ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6789

В.Л.Любошиц

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ И УСЛОВИЯ МАКРОПРИЧИННОСТИ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ "ВПЕРЕД"

1972

P2 - 6789

В.Л.Любошиц

ГРУППОВАЯ СКОРОСТЬ И УСЛОВИЯ МАКРОПРИЧИННОСТИ ДЛЯ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ "ВПЕРЕД"

Направлено в ЖЭТФ

1. Постановка вопроса

Как известно, в релятивистской причинной теории должны быть полиостью исключены любые ситуации, допускающие возможность распространения сигналов со сверхсветовой скоростью. В настоящее время считается твердо установленным, что из принципа причинности непосредственно следуют аналитические свойства амплитуды рассеяния, на основе которых могут быть написаны дисперсионные соотношения. Это, однако, еще не означает, что само по себе выполнение дисперсионных соотношений /в которые скорость света вообще не входит/ во всех случаях гарантирует отсутствие сверхсветовых сигналов.

В данной работе на основе принципа релятивистской причинности рассмотрены некоторые дополнительные ограничения на амплитуду рассеяния "вперед", которые, насколько нам известно, до сих пор не обсуждались. Мы исходим из понятия групповой скорости пакета в диспергирующей среде /1,2/ и используем при этом известное соотношение между показателем преломления, описывающим когерентное взаимодействие проходящей волны A с макроскопической средой, состоящей из "атомов" B, и амплитудой упругого рассеяния $A+B\to A+B$ на нулевой угол в лабораторной системе отсчета /3/. Можно ожидать, что при таком подходе возникает новая информация о поведении амплитуды рассеяния "вперед", поскольку принимается во внимание интерференция падающей волны с большим числом рассеянных волн. Обычно же в квантовой дисперсионной теории исследуются свойства только рассеянной волны, отвечающей взаимодействию двух данных частиц /см., например /4/, гл. 4, §4.2/.

Локальные неравенства для реальной части амплитуды рассеяния "вперед", полученные в настоящей работе, непосредственно связаны с невозможностью передачи сигнала на макроскопические расстояния со скоростью большей, чем скорость света в вакууме.

В соответствии с этим их следует рассматривать как условия макропричинности. Наиболее четкие предсказания относятся к случаю, когда одна из частиц обладает нулевой массой покоя.

2. *Групповая скорость и движение центра пакета в диспергирующей среде*

Рассмотрим движение волнового пакета в диспергирующей среде. Обозначим волновой вектор, соответствующий плоской волне в среде, - $\vec{k}$, а частоту - ω. При этом импульс частицы в среде равен $\hbar \vec{k}$, а энергия $\hbar\omega$. Закон дисперсии определяет функция $\omega(k)$, где $k = |\vec{k}|$. Будем считать, что поглощение отсутствует /или им можно пренебречь/. В этом случае $Jm\,\omega(k) = Jm\,k = 0$.

Пусть волновая функция /вообще говоря, любое волновое поле/ имеет вид:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \int c(\vec{k})\, e^{i\vec{k}\vec{r}}\, e^{-i\omega(k)t}\, d^3\vec{k}. \qquad /1/$$

Из условия нормировки следует, что

$$(2\pi)^3 \int |c(\vec{k})|^2 d^3\vec{k} = 1. \qquad /2/$$

С учетом /1/ и /2/ формула для центра пакета /средней координаты частицы/ имеет вид:

$$\vec{R} = \int \Psi^*(\vec{r}, t)\, \vec{r}\, \Psi(\vec{r}, t)\, d^3\vec{r} =$$

$$= \int c^*(\vec{k})\, c(\vec{k}')\, e^{-i\vec{k}\vec{r}}\, e^{i\vec{k}'\vec{r}}\, \vec{r}\, e^{i\omega(k)t}\, e^{-i\omega(k')t}\, d^3\vec{k}\, d^3\vec{k}'\, d^3\vec{r}. \qquad /3/$$

Заметим, что $\vec{r}\, e^{i\vec{k}\vec{r}} = -i \dfrac{\partial}{\partial \vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$.

