ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 6820

Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

НЕЙТРИНО В МИРЕ ФРИДМАНА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

P2 - 6820

Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

НЕЙТРИНО В МИРЕ ФРИДМАНА

Направлено в сборник "Проблемы теории гравитации и элементарных частиц"

В данной работе рассматривается, как ведет себя нейтрино в мире Фридмана. Подобного рода вопросы вызывают сейчас большой интерес, о чем свидетельствуют, например, тезисы докладов III советской гравитационной конференции /1/.

Здесь мы будем пренебрегать всеми взаимодействиями фермионов, кроме их взаимодействия с гравитационным полем. В таком приближении поведение фермионов вполне характеризуется уравнением Дирака

$$H^{\nu}\psi_{\nu} = \frac{imc}{h} H^{4}\psi , \qquad /1/$$

скалярным произведением

$$(\bar{v},u) = i \int_{\Sigma} \bar{v} H_4 \, [Q_1 Q_2 Q_3] u , \qquad /2/$$

определяющим алгебру полевых операторов, и тензором энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = \frac{ih}{4}[\bar{\psi} H_{\mu}\psi_{\nu} - \bar{\psi}_{\nu} H_{\mu}\psi + \bar{\psi} H_{\nu}\psi_{\mu} - \bar{\psi}_{\mu} H_{\nu}\psi] . \qquad /3/$$

/Употребляемые здесь обозначения см. в /2-5/ /. Для рассматриваемых здесь вопросов неважно, описывать ли нейтринное поле четырехкомпонентным спинором или двухкомпонентным полуспинором. Поэтому будем его описывать, попросту полагая в /1/ $m = 0$.

Докажем, что поведение нейтрино конформно инвариантно. Это значит, что нейтрино ведет себя в мире с некоторой метрикой ds^2 так же, как и в мире с метрикой

$$ds'^2 = B^2(\theta,\xi^1,\xi^2,\xi^3) ds^2 . \qquad /4/$$

Два гравитационных поля, из которых одно отвечает за метрику ds^2, а другое - за метрику ds'^2, с точки зрения нейтрино одинаковы. Поясним это на важном примере, когда одно из такой пары гравитационных полей статическое. Оно отвечает за метрику, приводимую к каноническому виду

$$ds^2 = \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik}(\xi^1, \xi^2, \xi^3) d\xi^i d\xi^k - d\theta^2. \qquad /5/$$

Вполне понятно, что статическое поле не может порождать нейтрино, как, впрочем, и другие фермионы или бозоны. Утверждение о конформной инвариантности поведения нейтрино, в частности, означает, что и гравитационное поле, отвечающее за метрику /4/, где ds^2 равно /5/, тоже не может порождать нейтрино. Гравитационное поле в мире Фридмана принадлежит как раз к числу таких полей. В мире Фридмана множитель B зависит только от θ, пространственная же часть в /5/ является метрической формой либо евклидова пространства, либо сферического пространства, либо пространства Лобачевского.

Чтобы доказать наше утверждение, достаточно доказать конформную инвариантность уравнения

$$H^{\nu} \psi_{\nu} = 0, \qquad /6/$$

скалярного произведения /2/ и интеграла

$$\hat{K} = \int_{\Sigma} K^{\mu} T_{\mu\nu} \, d\sigma^{\nu}, \qquad /7/$$

где K^{μ} - некоторое векторное поле. Доказательство будем проводить для n -мерного мира. Для уравнения Дирака существенно, однако, чтобы n было четным. Реальный случай, разумеется, $n = 4$.

Пусть в мире с метрикой ds^2 выбран ортогональный репер f^{a}, так что $ds^2 = \eta_{a\beta} f^{a} f^{\beta}$. Из /4/ следует, что в мире с метрикой ds'^2 можно выбрать репер $f'^{a} = B f^{a}$. Имеем также $e_a = B e'_a$. Таким образом,

$$f'^{a}_{\beta} = B f^{a}_{\beta}, \qquad \tilde{\tilde{f}}^{a}_{\beta} = B \tilde{\tilde{f}}'^{a}_{\beta}. \qquad /8/$$

Штрихованные величины и далее будут связываться с метрикой ds'^2, а нештрихованные - с метрикой ds^2. Из /8/ следует, что

$$[Q'_1 \cdots Q'_{n-1}] = B^{n-1} [Q_1 \cdots Q_{n-1}].$$

Если сделаем подстановку $u = B^{\frac{n-1}{2}} u'$, $\bar{v} = B^{\frac{n-1}{2}} \bar{v}'$, то добьемся равенства

$$\bar{v}' H_n [Q_1' \cdots Q_{n-1}'] u' = \bar{v} H_n [Q_1 \cdots Q_{n-1}] u \,. \qquad /9/$$

