ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6756

Г.В. Ефимов

О ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

P2 - 6756

Г.В. Ефимов

О ЛОКАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ НЕЛОКАЛЬНЫХ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Направлено в ТМФ

I. Введение

За последние несколько лет достигнут весьма большой прогресс в изучении локальных и нелокальных свойств теории поля (см. обзорный доклад К. Хеппа на ХУ международной конференции по физике высоких энергий/I/). Много усилий было затрачено на выяснение связи между различными формулировками принципов микропричинности и локальности, на установление допустимых пространств основных и обобщённых функций, в рамках которых может быть построена квантовая теория поля. Однако нельзя ещё считать, что на все эти вопросы уже имеются окончательные ответы.

Наиболее существенный сдвиг в понимании физической роли математического аппарата в квантовой теории поля был сделан в работах Меймана/2/ и Джаффе/3/. Они впервые обратили внимание на значение выбора пространства основных функций и связь этого выбора с физическими требованиями микропричинности и локальности в теории, т.е. они заложили основы математического аппарата, адэкватного самим понятиям локальности и микропричинности.

С математической точки зрения понятие локальности связано с возможностью дать определение носителя линейного функционала, заданного на некотором пространстве основных функций. В свою очередь, понятие носителя функционала прямо связано с наличием в пространстве основных функций подпространств таких функций, которые могли бы служить инструментом, позволяющим исследовать пространственно-временные свойства функционалов, встречающихся в квантовой теории поля. Обычно в качестве таких функций выбираются функции из пространства $\mathcal{D}$, пространства бесконечно дифференцируемых функций с ограниченным носителем. С их помощью изучаются пространственно-временные свойства, например, коммутатора гайзенберговых полей $\varphi(x)$:

$$[\varphi(x), \varphi(y)] = ? \qquad (I.I)$$

(см., например,[4,5]) или причинные свойства S-матрицы в форме Боголюбова (см.[6]):

$$\frac{\delta}{\delta\varphi(x)}\left(\frac{\delta S}{\delta\varphi(y)} S^{+}\right) = ? \qquad (I.2)$$

Требование строгой локальности по Джаффе[3] прямо сформулировано таким образом, чтобы пространство основных функций $\mathcal{C}(R^{4n})$ всегда содержало функции с ограниченным носителем. Более строго, требуется, чтобы для любого открытого множества $\mathcal{O} \subset R^{4n}$ подпространство

$$\mathcal{L}(\mathcal{O}) = \mathcal{C}(R^{4n}) \cap \mathcal{D}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{C}(R^{4n}),$$

где $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций, носитель которых принадлежит $\mathcal{O}$, должно быть плотным в $\mathcal{D}(\mathcal{O})$.

Развитие нелокальной квантовой теории поля[7] и теории поля с неполиномиальными лагранжианами взаимодействия[8] потребовало привлечения пространств аналитических функций, среди которых отсутствуют функции с ограниченным носителем. Однако изучение причинных и локальных свойств теории требует создания методов исследования пространственно-временных характеристик операторозначных обобщённых функций типа (I.I) или (I.2) в случае, когда они представляют собой аналитические функционалы, т.е. определены лишь на пространствах аналитических функций.

Заметим, что М. Иофа и В. Файнберг[9] при формулировке аксиоматического подхода в нелокальной квантовой теории поля вообще отказались от какого бы то ни было пространственно-временного описания нелокальных свойств операторов квантованных полей.

Первая попытка привлечь понятие носителя аналитического функционала в аксиоматическую квантовую теорию поля была сделана С. Хоружим[10].

Трудности, которые возникают при исследовании локальных свойств аналитических функционалов в квантовой теории поля, двоякого рода. Во-первых, математическая проблема состоит в том, что, вообще говоря, носитель аналитического функционала не может быть определен однозначно. Однако существуют случаи, когда носитель может быть задан однозначно. Именно такой случай имеет место в нелокальной квантовой теории поля[7], и именно его мы будем рассматривать.

Во-вторых, физическая проблема состоит в том, что носитель обобщённой функции, хотя и задан однозначно, лежит в комплексном пространстве C^4, в то время как нас интересуют пространственно-временные свойства в вещественном пространстве R^4.