Выполняя интегрирование по частям и учитывая равенство:

$$\int e^{i(\vec{k}'-\vec{k})\vec{r}} d^3\vec{r} = (2\pi)^3 \delta^3(\vec{k}-\vec{k}') ;$$

мы приходим к соотношению

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}t , \qquad /4/$$

где

$$\vec{R}_0 = (2\pi)\ Jm \int c(\vec{k}) \frac{\partial}{\partial \vec{k}} c^*(\vec{k})\, d^3\vec{k} , \qquad /5а/$$

$$\vec{v} = (2\pi)^3 \int |c(\vec{k})|^2 \frac{\partial\omega(k)}{\partial\vec{k}} d^3 \vec{k} . \qquad /5б/$$

Равенство /5б/ можно переписать в виде

$$\vec{v} = \overline{\frac{\partial\omega(k)}{\partial\vec{k}}} , \qquad /6/$$

где черта означает усреднение по импульсному распределению пакета. Если мы имеем дело с квазимонохроматическим пакетом /разброс импульсов $\hbar\Delta k$ очень мал по сравнению со средним значением импульса $\hbar k_0$ /, то, согласно /6/,

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\partial\omega(k_0)}{\partial\vec{k}_0} = \frac{d\omega(k_0)}{dk_0}\vec{n} , \qquad /7/$$

где $\vec{n}$ - единичный вектор в направлении среднего импульса $\hbar \vec{k}_0$.

По определению величина $\frac{d\omega(k_0)}{dk_0}$ – есть ни что иное как групповая скорость волнового пакета * . Таким образом, групповая скорость совпадает со скорость движения центра квазимонохроматического пакета. Подчеркнем, что такая интерпретация групповой скорости не связана с часто встречающимся требованием сохранения формы пакета /см., например, /2/ , стр. 420-437/. Формулы /5/ ос-

---

* Для волнового пакета в вакууме /закон дисперсии $\omega(k) = c\sqrt{k^2+(\frac{mc}{\hbar})^2}$ / групповая скорость равна классической скорости релятивистской частицы $v = \frac{kc}{\omega(k)}$.

таются справедливыми и с учетом расплывания пакета * . Это означает, что во всяком случае при отсутствии поглощения промежуток времени, в течение которого понятие групповой скорости имеет физический смысл, может быть в принципе сколь угодно большим /обычно на указанный промежуток времени накладывает ограничение

$$t \ll 1 / \left| \frac{d^2\omega(k)}{dk^2} \right| \Delta k^2 /2/ \quad /.$$

Если пакет A движется в среде, состоящей из покоящихся частиц B, волновое число k, соответствующее частоте ω, определяется по формуле

$$k = \kappa n(\kappa), \qquad /8/$$

где $\hbar\kappa = \frac{\hbar}{c}\sqrt{\omega^2 - (\frac{mc^2}{\hbar})^2}$ - импульс частицы A в вакууме, m - масса частицы A, c - скорость света в вакууме, $n(\kappa)$ - показатель преломления. При достаточно малых плотностях N частиц B показатель преломления связан с амплитудой упругого /когерентного/ рассеяния "вперед" частицы A на частице B в лабораторной системе координат известным соотношением /3/:

$$n(\kappa) = 1 + 2\pi \frac{N a(\kappa)}{\kappa^2}. \qquad /9/$$

Формула /9/ справедлива при любых энергиях, если только показатель преломления мало отличается от единицы /см. раздел 6/ **. Плотность N в дальнейшем мы будем рассматривать как вспомогательный параметр. Можно всегда выбрать N настолько малым, чтобы использование формулы /9/ было законным. При этом

$$Re k = \kappa + \frac{2\pi N Re\, a(\kappa)}{\kappa}, \qquad /10/$$

$$Jm k = \frac{2\pi N Jm\, a(\kappa)}{\kappa} = \frac{1}{2} N\sigma(\kappa), \qquad /11/$$

---

* Близкая к нашей трактовка групповой скорости обсуждалась ранее в рамках классической электродинамики в работе Л.А. Вайнштейна /5/ . Автор признателен Д.А. Киржницу, обратившему его внимание на эту работу.

** Соотношение /9/ теряет смысл, если амплитуда рассеяния имеет полюс при $\theta=0$. Такие случаи мы исключаем из рассмотрения.

где $\sigma(\kappa)$ - полное сечение взаимодействия частиц A и B. Если сечение $\sigma(\kappa)$ очень мало, то поглощение частиц A в среде не играет роли /более детально условия справедливости такого подхода мы обсудим в разделе 3/. В этом случае можно непосредственно воспользоваться понятием групповой скорости. Согласно равенству /7/, в достаточно разреженной макроскопической среде групповая скорость /скорость движения центра квазимонохроматического пакета/ равна

$$v = \frac{d\omega}{d(Re\,k)} = \frac{d\omega(\kappa)}{d\kappa} \Big/ \frac{d(Re\,k)}{d\kappa} =$$

$$= v_0 \left[1 + 2\pi N \frac{d}{d\kappa}\left(\frac{Re\,a(\kappa)}{\kappa}\right)\right]^{-1} \approx v_0 \left[1 - 2\pi N \frac{d}{d\kappa}\left(\frac{Re\,a(\kappa)}{\kappa}\right)\right], \qquad /12/$$