Как легко понять, мы должны прибегнуть к подстановке

$$\psi = B^{\frac{n-1}{2}} \psi' . \qquad /10/$$

Из /8/ находим, далее, связь между коэффициентами неголономности

$$c^{\gamma}_{\alpha\beta} = B c'^{\gamma}_{\alpha\beta} + \delta^{\gamma}_{\beta} e'_{\alpha} B - \delta^{\gamma}_{\alpha} e'_{\beta} B$$

и коэффициентами вращения реперов

$$\omega_{\alpha\beta\nu} = B \omega'_{\alpha\beta\nu} + \eta_{\beta\nu} e'_{\alpha} B - \eta_{\alpha\nu} e'_{\beta} B \,.$$

Отсюда получаем

$$\psi_{\nu} = B^{\frac{n+1}{2}} \psi'_{\nu} + \frac{1}{2} B^{\frac{n-1}{2}} (n e'_{\nu} B - H_{\nu} H^{\alpha} e'_{\alpha} B) \psi' ,$$

$$\bar{\psi}_{\nu} = B^{\frac{n+1}{2}} \bar{\psi}'_{\nu} + \frac{1}{2} B^{\frac{n-1}{2}} \bar{\psi}' (n e'_{\nu} B - e'_{\alpha} B H^{\alpha} H_{\nu}) \,. \qquad /11/$$

Следовательно,

$$H^{\nu} \psi_{\nu} = B^{\frac{n+1}{2}} H^{\nu} \psi'_{\nu} , \qquad /12/$$

$$T_{\mu\nu} = B^{n} T'_{\mu\nu} \,. \qquad /13/$$

В силу /12/ уравнение /6/ конформно инвариантно. Далее, каждому векторному полю K^{μ} в одном мире соответствует векторное поле $K'^{\mu} = BK^{\mu}$ в другом. Кроме того, $d\sigma'^{\nu} = B^{n-1} d\sigma^{\nu}$. В силу /13/, следовательно,

$$K'^{\mu} T'_{\mu\nu} \, d\sigma'^{\nu} = K^{\mu} T_{\mu\nu} \, d\sigma^{\nu} . \qquad /14/$$

Мы почти доказали наше утверждение. Чтобы доказательство стало полным, остается предположить, что функция B и функция B^{-1} заданы всюду и нигде в нуль не обращаются.

Можно, однако, ослабить это условие и потребовать, чтобы обе функции были заданы и не обращались в нуль в некоторой области, содержащей полную гиперповерхность Σ. При этом интегралы /2/ и /7/ остаются конформно инвариантными. В указанной области остается конформно инвариантным и поведение нейтрино. Это ослабленное условие весьма интересно с точки зрения нашей задачи, поскольку в мире Фридмана функция B не зависит от пространственных координат, а в качестве полных гиперповерхностей Σ можно выбирать гиперповерхности $\theta = const$. Мы видим, что поведение нейтрино в мире Фридмана определяется только знаком кривизны гиперповерхности $\theta = const$. Следовательно, чтобы изучить поведение нейтрино во всех мирах Фридмана, достаточно рассмотреть плоский мир с метрикой

$$ds^2 = d\zeta^2 + \zeta^2 d\eta^2 + \zeta^2 \sin^2\eta \, d\xi^2 - d\theta^2 ,$$

сферический мир с метрикой

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2\theta} \left(d\zeta^2 + \sin^2\zeta \, d\eta^2 + \sin^2\zeta \sin^2\eta \, d\xi^2 - d\theta^2 \right)$$

и мир Лобачевского с метрикой

$$ds^2 = \frac{1}{ch^2\theta} \left(d\zeta^2 + sh^2\zeta \, d\eta^2 + sh^2\zeta \sin^2\eta \, d\xi^2 - d\theta^2 \right) .$$

Эти миры замечательны тем, что имеют постоянную кривизну. Первый случай, разумеется, хорошо изучен. Второй случай рассмотрен нами в /2,5/. Третий случай рассматривался Б.А.Левитским /1/.