Физическую картину, лежащую в основе нашего определения, не претендуя на какую-либо строгость, можно обрисовать следующим образом. Подразумевается, что некоторая физическая система, находящаяся в реальном пространстве R^4, описывается, вообще говоря, комплекснозначными функциями, заданными на вещественном пространстве R^4. С другой стороны, эти функции принадлежат некоторому пространству аналитических функций $\mathcal{Z}$. Значения различных физических характеристик системы задаются функционалами, определёнными на этих функциях, и имеют вид

$$(B,f) = \int d\sigma_B(z) f(z), \qquad (I.3)$$

где $\sigma_B(z)$ – некоторая вполне аддитивная мера в комплексном пространстве C^4, сосредоточенная на некоторой области $\tilde{\Omega} \subset C^4$.

При данной интерпретации функционал B имеет смысл некоторой физической величины, которая характеризует нашу систему и определяет её распределение в реальном пространстве R^4. Задача состоит в том, чтобы определить понятие сосредоточенности функционала B в вещественном пространстве R^4, хотя, на самом деле, в интеграле (I.3), определяющем этот функционал, интегрирование проводится по комплексному пространству C^4.

Наш постулат состоит в том, что локальные свойства в R^4 определяются проекцией носителя на вещественное пространство R^4. Для реализации этой идеи необходим математический аппарат, т.е. такие подпространства аналитических функций, которые выделяли бы однозначно проекцию носителя на R^4.

Заметим, что эта идея содержалась в работе С. Хоружего /IO/, однако там не было предложено никакого математического механизма для ее реализации.

В данной работе показывается, что в некоторых пространствах целых аналитических функций существуют такие подпространства функций (мы будем называть их проектирующими), с помощью которых можно изучать пространственно-временные свойства аналитических функционалов типа (I.I) и (I.2).

§2. Носители аналитических функционалов

В этом параграфе дадим некоторые определения и приведем ряд известных факторов из теории аналитических функционалов, которые потребуются нам в дальнейшем (ниже мы в основном следуем изложению работы /II/).

Будем обозначать через Ω открытое множество в R^n, а через $\tilde{\Omega}$ - открытое множество в C^n. Через $\mathcal{D}(\Omega)$ обозначается пространство бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω, $\mathcal{Z}$ -пространство всех целых функций, $\mathcal{Z}(\Omega)$ и $\mathcal{Z}(\tilde{\Omega})$-пространства аналитических функций соответственно на Ω и $\tilde{\Omega}$.

Дадим (см., например,/II/)

Определение

Пусть $\tilde{\Omega}$-открытое подмножество C^n. Элементы $\mathcal{Z}'(\tilde{\Omega})$ называются аналитическими функционалами на $\tilde{\Omega}$. Говорят, что компакт $K \subset \tilde{\Omega}$ является определяющим множеством функционала $B \in \mathcal{Z}'(\tilde{\Omega})$, если для любого открытого $\tilde{\omega} \supset K$ функционал B продолжается на $\mathcal{Z}(\tilde{\omega})$, т.е. если $\forall \tilde{\omega} \supset K \ \exists K_{\tilde{\omega}}$ - компакт в $\tilde{\omega}$ и $\exists C_{\tilde{\omega}}$, такие, что $|(B,f)| \leqslant C_{\tilde{\omega}} \sup\limits_{K_{\tilde{\omega}}} |f|$.

Если $B \in \mathcal{Z}'(\tilde{\Omega})$, то существует, по меньшей мере, один компакт, определяющий B, и из теоремы Хана-Банаха следует (так как $\mathcal{Z}(\tilde{\Omega})$ есть замкнутое подпространство $C^0(\tilde{\Omega})$-пространства непрерывных на $\tilde{\Omega}$ функций), что существуют такие компакт $K \subset \tilde{\Omega}$ и мера σ с носителем в K, что

$$(B,f) = \int\limits_{\tilde{\Omega}} f \, d\sigma \qquad \forall f \in \mathcal{Z}(\tilde{\Omega}).$$

При этом, вообще говоря, не существует наименьшего определяющего множества, т.е. такого множества, какое содержится во всех определяющих множествах рассматриваемого аналитического функционала. В этом его отличие от носителя линейного функционала, заданного на $\mathcal{D}(R^n)$. В этом же состоит и основная трудность использования данного определения.

Неоднозначность определения носителя аналитического функционала в комплексной области связана с существованием различных представлений аналитического функционала, т.е. с возможностью выбора различных контуров интегрирования в комплексном пространстве.

Существуют, однако, случаи (см. /II/), когда при некоторых дополнительных условиях можно фиксировать носитель аналитического функционала однозначно.