где $v_0 = \dfrac{\kappa c^2}{\omega(\kappa)}$ - классическая скорость частицы A в вакууме. Для частицы с нулевой массой покоя

$$v = c\left[1 + 2\pi N \frac{d}{d\kappa}\left(\frac{Re\,a(\kappa)}{\kappa}\right)\right]^{-1}. \qquad /13/$$

При отсутствии поглощения групповая скорость совпадает со скоростью распространения сигнала и, согласно принципу релятивистской причинности, не должна превышать скорости света в вакууме /1;2/. Таким образом, в этом случае должно быть справедливо неравенство

$$v \le c. \qquad /14/$$

Подставляя /13/ в /14/, получаем следующее ограничение на амплитуду рассеяния вперед для частиц с нулевой массой покоя:

$$\frac{d}{d\kappa}\left(\frac{Re\,a(\kappa)}{\kappa}\right)^{\sigma(\kappa)=0} \ge 0. \qquad /15/$$

В ультрарелятивистском пределе такое же неравенство можно написать и в случае, когда масса частицы A не равна нулю.

Неравенство /15/, вообще говоря, носит ограниченный характер. Мы получили его в предположении, что полное сечение рассеяния $\sigma(\kappa') = \frac{4\pi}{\kappa'} Jm\,a(\kappa')$ в окрестности $\kappa-\Delta\kappa<\kappa'<\kappa+\Delta\kappa$ близко к нулю /это указывает верхний индекс в левой части неравенства/. Поэтому в некоторых случаях производная $\frac{d}{d\kappa}\left(\frac{Re\,a(\kappa)}{\kappa}\right)$ может принимать и отрицательные значения *. Можно, однако, ожидать, что эти отрицательные значения должны быть ограничены по абсолютной величине, причем соответствующий верхний предел пропорционален полному сечению рассеяния $\sigma(\kappa)$. Более детально мы рассмотрим этот вопрос в следующих разделах.

3. Условия макропричинности для частиц с нулевой массой покоя

Рассмотрим с точки зрения принципа релятивистской причинности движение частицы с нулевой массой покоя. Пусть начальная продольная длина вероятностного пакета, соответствующего этой частице /неопределенность координаты вдоль направления движения/, равна Δz. Согласно соотношению неопределенностей $\Delta z = \sqrt{\overline{z^2} - (\overline{z})^2} \geq 1/\Delta k$, где $\hbar\Delta k = \sqrt{\overline{p^2} - (\overline{p})^2}$ - неопределенность импульса частицы. Время распространения сигнала на расстояние L в данном случае представляет собой разность моментов регистрации и генерации частицы и в среднем равно L/v, где v - скорость центра пакета /групповая скорость/. Указанное время, однако, может быть принципиально определено лишь с точностью $\Delta t \sim a\frac{\Delta z}{v} + a_1\frac{L\Delta v}{v}$, где $\Delta v \sim \left|\frac{d^2\omega(k)}{dk^2}\right|\Delta k$ - неопределенность скорости частицы, a и a_1 - константы порядка единицы, учитывающие форму пакета /второй член в выражении для Δt соответствует расплыванию пакета при его движении в диспергирующей среде/. С учетом этого условие макропричинности для распространения сигнала имеет вид:

---

* В частности, в области резонансного пика всегда $\frac{d}{d\kappa}\left(\frac{Re\,a(\kappa)}{\kappa}\right)<0$.

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{v}\left(1 + a_1\frac{\Delta v}{v}\right) < a\frac{\Delta z}{vL}, \qquad a \sim 1, \quad a_1 \sim 1. \qquad /16/$$

Для прозрачных сред отношения $\frac{\Delta z}{L}$ и $\frac{\Delta v}{v}$ в принципе могут быть выбраны сколь угодно малыми, и из /16/ непосредственно следует результат /14/:

$$\frac{1}{c} - \frac{1}{v} \leq 0 . \; * \qquad /17/$$

До сих пор мы предполагали, что поглощение отсутствует. Однако весь ход рассуждений остается без изменений и при наличии поглощения, если рассматриваются расстояния L /соответственно-времена $\frac{L}{v}$ /, удовлетворяющие условию:

$$\Delta z \ll L \ll 1/N\sigma(\kappa) . \qquad /18/$$

Будем считать, что $\Delta z \geq 1/\Delta\kappa_0$ и $L \leq 1/N\sigma(\kappa)\,\beta\,(\Delta\kappa_0 \ll \kappa\,,\beta \gg 1)$. Выберем $\Delta\kappa_0$ таким образом, чтобы относительное изменение величин $\frac{d}{d\kappa}\left(\frac{Re\,a(\kappa)}{\kappa}\right)$ и $\sigma(\kappa)$ в интервале $(\kappa-\Delta\kappa_0, \kappa+\Delta\kappa_0)$ было мало /условие квазимонохроматичности пакета/. Подставляя в /16/ формулу /13/ для групповой скорости и пренебрегая величиной $\frac{\Delta v}{v} \sim N\left|\frac{d^2}{d\kappa^2}\left(\frac{Re\,a(\kappa)}{\kappa}\right)\right|\Delta\kappa_0$, получаем неравенство:

$$\frac{d}{d\kappa}\left(\frac{Re\,a(\kappa)}{\kappa}\right) > -\frac{a\beta}{2\pi}\,\frac{\sigma(\kappa)}{\Delta\kappa_0} = -\frac{\eta}{2\pi}\,\frac{\sigma(\kappa)}{\Delta\kappa_0}, \qquad /19/$$

которое переходит в соотношение /15/, если формально положить $\sigma(\kappa) = 0$. При указанном выборе вспомогательных параметров Δz и L значения $\eta = a\beta \gg 1$ и $\gamma = \kappa/\Delta\kappa_0 \gg 1$. Однако неравенство /19/

---

* Мы исходим из того, что в каждый момент времени t частица может быть обнаружена лишь в конечной области пространства с продольной длиной $a\Delta z + a_1\Delta vt$. При этом экспоненциально-малая вероятность регистрации "хвоста" пакета не принимается в расчет. Такой подход к исследованию условий причинности удовлетворяет принципу соответствия с классической теорией.

можно усилить, приняв $\eta \sim 1$ /см. ниже/. Остается еще некоторая неопределенность, связанная с разбросом импульсов $\hbar \Delta \kappa_0$. Величина $\Delta\kappa_0$, конечно, принимает разные значения для разных пакетов. Ясно, однако, что соотношение между реальной и мнимой частями амплитуды рассеяния может быть сформулировано независимо от типа и формы рассматриваемых пакетов. Действительно, как легко понять, роль максимального значения величины $\Delta\kappa_0$ в неравенстве /19/ должен играть характерный интервал волновых чисел в окрестности κ, в котором амплитуда рассеяния и ее производная не меняются по порядку величины, - при условии, что этот интервал меньше κ. Если же указанный интервал превышает κ, следует считать, что $\Delta\kappa_0 < \kappa_0' - \kappa$ *.

Согласно /19/, если

$$\kappa \left| \frac{d}{d\kappa}\left(\frac{Re\, a(\kappa)}{\kappa}\right) \right| / \sigma(\kappa) > \frac{\eta\gamma}{2\pi} = C, \qquad /19'/$$

то обязательно выполняется неравенство /15/, т.е.

$$\frac{d}{d\kappa}\left(\frac{Re\, a(\kappa)}{\kappa}\right) > 0 .$$

Это позволяет сделать определенное заключение о знаке реальной части амплитуды рассеяния при нулевой энергии. В самом деле, пусть при $\kappa \to 0$ сечение $\sigma(\kappa)$ остается конечным или ведет себя как κ^{-q}, где $0<q<1$. Согласно оптической теореме, в этом случае $Jm\, a(0) = 0$. Ясно, что если $Re\, a(0) \neq 0$, то

$$\lim_{\kappa \to 0} \kappa \left| \frac{d}{d\kappa}\left(\frac{Re\, a(\kappa)}{\kappa}\right) \right| / \sigma(\kappa) = \infty . \qquad /19''/$$

В то же время величина C представляет собой конечное число /при значениях κ близких к нулю минимум отношения $\gamma = \frac{\kappa}{\Delta\kappa_0}$, в соответствии со сказанным выше, есть константа порядка единицы/. Поэтому, согласно /19'/, при достаточно малых κ величина $\frac{d}{d\kappa}\left(\frac{Re\, a(\kappa)}{\kappa}\right)$ должна быть положительной. Отсюда следует, что

---

* В случае резонансного рассеяния $\Delta\kappa_0 \leq \Gamma$, где Γ - ширина резонанса.

$$Re\, a(0) \leq 0 .^{*} \qquad /20/$$

Мы видим, что из принципа причинности следует важный результат: реальная часть амплитуды рассеяния "вперед" частицы с нулевой массой покоя на любой другой частице при нулевой энергии не может быть положительной, если мнимая часть амплитуды рассеяния стремится к нулю при $\kappa \to 0$. Вывод об отрицательности реальной части амплитуды рассеяния "вперед" остается в силе и в случае, когда при $\kappa \to 0$ величина $|a(\kappa)| \to \infty$ при условии, что $\lim_{\kappa\to 0} Jm\, a(\kappa)/Re\, a(\kappa)=0$. Действительно, если при значениях κ близких к нулю, $Re\, a(\kappa)=\gamma/\kappa^{\beta}$, $\sigma(\kappa)=\delta/\kappa^{\alpha}$, причем $\alpha-\beta<1$, то выполняется соотношение /19''/, и обязательно $\gamma<0$.