Если на функции B и B^{-1} не накладывать ограничений, то в области, где они обе не обращаются в нуль, сохраняются не все черты конформно инвариантного поведения нейтрино, а только те, которые описываются дифференциальными характеристиками, но не интегральными характеристиками типа /2/ и /7/. В связи с этим интересно заметить, что любые два мира Фридмана могут быть приведены в конформное соответствие, поскольку в такое соответствие с плоским миром могут быть приведены сферический мир и мир Лобачевского. Это достигается с помощью стереографической проекции Пуанкаре.

В работе /3/ для каждого изометрического поля Киллинга, т.е. для векторного поля, подчиненного уравнению

$$D_a K_\beta + D_\beta K_a = 0 , \qquad /15/$$

найден оператор, действующий в пространстве решений уравнения /1/. Таким же методом можно было бы найти оператор, действующий в пространстве решений уравнения /6/ и задаваемый конформным полем Киллинга, т.е. векторным полем, подчиненным уравнению

$$D_a K_\beta + D_\beta K_a = 2F\eta_{a\beta} . \qquad /16/$$

Однако здесь мы предпочтем другой метод. Для двух конформных миров имеем

$$D'_a K'_\beta = D_a K_\beta + \eta_{a\beta} \cdot \frac{K^\nu e_\nu B}{B} + \frac{1}{B}(K_\beta e_a B - K_a e_\beta B) . \qquad /17/$$

Следовательно, если K_β - конформное поле Киллинга в одном мире, то $K'_\beta = BK_\beta$ - конформное поле Киллинга в другом мире, причем

$$F' = F + \frac{K^\nu e_\nu B}{B} . \qquad /18/$$

В малой окрестности точки всегда можно найти функцию B, такую, чтобы $F' = 0$, т.е. чтобы поле K'_β стало изометрическим полем Киллинга. Найденный нами оператор переводит спинор ψ' в спинор

$$-ih\,[K'^\nu \psi'_\nu + \frac{1}{4}(D'_a K'_\beta)H^a H^\beta \psi'] .$$

С помощью подстановки /10/ и формул /11/, /17/, /18/ отсюда нетрудно получить, что конформному полю Киллинга должен отвечать оператор

$$\hat{K} = -ih\,[K^\nu D_\nu + \frac{1}{4}(D_a K_\beta - F\eta_{a\beta})H^a H^\beta + \frac{n-1}{2} F] =$$

$$= -ih[K^{\nu} D_{\nu} + \frac{1}{4}(D_a K_{\beta})H^a H^{\beta} + \frac{n-2}{4} F] . \qquad /19/$$

Это оператор конформного момента спинорного поля. Так как

$$H^{\nu} D_{\nu} \hat{K} - \hat{K} H^{\nu} D_{\nu} = -ih\, H^{\nu} D_{\nu} , \qquad /20/$$

то оператор $\hat{K}$ действует в пространстве решений уравнения /6/.

В работе [3] было установлено, что для изометрического поля Киллинга интеграл /7/ представляется в виде

$$\hat{K} = \int_{\Sigma} K^{\mu} T_{\mu\nu}\, d\sigma^{\nu} = (\bar{\psi} , \hat{K} \psi) . \qquad /21/$$

Доказательство основывалось на том, что в этом случае векторное поле

$$T_{\nu} = K^{\mu} T_{\mu\nu} + \bar{\psi} H_{\nu} \hat{K} \psi \qquad /22/$$

является дивергенцией антисимметричного тензора

$$T_{\nu} = \frac{ih}{4} D_a \psi [H_{\nu} K H^a]\psi + \frac{ih}{2} D_a \psi (K_{\nu} H^a - K^a H_{\nu}) \psi , \qquad /23/$$

где $K = K_{\beta} H^{\beta}$, а значит, по теореме Стокса, $\int_{\Sigma} T_{\nu}\, d\sigma^{\nu} = 0$. Нетрудно, однако, убедиться, что и для конформного поля Киллинга выполняется равенство /23/, а, следовательно, выполняется и равенство /21/. Интеграл /21/ является вторично квантованным оператором конформного момента. В случае $m = 0$ конформный момент сохраняется. Напротив, в случае $m \neq 0$ конформный момент не сохраняется. Сохранение конформного момента в первом случае тесно связано с тем, что след

$$T = -mc\, \bar{\psi} H_4 \psi \qquad /24/$$

тензора энергии-импульса при $m = 0$ равняется нулю [6].

Поскольку мир Фридмана конформен миру с постоянной кривизной, то он имеет пятнадцать линейно независимых конформных полей Киллинга. Оособенно важным среди них является векторное поле

$-c\dfrac{\partial}{\partial\theta}$. Оно является конформным полем и в более общем случае конформно статического мира.