Например, если Ω – открытое подмножество R^n, то пространство аналитических на Ω функций снабжается проективной топологией

$$\mathfrak{Z}(\Omega) = \varprojlim_{K \subset \Omega} \mathfrak{Z}(K)\,.$$

Элементы $\mathfrak{Z}'(R^n)$ называются вещественными аналитическими функционалами. Это аналитические функционалы на C^n, сосредоточенные на вещественных компактах. Можно доказать /II/, что существует наименьший вещественный компакт, на котором сосредоточен функционал $B \in \mathfrak{Z}'(R^n)$. Этот компакт называется носителем и обозначается $\operatorname{supp} B$.

Непосредственным обобщением этого утверждения является следующий случай, важный в дальнейшем. Пространству C^n принадлежат комплексные числа $z_j = x_j + i y_j$ $(j=1,\dots,n)$. Обозначим через R^n_m $(m<n)$ вещественное подпространство C^n, которому принадлежат числа x_i $(i=1,\dots,m)$ и y_k $(k=m+1,\dots,n)$. Пусть Ω_m – открытое подмножество R^n_m. Вновь можно построить пространство аналитически на Ω_m функций, которое снабжено проективной топологией

$$\mathfrak{Z}(\Omega_m) = \varprojlim_{K \subset \Omega_m} \mathfrak{Z}(K)\,.$$

Элементы $\mathcal{Z}'(R^n_m)$ будем называть m-вещественными аналитическими функционалами. Это также аналитические функционалы на C^n, сосредоточенные на компактах из R^n_m.

Можно также доказать, что существует наименьший m-вещественный компакт, на котором сосредоточен функционал $B \in \mathcal{Z}'(R^n_m)$. Этот компакт будем называть носителем B и обозначать через $\operatorname{supp} B$.

В заключение заметим, что существуют и другие случаи /12/, когда носитель аналитического функционала может быть выделен однозначно.

§ 3. Пространства основных функций

Рассмотрим те пространства основных функций, которые используются в квантовой теории поля. Следуя Джаффе /3/, обозначим через $\mathcal{C}(R^4)$ пространство основных функций в x - пространстве, а через $\mathfrak{M}(R^4)$ - пространство основных функций в p - представлении. $\mathcal{C}$ и $\mathfrak{M}$ должны быть счетно-нормированными, полными ядерными линейными пространствами.

Сходимость, или топологию в $\mathfrak{M}(R^4)$ определим следующим семейством норм

$$\|\tilde{f}\|_k = \sup_{\substack{p,\,|m|\leq k\\ n<k}} g(k\|p\|)\left|D^m \tilde{f}(p)\right|\left(1+\|p\|^2\right)^n, \tag{3.1}$$

где k, m - целые числа

$$D^m \underset{Df}{=} \frac{\partial^{|m|}}{\partial p_0^{m_0}\,\partial p_1^{m_1}\dots\partial p_3^{m_3}}, \quad |m| = m_0+m_1+m_2+m_3$$

$$\|p\| = \left(p_0^2+\vec{p}^{\,2}\right)^{1/2},$$

$g(t^2)$ – функция, характеризующая пространство основных функций. Джаффе предполагал, что $g(t^2)$ должна быть целой и положительной на вещественной оси функцией:

$$g(t^2)=\sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu t^{2\nu}, \quad c_\nu \geqslant 0, \; c_0>0 \qquad (3.2)$$

Тогда

$$\mathfrak{M}(R^4)=\left\{\tilde{f}(p):\ \|\tilde{f}\|_k<\infty,\ \forall k>0\right\} \qquad (3.3)$$

В зависимости от выбора функции $g(t^2)$ в определении нормы (3.I) возникают различные пространства основных функций. Некоторые пространства в настоящее время хорошо изучены, результаты сведены в таблицу.

Описание пространств S, $\mathscr{C}_J$, $\mathscr{C}_M$ имеется в оригинальных работах (см. также обзор В. Файнберга /I3/). На этих пространствах строится локальная квантовая теория поля.

Сделаем замечание о пространстве $\mathscr{C}_M$. Мейман /2/ определил своё пространство C_0 следующим образом. Аналитическая функция $f(z)\in C_0$, если:

I). $\forall f(z)\in C_0 \ \exists d>0$, такое, что $f(z)$ аналитична в области

$$\Gamma_d=\left\{z:\ -\infty<x_j<\infty,\ |y_j|<d,\ j=0,1,2,3\right\}.$$

2). Не существует ни одной области Γ_d с фиксированным $d>0$, где были бы аналитичны все $f(z)\in C_0$.