Как известно, в пределе низких энергий /частот/ амплитуда томсоновского рассеяния фотона на любой покоящейся частице равна $\left(-\frac{e^2}{mc^2}\right)$, где e - заряд частицы, m - ее масса /6/. В связи со сказанным выше становится ясно, что отрицательный знак амплитуды томсоновского рассеяния - не случайное обстоятельство, а прямое следствие принципа причинности. С нашей точки зрения в любой непротиворечивой причинной теории частиц с нулевой массой покоя /независимо от ее конкретной структуры/ при условии $\lim_{\kappa\to 0}\frac{Jm\, a(\kappa)}{Re\, a(\kappa)}=0$ должно выполняться соотношение /20/ ** .

При выводе неравенства /19/ предполагалось, что во всяком случае при $t \ll 1/N\sigma(\kappa)c$ - скорость центра квазимонохроматического пакета определяется по формуле /13/. Специальный анализ движения пакета в поглощающей среде показывает, что при достаточно малой неопределенности импульса $\hbar\Delta\kappa$ скорость центра пакета в приближении, линейном по плотности N, совпадает с групповой скоростью /13/ и при значениях $t \gtrapprox 1/N\sigma(\kappa)c$. Таким образом, требование $L \ll 1/N\sigma(\kappa)$ можно отбросить. Тогда, казалось бы, независимо от величины сечения $\sigma(\kappa)$, должно быть справедливо неравенст-

---

* То, что непосредственно при $\kappa=0$ формула /13/ становится некорректной, в данном случае не имеет значения в связи с непрерывностью амплитуды $a(\kappa)$ и произволом в выборе параметра N.

** Согласно теории универсального слабого взаимодействия, амплитуды рассеяния нейтрино и антинейтрино любыми частицами пропорциональны при малых энергиях κ; таким образом, в этом случае $a(0)=0$, что также согласуется с /20/.

во /15/. Такое заключение, однако, было бы поспешным. В самом деле, как уже отмечалось выше, поведение амплитуды резонансного рассеяния явно не согласуется с соотношением /15/ и в то же время удовлетворяет более слабому ограничению /19/. Это свидетельствует о том, что при L, существенно превышающих длину свободного пробега $L_0 = 1/N\sigma(\kappa)$, исходным неравенством /16/, вообще говоря, пользоваться уже нельзя. И действительно, при очень больших значениях параметра $\delta = N\sigma L$ вероятность прохождения частицы через слой вещества становится экспоненциально малой, и уже не имеет смысла связывать с распространением пакета передачу какого-либо физического сигнала *. Поэтому мы будем считать, что в формуле /16/ $L \leq 1/N\sigma(\kappa)\beta$, где $\beta \sim 1$. В итоге мы снова возвращаемся к неравенству /19/ с константой $\eta \sim 1$. Изложенный подход, однако, не позволяет указать конкретно нижний предел возможных значений отношения $\frac{d}{d\kappa}\left(\frac{Re\,a(\kappa)}{\kappa}\right)/\frac{\sigma(\kappa)}{\kappa}$.

4. *Дисперсионные соотношения, знак константы вычитания и число вычитаний*

Покажем, что ограничения /15/ и /19/ согласуются с дисперсионными соотношениями для амплитуды рассеяния фотона на произвольной покоящейся частице, которые имеют вид:

$$Re\,a_\lambda(\kappa) = Re\,a_\lambda(0) + \kappa\,Re\,a'_\lambda(0) + \frac{\kappa^2}{4\pi^2} P\int_0^\infty \frac{\sigma_\lambda(\gamma)}{\gamma(\gamma-\kappa)}d\gamma + \frac{\kappa^2}{4\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sigma_{-\lambda}(\gamma)}{\gamma(\gamma+\kappa)}d\gamma.$$

Здесь $\sigma_\lambda(\gamma)$ - полное сечение рассеяния фотона со спиральностью λ на мишени с заданной поляризацией при энергии $\hbar c\gamma (\lambda = \pm 1)$, $Re\,a_{+1}(0) = Re\,a_{-1}(0) = -\frac{e^2}{mc^2}$ - константа вычитания, равная том-

* Основываясь на аналогичных соображениях, мы при обсуждении условия макропричинности пренебрегали экспоненциально малой вероятностью регистрации "хвоста" пакета /см. примечание на стр. 9/.