В статическом мире $-c\dfrac{\partial}{\partial\theta}$ является изометрическим полем Киллинга. Ему соответствует оператор энергии или гамильтониан $\hat{K}^{\circ}$. В базисе

$$f^{\circ} = d\theta, \quad f^{k} = \sum_{j=1}^{3} {}^{k}f_{j}^{k}(\xi^{1}, \xi^{2}, \xi^{3})\, d\xi^{j} \qquad /25/$$

согласно /19/ оператор энергии равняется

$$\hat{K}^{\circ} = ihc\,\frac{\partial}{\partial\,\theta}\,. \qquad /26/$$

Согласно /21/ вторично квантованный оператор энергии равняется

$$\hat{K}^{\circ} = -c\int T_{00}\, dv = \int\bar{\psi}\, ihc\, H^{\circ}\,\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\, dv\,. \qquad /27/$$

Элемент объема dv гиперповерхности $\theta=const$ определяется метрической формой /5/ и равен:

$$dv = \sqrt{|g_{ik}|}\; d\xi^{1} d\xi^{2} d\xi^{3}. \qquad /28/$$

Взяв производную по θ из уравнения /1/, находим

$$\hat{K}^{\circ} = \int\bar{\psi}(-ihcH^{k}D_{k} - mc^{2}H^{4})\psi\, dv\,. \qquad /29/$$

Этот оператор в статическом мире сохраняется и вполне определяет вакуумное состояние фермионного поля.

В конформно статическом мире /4/ вторично квантованный оператор конформного момента, соответствующий полю $-c\dfrac{\partial}{\partial\theta}$, после подстановки /10/ преобразуется к виду /27/. Штрихованное же уравнение Дирака перейдет не в уравнение /1/, а в уравнение

$$H^{\nu}\psi_{\nu} = \frac{imc}{h}\, BH^{4}\,\psi\,. \qquad /30/$$

Производную по θ в /27/ мы должны брать теперь не из /1/, а из /30/. В результате этого получим гамильтониан в виде

$$\hat{K}'^{o} = \int \bar{\psi}(-i\hbar c H^{k} D_{k} - mc^{2} B H^{4})\psi dv . \qquad /31/$$

Поскольку $\dot{B}$ зависит от θ, то при $m \neq 0$ и $\hat{K}'^{o}$ зависит от θ. Напротив, при $m = 0$ $\hat{K}'^{o}$ от θ не зависит и совпадает с /29/.

Таким образом, мы доказали, что в конформно статическом мире имеется не зависящий от B оператор энергии

$$\hat{\mathcal{E}} = \hat{K}'^{o} = \hat{K}^{o} = \int \bar{\psi}(-i\hbar c H^{k} D_{k})\psi dv \qquad /32/$$

нейтринного поля. Этот оператор сохраняется и определяет вакуумное состояние нейтринного поля. Понятно, что и вакуумное состояние нейтринного поля не зависит от B.

Конформная инвариантность поведения нейтрино имеет очевидную причину: $m = 0$. Не вызывало сомнений, что частицы без массы должны реагировать только на световой конус, и, стало быть, их поведение должно описываться конформно инвариантными характеристиками. В частности, как утверждалось в /6/, уравнения движения при $m = 0$ должны быть конформно инвариантными, а след тензора энергии-импульса должен равняться нулю. Этому не противоречила теория изотропных геодезических, определяющих поведение безмассовых частиц в релятивистской классической механике. Этому не противоречила кинетическая теория релятивистского газа /6/. Этому не противоречили также теория нейтринного поля /здесь мы имели случай в этом убедиться/ и теория электромагнитного поля. Из известных примеров противоречивой оказалась теория скалярного поля. При $m = 0$ оно описывалось уравнением Даламбера, которое и в самом деле инвариантно относительно конформных преобразований плоского мира. Между тем след тензора энергии-импульса безмассового скалярного поля не равнялся нулю. Р.Пенроуз /7/ обратил внимание на то, что уравнение

$$\Box\phi + \frac{R}{6}\phi = 0$$

для скалярного поля инвариантно в более широком смысле, чем уравнение Даламбера. Это уравнение инвариантно относительно конформных отображений одного мира на другой. Как было доказано в /8/, уравнение Пенроуза удовлетворяет всем требованиям, которые можно предъявить к безмассовым скалярным частицам, и должно заменить в ОТО уравнение Даламбера. Там же был найден правильный тензор энергии-импульса скалярного поля и было доказано, что оператор

$$h^2(\Box + \frac{R}{6})$$

является оператором квадрата 4-импульса, так что уравнение для скалярного поля с массой должно иметь вид

$$\Box\phi + \frac{R}{6}\ \phi = (\frac{mc}{h})^2\phi\ .$$

И хотя в плоском мире это уравнение совпадает с общепринятым уравнением $\Box\,\phi = (\frac{mc}{h})^2\,\phi$, полученный в /8/ тензор энергии-импульса имеет след

$$T = -(\frac{mc}{h})^2\,\phi^2\ ,$$

обращающийся в нуль при $m = 0$.