3). $f(x)$ убывают при $x_j\to\pm\infty$, как некоторая степень полинома.

Таблица

	$g(t^2)$	Обозначение		
		x-пр-во	p-пр-во	
Локальные теории	Полином $P_N(t^2)$	S	S	Пространство Шварца [4]
	$\int\limits_0^\infty \frac{dt \log^+ g(t^2)}{1+t^2}<\infty$	$\mathcal{C}_J$	$\mathfrak{M}_J$	Пространство Джаффе [3]
	$g(t^2)<C_\varepsilon e^{\varepsilon t}$ $\exists C_\varepsilon>0,\ \forall \varepsilon>0$			Пространство квазианалитических функций
		$\mathcal{C}_M$	$\mathfrak{M}_M$	Пространство Меймана [2]
Нелокальные теории	$g(t^2)<Ce^{lt}$ $\exists\ l, C>0$	$\mathcal{C}_1$	$\mathfrak{M}_1$	Пространство Иофа–Файнберга [9]
	$g(t^2)<C_\varepsilon e^{t^{1+\varepsilon}}$ $\forall \varepsilon>0,\ \exists C_\varepsilon>0$	$\mathcal{C}_2$	$\mathfrak{M}_2$	
	$g(t^2)\leq Ce^{bt^a}$ $\exists\ C>0, b, a>1$	$\mathcal{C}_3$	$\mathfrak{M}_3$	

Пространство C_0 можно сделать топологическим следующим образом. Введём пространство функций $\mathcal{C}_{M,d}$, аналитических в области Γ_d, и для которых конечна система норм

$$\|f(z)\|_K = \sup_{z \in K \subset \Gamma_{(d-\frac{1}{K})}} (1+\|x\|^2)^a |f(x+iy)| < \infty, \quad \forall K.$$

Затем рассмотрим проективный предел

$$\mathcal{C}_M = \varprojlim_{K \subset \Gamma_d} \mathcal{C}_{M,d}.$$

Этот предел задаёт топологию на пространстве Мейлана C_0 .

Ниже мы подробно рассмотрим пространства $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ и пространства их фурье-образов $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$. Пространства $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ состоят из целых аналитических функций. Здесь имеются все проблемы, связанные с определением носителя аналитического функционала. На этих пространствах строится нелокальная квантовая теория поля /7/.

Рассмотрим подробнее свойства фурье-преобразований пространств $\mathfrak{M}_1(R^4)$ и $\mathfrak{M}_2(R^4)$. Согласно определению,

$$\mathcal{C}(C^4) = \left\{ f(z) : f(z) = F[\tilde{f}](z), \tilde{f} \in \mathfrak{M}(R^4) \right\}, \qquad (3.4)$$

где F - преобразование Фурье .

Пространство $\mathcal{C}_1(C^4)$ состоит из целых аналитических функций произвольного порядка роста, для которых конечна система норм

$$\|f\|_K = \sup_{\substack{z \in K \subset \Gamma_K \\ m < K}} (1+\|x\|^2)^m |f(x+iy)|. \qquad (3.5)$$

Пространство $\mathscr{C}_2(C^{\nu})$ состоит из целых аналитических функций бесконечного порядка роста ниже $h(r)$. Функция

$$h(r) = \max_{a>0}\left(ra - \log g(a^2)\right) \tag{3.6}$$

растёт быстрее любого полинома, т.е. $\lim\limits_{r\to\infty} \dfrac{r^N}{h(r)} = 0, \ \forall N>0.$

Другими словами, если $f(z) \in \mathscr{C}_2(C^{\nu})$, то

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\max\limits_{\|z\|=r} \log^+|f(z)|}{h(\delta r^2)} = 0, \quad \forall \delta>0. \tag{3.7}$$

Топология в $\mathscr{C}_2(C^{\nu})$ задаётся системой норм

$$\|f\|_k = \sup_{z,\, m<k} \left(1+\|x\|^2\right)^m e^{-h\left(\frac{\|y\|^2}{k}\right)} |f(x+iy)|. \tag{3.8}$$

Произвольный линейный функционал на $\mathscr{C}_1(C^{\nu})$ записывается в виде

$$(B,f) = \int d\sigma_B^{(1)}(z) f(z), \tag{3.9}$$

где $\sigma_B^{(1)}(z)$ комплексная вполне аддитивная мера на C^{ν}, сосредоточенная в ограниченной полосе Γ_N и удовлетворяющая условию

$$\int_{\Gamma_N} \frac{|d\sigma_B^{(1)}(x+iy)|}{(1+\|x\|^2)^k} < \infty \tag{3.10}$$

при некоторых $k>0$ и $N>0$, зависящих от B.