соновской амплитуде, $Re\, a'_{+1}(0) = -Re\, a'_{-1}(0)$ - вторая константа вычитания, пропорциональная квадрату аномального магнитного момента рассеивателя /6/.

Если формально положить $\sigma_\lambda(\kappa)=0$, подинтегральное выражение в третьем члене формулы /21/ не будет иметь особенности при $y=\kappa$. В этом случае интеграл в смысле главного значения можно дифференцировать по параметру κ как обычный интеграл /7/, и в рассматриваемом приближении

$$\frac{d}{d\kappa}\left(\frac{Re\, a_\lambda(\kappa)}{\kappa}\right)^{(\sigma(\kappa)=0)} = \frac{e^2}{mc^2\kappa^2} + \frac{1}{4\pi^2} P\int_0^\infty \frac{\sigma_\lambda(y)}{(y-\kappa)^2}\,dy + \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sigma_{-\lambda}(y)}{(y+\kappa)^2}\,dy.$$

Так как $\sigma(y)>0$, правая часть соотношения /22/ есть существенно положительная величина. Таким образом, если полным сечением рассеяния при данной энергии можно пренебречь, дисперсионные соотношения для фотона непосредственно приводят к неравенству /15/.

Точная формула для производной $\frac{d}{d\kappa}\left(\frac{Re\, a(\kappa)}{\kappa}\right)$ с учетом тождества $P\int_{\kappa-\Delta\kappa_0}^{\kappa+\Delta\kappa_0} \frac{dy}{y-\kappa}=0$ имеет вид:

$$\frac{d}{d\kappa}\left(\frac{Re\, a_\lambda(\kappa)}{\kappa}\right) = \frac{e^2}{mc^2\kappa^2} + \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{\kappa-\Delta\kappa_0} \frac{\sigma_\lambda(y)}{(y-\kappa)^2}\,dy + \frac{1}{4\pi^2}\int_{\kappa+\Delta\kappa_0}^\infty \frac{\sigma_\lambda(y)}{(y-\kappa)^2}\,dy +$$

$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \frac{\sigma_{-\lambda}(y)}{(y+\kappa)^2}\,dy + \frac{1}{4\pi^2}\int_{\kappa-\Delta\kappa_0}^{\kappa+\Delta\kappa_0} \frac{\sigma_\lambda(y)-\sigma_\lambda(\kappa)-\frac{d\sigma_\lambda(\kappa)}{d\kappa}(y-\kappa)}{(y-\kappa)^2}\,dy - \frac{\sigma_\lambda(\kappa)}{2\pi^2\Delta\kappa_0}, \qquad /23/$$

где $\Delta\kappa_0$ - любой интервал, удовлетворяющий условию $0\le\Delta\kappa_0\le\kappa$

Четвертый интеграл в формуле /23/ можно представить в виде

$$2\,\frac{d^2\sigma_\lambda(\xi)}{d\kappa^2}\,\Delta\kappa_0\,,$$

где $\kappa-\Delta\kappa_0<\xi<\kappa+\Delta\kappa_0$. При достаточно малых $\Delta\kappa_0$ величина $\left|\frac{d^2\sigma_\lambda(\xi)}{d\kappa^2}\right|\Delta\kappa_0^2 \ll \sigma_\lambda(\kappa)$, и из /23/ следует неравенство:

$$\frac{d}{d\kappa}\left(\frac{Re\,a_\lambda(\kappa)}{\kappa}\right) > -\frac{1}{2\pi^2}\frac{\sigma_\lambda(\kappa)}{\Delta\kappa_0}\left[1+0\left(\left|\frac{d^2\sigma_\lambda(\xi)}{d\kappa^2}\right|\Delta\kappa_0^2/\sigma_\lambda(\kappa)\right)\right] \quad /24/$$

которое согласуется с /19/ /при этом $\eta = 1/\pi$ /. Отметнм также интегральное неравенство

$$\frac{d}{d\kappa}\left(\frac{Re\,a_\lambda(\kappa)}{\kappa}\right) > \frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\kappa}\frac{\sigma_\lambda(y)-\sigma_\lambda(\kappa)-\frac{d\sigma_\lambda(\kappa)}{d\kappa}(y-\kappa)}{(y-\kappa)^2}dy - \frac{\sigma_\lambda(\kappa)}{2\pi^2\kappa}; \quad /25/$$

которое становится очевндным, если подставить в /23/ $\Delta\kappa_0 = \kappa$.