Мы не будем здесь подробно доказывать конформную инвариантность поведения безмассовой скалярной частицы, поскольку доказательство во всем аналогично проведенному выше для нейтрино. Укажем только основные моменты.

В n-мерном мире поведение скалярных частиц, характеризуется уравнением

$$\Box\phi + \frac{n-2}{4(n-1)}R\phi = (\frac{mc}{h})^2\phi\ , \qquad /33/$$

скалярным произведением

$$(v,u) = \int_\Sigma (uv_\mu - vu_\mu)\,d\sigma^\mu\ , \qquad /34/$$

определяющим алгебру полевых операторов, и тензором энергии-импульса

$$T_{\mu\nu} = T^{can}_{\mu\nu} - \frac{n-2}{4(n-1)}(R_{\mu\nu} + D_\mu D_\nu - \eta_{\mu\nu}\Box)\,\phi^2\ , \qquad /35/$$

где

$$T^{can}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\phi_\mu\phi_\nu + \phi_\nu\phi_\mu) - L\eta_{\mu\nu}\ ,$$

$$L = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\phi_\alpha\phi_\beta - \frac{n-2}{8(n-1)}R\phi^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{mc}{h}\right)^2\phi^2 . \qquad /36/$$

Интеграл /34/ подсказывает подстановку

$$\phi = B^{-\frac{n-2}{2}}\phi' .$$

В силу этой подстановки

$$\Box\phi + \frac{n-2}{4(n-1)}R\phi = B^{-\frac{n+2}{2}}\left(\Box'\phi' + \frac{n-2}{4(n-1)}R'\phi'\right),$$

а если в $T_{\mu\nu}$ согласно /33/ положить

$$L = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\beta}\phi_\alpha\phi_\beta + \frac{1}{2}\phi\Box\phi = \frac{1}{4}\Box\phi^2,$$

то для $T_{\mu\nu}$ получится равенство /13/, а следовательно, и равенство /14/. Аналогично можно доказать и конформную инвариантность поведения фотонов.

В конформно статическом мире интеграл /7/, где $K^\mu e_\mu = -c\frac{\partial}{\partial\theta}$, задает не зависящий от B оператор энергии не только для нейтринного, но и для скалярного безмассового, а также и для электромагнитного полей. Во всех случаях определяемое им вакуумное состояние не зависит от B.

Теория скалярного поля выдвигает веские аргументы в пользу общей теории относительности, согласно которой для описания физических явлений следует прибегать к неевклидовой геометрии. Оставаясь в условиях плоского мира, трудно было бы привести убедительные аргументы в пользу нового тензора энергии-импульса. Теория скалярного поля поучительна и в том отношении, что предостерегает от распространенного предрассудка, будто при переходе от СТО к ОТО в уравнениях математической физики во всех случаях достаточно заменить частные производные по декартовым координатам ковариантными производными.

Литература

1. Тезисы докладов III советской гравитационной конференции. Ереван, 1972.
2. Н.С.Шавохина. ТМФ, 10, №3, 1972.
3. Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. Препринт ОИЯИ, Р2-6109, Дубна, 1971.
4. Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. Препринт ОИЯИ, Р2-6173, Дубна, 1971.
5. Н.А.Черников, Н.С.Шавохина. Препринт ОИЯИ, Р2-6351, Дубна, 1972.
6. N.A.Chernikov. Acta Phys. Polonica, 26, No. 6 (12), 1069, 1964.
   Препринт ОИЯИ, Р-1159, Дубна, 1962.
7. Р.Пенроуз. В сб. "Гравитация и топология", Мир, Москва, 1966.
8. N.A.Chernikov, E.A.Tagirov. Ann. Inst. Henri Poincare, vol. IX, No. 2, Section A, 109-141, 1968;
   Препринт ОИЯИ, Р2-3777, Дубна, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 ноября 1972 года.