Общий вид линейного непрерывного функционала, заданного на $\mathscr{C}_2(C^{\nu})$, также записывается в форме (3.9), но мера $\sigma_B^{(2)}(z)$

удовлетворяет в этом случае условию

$$\int \frac{|d\sigma_B^{(2)}(x+iy)|}{(1+\|x\|^2)^{m}} e^{h\left(\frac{\|y\|^2}{k}\right)} < \infty \qquad (3.11)$$

при некоторых $k>0$ и $m>0$, зависящих от B.

Нас в дальнейшем будут интересовать локальные свойства введённых выше функционалов (3.9) в вещественном пространстве R^4.

§4. Проектирующие последовательности функций

Пространство проектирующих функций, являющееся подпространством всех целых функций, определим следующим образом.

Пусть, как и раньше, $\mathfrak{Z}$ – пространство всех целых функций.

Определение

Будем называть последовательность функций $\{f_{M,\varepsilon}(z)\}$ проектирующей, если:

(1) компакт M принадлежит R^4, $M\subset R^4$ называется носителем проектирующей последовательности;

(2) $f_{M,\varepsilon}(z)\in\mathfrak{Z}, \quad \forall\varepsilon>0;$

(3) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int dx\, f_{M,\varepsilon}(x+iy)=1, \quad \forall y_j \quad (j=0,1,2,3)$

(4) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} f_{M,\varepsilon}(x)=\chi(M)$ –
– характеристическая функция компакта M, т.е.

$$\chi(M)=\begin{cases}1, & x\in M\\ 0, & x\notin M\end{cases}$$

(5) $$\lim_{\varepsilon\to 0} f_{M,\varepsilon}(x+iy)=0$$
при $\forall y$ и $x\notin M$.

(6). Если компакт M разделён на N подобластей $\mathcal{O}_j$, таких, что

a) $\mathcal{O}_i\cap\mathcal{O}_j=\emptyset \qquad i\neq j$

б) $M=\bigcup_j M_j$, где $M_j=\overline{\mathcal{O}_j}$ замыкание области $\mathcal{O}_j$, тогда

$$f_{M,\varepsilon}(z)=\sum_{j=1}^{N} f_{M_j,\varepsilon}(z).$$

Пространство всех проектирующих последовательностей при произвольных носителях M обозначим через $\mathcal{T}$.

Пространство всех проектирующих последовательностей, носители которых содержатся в некоторой открытой области $G\subset R^4$, обозначим через $\mathcal{T}(G)$.

Существенно заметить, что функции, принадлежащие $\mathcal{T}$, бесконечного порядка роста, т.е.

$$\lim_{z\to\infty}\frac{\max\limits_{\|z\|=z}\lg|f(z)|}{z^N}=\infty,\quad \forall N>0,$$

если $f(z)\in\mathcal{T}$. Поэтому $\mathcal{T}\subset\mathcal{C}_j$ $(j=1,2)$ и $\mathcal{T}\not\subset\mathcal{C}_3$, так как $\mathcal{C}_3$ состоит из целых функций конечного порядка роста.

Пространство $\mathcal{T}$ не пусто. Функции пространства $\mathcal{T}$ можно построить, например, следующим образом. В пространстве $\mathcal{Z}$ существуют функции $f(z)$ одного комплексного переменного, которые удовлетворяют условиям:

I) существует такое число d, зависящее от f, что

$$|f(z)|=O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$$

при $z\to\infty$ вне полосы $|\mathrm{Re}\, z|>d$.

2)
$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\, f(x)=1.$$

Приведём пример такой функции

$$g(z)=\frac{1}{zA}\int_0^{\infty}\frac{du\,\sin zu}{\Gamma(u+1)},$$

где $$A = \pi \int_0^{\infty} \frac{du}{\Gamma(u+1)}.$$

Для этой функции справедливы оценки:

1) $|g(z)| = O\left(\frac{1}{|z|^2}\right)$ при $|Re\, z| > \frac{\pi}{2}$, $z \to \infty$

2) $\int_{-\infty}^{\infty} dx\, g(x) = 1$

3) $|g(z)| = O(exp\{e^{|y|}\})$ при $|Re\, z| \leq \frac{\pi}{2}$, $|y| \to \infty$.