Для произвольных частиц с нулевой массой покоя н спином s дисперсионные соотношения с двумя вычитаниями при учете перекрестной симметрии /см. /4/ , §7.1/ сохраняют вид /21/ с заменой $\sigma_{-\lambda}(y) \to \tilde{\sigma}_{-\lambda}(y)$, где $\tilde{\sigma}_{-\lambda}(y)$ - полное сечение рассеяния антнчастнцы $(\lambda = \pm s)$. В соответствин с результатом /20/ прн конечном сечении $\sigma_\lambda(0)$ /вообще говоря, при $\lim \kappa\sigma(\kappa) = 0$) /константа вычитания должна быть отрицательной или равной нулю. В итоге мы получаем выражения /22/ и /23/ - с очевидной заменой $\frac{e^2}{mc^2\kappa^2} \to \frac{|Re\,a(0)|}{\kappa^2}$,

$\sigma_{-\lambda}(y) \to \tilde{\sigma}_{-\lambda}(y)$, - и соответственно неравенства /15/ и /29/. Ясно, что если исходить из дисперсионных соотношений с одним вычитанием:

$$Re\,a_\lambda(\kappa) = Re\,a(0) + \frac{\kappa}{4\pi^2}P\int\frac{\sigma_\lambda(y)}{y-\kappa}dy - \frac{\kappa}{4\pi^2}\int_0^\infty\frac{\tilde{\sigma}_{-\lambda}(y)}{y+\kappa}dy, \quad /26/$$

все указанные формулы остаются без изменений.

Необходимо подчеркнуть, что дисперсионные соотношения /21/ и /26/ с положительной константой вычитания $Re\,a(0)$ при достаточно малых κ не удовлетворяют условию макропричинности /19/. Таким образом, одна только аналитичность амплитуды рассеяния в общем случае еще не означает, что теория автоматически причинна.

Интересно, что если $Im\,a(0) = 0$, условие макропричинности $Re\,a(0) \le 0$ накладывает запрет на дисперсионные соотношения без вычитаний. Действительно, из соответствующих дисперсионных соотношений, которые справедливы при условии $\lim_{\kappa\to\infty}|a(\kappa)| = 0$:

$$Re\,a_\lambda(\kappa) = \frac{1}{4\pi^2}P\int_0^\infty\frac{\sigma_\lambda(y)y}{y-\kappa}dy + \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty\frac{\tilde{\sigma}_{-\lambda}(y)y}{y+\kappa}dy, \quad -$$

следует противоположное неравенство:

$$Re\, a(0) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^\infty [\, \sigma_\lambda(y) + \sigma_{-\lambda}(y)\,]\, dy > 0 .$$

Это означает, что в причинной теории амплитуда рассеяния "вперед" частицы с нулевой массой покоя должна удовлетворять асимптотическому соотношению:

$$\lim_{\kappa \to \infty} |a_\lambda(\kappa)| \neq 0 . \qquad /27/$$

Заметим, что если необходимое число вычитаний $q \geq 3$*, уже нельзя вывести неравенство /19/ из дисперсионных соотношений, опираясь только на положительность полного сечения рассеяния /даже при определенном выборе знака констант вычитания/. По всей видимости, это служит указанием на то, что известное ограничение на степень роста амплитуды рассеяния

$$\lim_{\kappa \to \infty} \frac{|a_\lambda(\kappa)|}{\kappa^2} = 0 \qquad /28/$$

также представляет собой следствие принципа релятивистской причинности /т.е. условия "макропричинности" и аналитичности/. Данное утверждение, однако, нуждается в строгом доказательстве.

5. *Случай ненулевой массы покоя*

Изложенный выше метод можно в принципе применить и к случаю рассеяния частицы, масса которой не равна нулю. При $\kappa \leq \frac{mc}{\hbar}$ условие макропричинности /16/ не накладывает никаких существенных ограничений на поведение амплитуды рассеяния /что естественно, так как в этой случае $\frac{c - v_0}{c} = \frac{\omega(\kappa) - \kappa c}{\omega(\kappa)} \sim 1$/. В частности, знак

---

* Число q определяется из условия $\lim_{\kappa \to \infty} \frac{|a(\kappa)|}{\kappa^q} = 0$, $\lim \frac{|a(\kappa)|}{\kappa^{q-1}} \neq 0$.

$Re\,a(0)$ может быть произвольным. Легко видеть, что в ультрарелятивистском пределе ограничения на амплитуду рассеяния "вперед" сводятся к неравенствам /15/ и /19/. Если при этом амплитуда не осциллирует, мы можем считать, что $\Delta\kappa_0/\kappa \sim 1$. Отсюда следует асимптотическое неравенство

$$\kappa \frac{d}{d\kappa}\left(\frac{Re\,a(\kappa)}{\kappa}\right)/\sigma(\kappa) > -C\,, \qquad /29/$$

где C - не зависящая от энергии константа порядка 1.

