, /11/-/13/ в /10/, получим:

$$\sum_{m=N} \langle p(\vec{p}s) | D(0) | m \rangle \langle m | J^A_{03}(0) | p(\vec{p}s) \rangle = i \{ 3 + \frac{M^2}{p_0^2} \} \frac{(\vec{\sigma}\vec{p})_{ss}}{4M} f^A_1(0). \qquad /14/$$

Второй член в левой части /7/, соответствующий перестановке D и J^A_{03} , дает точно такой же вклад /с обратным знаком/.

Рассмотрим теперь вклад от состояний $m \neq N$. Снова используя /9/, а также закон сохранения энергии-импульса $\partial^\mu \theta_{\mu\nu} = 0$, можем написать:

$$\sum_{m\neq N} \langle p(\vec{p}s) | D(0) | m \rangle \langle m | J^A_{03}(0) | p(\vec{p}s) \rangle =$$

$$= i(2\pi)^3 \sum_{m\neq N} \delta(\vec{p}-\vec{q}) \{ \frac{\partial}{\partial q_k} \langle p(\vec{p}s) | \theta_{0k}(0) | m(q) \rangle \} \langle m(q) | J^A_{03}(0) | p(\vec{p}s) \rangle. \qquad /15/$$

Это уравнение можно еще преобразовать к более компактному виду, а именно:

$$\sum_{m\neq N} \langle p(\vec{p}s) | D(0) | m \rangle \langle m | J^A_{03}(0) | p(\vec{p}s) \rangle =$$

$$= -(2\pi)^3 \sum_{m\neq N} \frac{\delta(\vec{p}-\vec{q})}{(p-q)^2} \langle p(\vec{p}s) | \theta^\mu_\mu(0) | m(q) \rangle \langle m(q) | \partial^\mu J^A_{\mu 3}(0) | p(\vec{p}s) \rangle. \qquad /16/$$

Из /7/, /14/ и /16/ мы получаем следующую формулу для ℓ_{J0} : $\ell_{J0} = -(3+\delta)$

$$\delta \equiv \frac{2iM}{f^A_1(0)} \lim_{|\vec{p}|\to\infty} \frac{(2\pi)^3}{(\vec{\sigma}\vec{p})_{ss}} \sum_{m\neq N} \frac{\delta(\vec{p}-\vec{q})}{(p-q)^2} \{ \langle p(\vec{p}s) | \theta^\mu_\mu(0) | m(q) \rangle \qquad /17/$$

$$\langle m(q) | \partial^\mu J^A_{\mu 3}(0) | p(\vec{p}s) \rangle - (\theta^\mu_\mu \rightleftarrows \partial^\mu J^A_{\mu 3}) \}.$$

Отсюда видно, что в общем случае еще нет основания считать, что для несохраняющегося тока ℓ_0 равна -3, так как пока нельзя сделать какое-нибудь заключение о значении δ.

Для иллюстрации рассмотрим, например, вклад в δ от бариона $\tilde{p}$ / $\tilde{M}$ = 1535 Мэв, $J^P = \frac{1}{2}^-$ /. Вычисление дает:

$$\delta(\tilde{p}) = -\frac{4}{f_1^A(0)\, m_\sigma^2\, m_\pi^2\, (\tilde{M}^2 - M^2)} \lim_{t \to 0} (F_\theta(t) F_J(t)),$$

где F_θ и F_J - формфакторы, определенные равенствами:

$$<p(\vec{p}s)|\,\theta_\mu^\mu(0)\,|\tilde{p}(\vec{q}r)> = F_\theta((p-q)^2)\frac{\bar{u}^{(s)}(\vec{p})\gamma_5 u^{(r)}(\vec{q})}{-(p-q)^2 + m_\sigma^2},$$

$$<\tilde{p}(\vec{q}p)|\,\partial^\mu J^A_{\mu 3}(0)\,|p(\vec{p}s)> = F_J((p-q)^2)\frac{\bar{u}^{(r)}(\vec{q})u^{(s)}(\vec{p})}{-(p-q)^2 + m_\pi^2}.$$

Таким образом, значение $\delta(\tilde{p})$ целиком определяется поведением формфакторов $F_\theta(t)$ и $F_J(t)$ при малом t и равно нулю только если их произведение стремится к нулю при $t \to 0$.

Проверим формулу /17/ на частном примере - случае свободного нуклонного поля. Тогда

$$\theta_{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\bar{\psi}\gamma_\mu \overleftrightarrow{\partial}_\nu \psi + \bar{\psi}\gamma_\nu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi)$$

$$J^A_{\mu a} = i\bar{\psi}\gamma_\mu \gamma_5 \frac{\tau_a}{2}\psi .$$

Очевидно, что теперь в сумму /17/ могут дать вклад только состояния с одним протоном и нуклон-антинуклонной парой. В результате имеем:

$$\delta = -\frac{M^2}{p_0^2}\Big|_{\vec{p} \to \infty} = 0,$$

т.е. в данном случае $\ell_{J_0} = -3$, что и следует ожидать.

2. Переходим теперь к рассмотрению $\sigma\pi\pi$ -вершины. Из /1/ и /2/ легко вывести следующий одновременный коммутатор между генератором D и зарядом Q_a^A:

$$[D(x_0), Q_a^A(x_0)] = -i(\ell_{J_0}+3)Q_a^A(x_0) + ix_0\int d\vec{x}\,\partial^\mu J_{\mu a}^A(x). \qquad /18/$$

Продифференцировав обе части равенства /18/ по времени, имеем:

$$[\dot{D}(0), Q_a^A(0)] + [D(0), \dot{Q}_a^A(0)] =$$
$$= -(\ell_{J_0}+3)\dot{Q}_a^A(0) + i\int_{x_0=0} d\vec{x}\,\partial^\mu J_{\mu a}^A(x). \qquad /19/$$

Подставляя в это уравнение

$$\dot{D}(x_0) = -\int d\vec{x}\,\theta_\mu^\mu(x), \qquad /20/$$

$$\dot{Q}_a^A(x_0) = \int d\vec{x}\,\partial^\mu J_{\mu a}^A(x), \qquad /21/$$

а также привлекая гипотезу ЧСАТ

$$\partial^\mu J_{\mu a}^A = \frac{m_\pi^2 f_\pi}{\sqrt{2}}\phi_a, \qquad /22/$$

перепишем его в следующем виде:

$$-\int_{x_0=0} d\vec{x}\,[\theta_\mu^\mu(x), Q_a^A(0)] = \frac{i m_\pi^2 f_\pi}{\sqrt{2}} \int_{x_0=0} d\vec{x}\,[\ell_\phi - \ell_{J_0} - 2 - x^k\partial_k]\phi_a(x), \qquad /23/$$

где ℓ_ϕ - масштабная размерность поля ϕ, т.е.

$$[D(x_0), \phi_a(x)] = -i(\ell_\phi - x^\nu\partial_\nu)\phi_a(x). \qquad /24/$$

Возьмем матричный элемент обеих частей уравнения /23/ между одночастичными состояниями π-мезона и σ-мезона. После некоторых простых преобразований в правой части имеем:

$$-\int d\vec{x} \langle\sigma(q)|[\theta_\mu^\mu(x), Q_a^A(0)]|\pi_b(p)\rangle =$$

$$= \frac{i m_\pi^2 f_\pi}{\sqrt{2}} (\ell_\phi - \ell_{J_0} + 1)(2\pi)^3 \delta(\vec{q} - \vec{p}) \frac{1}{-(q-p)^2 + m_\pi^2} < \sigma(q) | \eta_a(0) | \pi_b(p) >, \qquad /25/$$

где через η_a обозначаем источник поля ϕ_a. Разлагая матричный элемент в левой части уравнения /25/ по полному набору промежуточных состояний, имеем:

$$\int d\vec{x} < \sigma(q) | [\theta^\mu_\mu(x), Q^A_a(0)] | \pi_b(p) > =$$

$$= \sum_m (2\pi)^3 \{ \delta(\vec{q} - \vec{p}_m) < \sigma(q) | \theta^\mu_\mu(0) | m >< m | Q^A_a(0) | \pi_b(p) > - \qquad /26/$$

$$- \delta(\vec{p} - \vec{p}_m) < \sigma(q) | Q^A_a(0) | m >< m | \theta^\mu_\mu(0) | \pi_b(p) > \}.$$

Для дальнейшего вычисления этого выражения будем считать, как это часто принимается, что $(\sigma, \vec{\pi})$ преобразуется по представлению $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ киральной группы $SU(2) \times SU(2)$:

$$[Q^A_a, \pi_b] = -i \sigma \cdot \delta_{ab},$$

$$\qquad /27/$$

$$[Q^A_a, \sigma] = i \pi_a,$$

и что сумма в правой части уравнения /26/ доминируется вкладом от нижайшего возможного одночастичного состояния, а именно в первом члене главный вклад дает только состояние $|m> = |\sigma>$, а во втором члене - только состояние $|m> = |\pi>$. Тогда имеем:

$$- \int d\vec{x} < \sigma(q) | [\theta^\mu_\mu(x), Q^A_a(0)] | \pi_b(p) > =$$

$$= 2i(2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{q}) \delta_{ab} (m^2_\sigma - m^2_\pi). \qquad /28/$$

При этом было использовано известное равенство /15/

$$< M(p) | \theta^\mu_\mu(0) | M(p) > = 2 m^2_M \qquad /29/$$

для бозонной частицы M.