В связи с соотношением /29/ интересно обсудить ситуацию, возникающую при нарушении теоремы Померанчука. Известно, что если асимптотическое равенство сечений частицы b и античастицы $\bar{b}$ не имеет места, т.е. $\sigma(\infty)=\sigma_b \neq \tilde{\sigma}(\infty)=\sigma_{\bar{b}}$, то из аналитических свойств амплитуды и требования перекрестной симметрии /см. /4/, гл. 8/ непосредственно следует, что при $\kappa \to \infty$

$$Re\,a_b(\kappa) = -Re\,a_{\bar{b}}(\kappa) = -\frac{1}{2\pi^2}\kappa\sigma' \ln\kappa\,, \qquad /30/$$

где $\sigma' = \frac{1}{2}(\sigma(\infty) - \tilde{\sigma}(\infty))$. Заметим, что в данном случае отношение $Jm\,a(\kappa)/Re\,a(\kappa)$ как для частицы, так и для античастицы стремится к нулю. Поэтому, на первый взгляд, можно пренебречь поглощением и воспользоваться условием макропричинности в форме /15/. Легко видеть, что одна из амплитуд /30/ этому условию не удовлетворяет, и групповая скорость для частицы b при $\sigma' > 0$ или античастицы $\bar{b}$ при $\sigma' < 0$ в пределе очень больших энергий превышает скорость света в вакууме $(v \to c[1 + \frac{N}{\pi}\frac{|\sigma'|}{\kappa})]$. Отсюда напрашивается вывод, что нарушение теоремы Померанчука противоречит принципу причинности. Однако в рамках настоящей работы мы не можем этого решительно утверждать, поскольку при $\kappa \to \infty$

$$\kappa \frac{d}{d\kappa}\left(\frac{Re\,a(\kappa)}{\kappa}\right)/\sigma(\kappa) \to \pm \frac{1}{2\pi^2}\frac{|\sigma'|}{\sigma(\infty)} > -\frac{1}{4\pi^2}\,,$$

т.е. нарушение теоремы Померанчука не противоречит асимптотическому неравенству /29/. Возможно, это неравенство является слишком слабым, так что вопрос о связи теоремы Померанчука с принципом причинности остается открытым.

6. Заключительные замечания

Рассмотренные выше ограничения на поведение амплитуды рассеяния "вперед" оказываются в целом существенно более слабыми, чем условия аналитичности и перекрестной симметрии. Но в то же время они являются и более общими. С нашей точки зрения, любая непротиворечивая теория должна быть совместима с требованиями типа /19/ или /29/. Эти неравенства должны выполняться и в случаях, когда дисперсионные соотношения несправедливы, - например, в нелокальных теориях.

Несколько слов о формуле /9/ для показателя преломления, которая фактически лежит в основе результатов настоящей работы. Следует подчеркнуть, что при любых значениях энергии механизм образования когерентной волны в макроскопической среде являются единым и заключается в интерференции падающей волны со вторичными волнами, рассеянными всеми атомами среды в направлении "вперед" без передачи импульса. Это указывает на универсальность формулы /9/ в приближении, линейном по амплитуде рассеяния "вперед", - что подтверждается прямыми расчетами в рамках теории многократного рассеяния /см. /3/,/8/, стр. 688, /9/ * /. Поэтому есть все основания считать, что применение соотношения /9/ и связанных с ним формул /12/ и /13/ к проблеме причинности является полностью оправданным.

Автор выражает глубокую благодарность Б.Н. Валуеву, В.И.Огиевецкому и в особенности М.И.Подгорецкому за обсуждение и ценные советы.

Литература

1. L.Brillouin. Wave Propagation and Group Velocity, N.Y.L., 1960.
2. *Л.И. Мандельштам. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. Изд. "Наука", 1972.*
3. M.Lax. Rev.Mod.Phys., 23, 287, 1951.
4. *Р.Иден. Соударения элементарных частиц при высоких энергиях. Изд. "Наука", 1970.*
5. *Л.А.Вайнштейн. Журнал технической физики, 27, 2606, 1957.*

---

* Выражение /9/ играет основополагающую роль в проверенной экспериментально теории когерентной регенерации нейтральных K -мезонов при высоких энергиях /10/.

6. *M.Gellman, M.L.Goldberger, W.Thiring. Phys.Rev., 95, 1612, 1954.*

7. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, §64, ГИФМЛ, 1959.*

8. *М.Гольдбергер, К.Ватсон. Теория столкновений. Изд. "Мир",1967.*

9. *R.Glauber. Lectures in Theretical Physics, p. 390, N.Y., 1960.*

10. *M.Good. Phys.Rev., 106, 591, 1957.*

Рукопись поступила в издательский отдел
2 ноября 1972 года.