Из /25/ и /28/ находим:

$$\frac{m_\pi^2 f_\pi}{\sqrt{2}}(\ell_\phi-\ell_{J_0}+1)\frac{1}{-(q-p)^2+m_\pi^2}\langle\sigma(q)|\eta_a(0)|\pi_b(p)\rangle|_{\vec{q}=\vec{p}}=2\delta_{ab}(m_\sigma^2-m_\pi^2). \quad /30/$$

Определим константу связи $G_{\sigma\pi\pi}$ при помощи равенства

$$\langle\sigma(q)|\eta_a(0)|\pi_b(p)\rangle=\delta_{ab}G_{\sigma\pi\pi}K((q-p)^2), \quad /31/$$

где K - некоторый формфактор с нормировкой

$$K(m_\pi^2)=1. \quad /32/$$

Отметим, что константа связи $G_{\sigma\pi\pi}$, определяемая через /31/, совпадает с константой связи G, определяемой через эффективный лагранжиан $\sigma\pi\pi$ взаимодействия:

$$\mathcal{L}_{\sigma\pi\pi}=\frac{G}{2}\sigma\vec{\pi}\vec{\pi}. \quad /33/$$

При помощи /31/ уравнение /30/ перепишется в виде:

$$\frac{m_\pi^2 f_\pi}{\sqrt{2}}(\ell_\phi-\ell_{J_0}+1)G_{\sigma\pi\pi}\frac{K((q-p)^2)}{-(q-p)^2+m_\pi^2}|_{\vec{q}=\vec{p}}=2(m_\sigma^2-m_\pi^2). \quad /34/$$

Устремим теперь $|\vec{p}|\to\infty$. Тогда из /34/ получим:

$$G_{\sigma\pi\pi}=\frac{2\sqrt{2}(m_\sigma^2-m_\pi^2)}{(\ell_\phi-\ell_{J_0}+1)f_\pi K(0)}. \quad /35/$$

Естественно предположить, что формфактор $K(t)$ имеет мягкое изменение. Тогда можно положить

$$K(0)\simeq K(m_\pi^2)=1 \quad /36/$$

и получить окончательную формулу

$$G_{\sigma\pi\pi} = \frac{2\sqrt{2}\,(m_\sigma^2 - m_\pi^2)}{(\ell_\phi - \ell_{J_0} + 1)\, f_\pi} . \qquad /37/$$

Часто используют безразмерную величину $g_{\sigma\pi\pi} \equiv \frac{G_{\sigma\pi\pi}}{2m_\pi}$. Допустим, что в /17/ можно положить $\delta \approx 0$, т.е. $\ell_{J_0} \approx -3$, и для поля ϕ можно взять его каноническую размерность, т.е. $\ell_\phi = -1$. Тогда для значений $m_\sigma \approx 700$ Мэв, $f_\pi \approx 0{,}96\, m_\pi$ уравнение /37/ дает

$$\frac{g^2_{\sigma\pi\pi}}{4\pi} \approx 11 . \qquad /38/$$

С другой стороны, как легко вычислить, ширина распада σ -мезона выражается через константу связи следующим образом:

$$\Gamma_\sigma \equiv \Gamma_{\sigma\to\pi^+\pi^-} + \Gamma_{\sigma\to\pi^0\pi^0} = \frac{3}{32\pi}\,\frac{1}{m_\sigma}\sqrt{1-\frac{4m_\pi^2}{m_\sigma^2}}\; G^2_{\sigma\pi\pi} . \qquad /39/$$

Подставляя сюда экспериментальное значение $\Gamma_\sigma \approx 400$ Мэв, получим:

$$\frac{g^2_{\sigma\pi\pi}}{4\pi} \approx 10{,}4 . \qquad /40/$$

Таким образом, в пределе экспериментальной точности /38/ и /40/ хорошо совпадают друг с другом.

Автор глубоко признателен проф. Д.И.Блохинцеву за постоянное внимание и за интерес к работе.

Литература

1. I.Wess. Nuovo Cim., 18, 1086 (1960).
2. H.Kastrup. Phys.Rev., 142, 1060 (1966).
3. G.Mack. Nucl.Phys., B5, 499 (1968).
4. *В.А.Матвеев, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе. ЭЧАЯ 2, вып.1 /1971/.*

5. M.A.B.Weg, I.Bernstein, I.Gross, R.Jackiw, A.Sirlin. Phys.Rev.Lett., 25, 1231 (1970).
6. I.Katz. Phys.Rev., D4, 1885 (1971).
7. M.S.Chanowitz. Phys.Rev., D4, 1717 (1971).
8. Дао Вонг Дык. Теор.Мат.физ., 13, 75 /1972/.
9. H.Kleinert, P.H.Weisz. Lett.Nuovo.Cim., IV, 1091 (1970).
10. R.I.Grewther. Phys.Lett., 33B, 305 (1970).
11. I.Ellis, P.H.Weisz, B.Zumino. Phys.Lett., 34B, 91 (1971).
12. D.N.Levin, S.Okubo, D.R.Palmer. Phys.Rev., D4, 1847 (1971).
13. G.Mack, A.Salam. Ann.Phys., 53, 174 (1969).
14. C.G.Callan, S.Coleman, R.Jackiw. Ann.Phys., 59, 42 (1970).
15. P.Carruthers. Phys.Rev., D2, 2265 (1970).

Рукопись поступила в издательский отдел
6 декабря 1972 года.