Легко проверить, что функции

$$g_{M,\varepsilon}(z) = \frac{1}{\varepsilon^4} \int \ldots \int dx'_0 \ldots dx'_3 \prod_{j=0}^{3} g\left(\frac{z_j - x'_j}{\varepsilon}\right)$$

удовлетворяют всем условиям, определяющим проектирующую последовательность функций.

Существуют и другие возможности построения проектирующих последовательностей.

§ 5. Распределение в вещественном X - пространстве аналитического функционала

Рассмотрим теперь локальные свойства аналитических функционалов при помощи проектирующих последовательностей.

Пусть компакт K является носителем аналитического функционала B и задан однозначно:

$$K = supp\, B \subset C^4.$$

Будем называть проекцию компакта K на R^4 распределением функционала B в вещественном X - пространстве R^4. Обозначим эту проекцию через K_R.

Проекция K_R может быть выделена следующим образом.

Определение

Компакт K_R называется распределением аналитического функционала B в R^4, если

$$\lim_{\varepsilon \to 0} (B, f_\varepsilon) = 0$$

для любой $f_\varepsilon \in \Pi(G)$ такой, что

$$K_R \cap G = \varnothing.$$

С помощью этого определения удобно сформулировать основные требования о локальном поведении операторов поля и S-матрицы в квантовой теории поля.

Например, пусть $\varphi(x)$ - оператор поля. Введём поле

$$\varphi(f) = \int dx\, \varphi(x) f(x),$$

где $f(x) \in \mathcal{C}_j$ $(j=1,2)$. Тогда поле $\varphi(x)$ будет называться локальным, если

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1 \to 0 \\ \varepsilon_2 \to 0}} \left[\varphi\left(f^{(1)}_{\varepsilon_1}\right), \varphi\left(f^{(2)}_{\varepsilon_2}\right) \right]_- = 0$$

для любых $f^{(1)}_{\varepsilon_1} \in \Pi(G_1) \subset \mathcal{C}_j$, $f^{(2)}_{\varepsilon_2} \in \Pi(G_2) \subset \mathcal{C}_j$ $(j=1,2)$

таких, что $G_1 \sim G_2$, т.е. все точки области G_1 пространственно-подобны всем точкам области G_2.

Второй пример. Пусть S - матрица зависит от функции включения взаимодействия $g(x)$ и пусть теория такова, что .

$g(x) \in \mathcal{C}_j\ (j=1,2)$. Тогда S-матрица удовлетворяет условию локальности и микропричинности, если

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \left\{ S\left[g^{(1)}_{\varepsilon_1}+g^{(2)}_{\varepsilon_2}\right] - S\left[g^{(1)}_{\varepsilon_1}\right] S\left[g^{(2)}_{\varepsilon_2}\right]\right\} = 0$$

для любых $g^{(1)}_{\varepsilon_1} \in \mathcal{T}(G_1)$ и $g^{(2)}_{\varepsilon_2} \in \mathcal{T}(G_2)$, таких, что $G_1 \gtrsim G_2$, т.е. все точки области G_1 пространственноподобны или лежат в будущем относительно всех точек области G_2.

Третий пример. Пусть S-матрица соответствует нелокальной, но микропричинной теории. Тогда условие, которому удовлетворяет оператор $S[g]$, где $g \in \mathcal{C}_j\ (j=1,2)$, должно записываться в виде

$$\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}} \left\{ S\left[g^{(1)}_{\varepsilon_1}+g^{(2)}_{\varepsilon_2}\right] - S\left[g^{(1)}_{\varepsilon_1}\right] S\left[g^{(2)}_{\varepsilon_2}\right]\right\} = 0$$

для любых $g^{(1)}_{\varepsilon_1} \in \mathcal{T}(G_1)$ и $g^{(2)}_{\varepsilon_2} \in \mathcal{T}(G_2)$, если все точки области G_1 лежат в будущем относительно всех точек области G_2, т.е. $G_1 > G_2$.

Легко видеть, что все эти определения совпадают с общепринятыми в случае, когда пространством основных функций является не $\mathcal{C}_1$ или $\mathcal{C}_2$, а пространства, содержащие функции с ограниченным носителем, такие как S или $\mathcal{C}_J$, согласно нашим обозначениям.

§ 6. Об одном классе релятивистски-инвариантных обобщённых функций

Рассмотрим теперь релятивистски-инвариантные обобщённые функции, играющие важную роль при построении нелокальной квантовой теории поля:

$$K(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{(2n)!}\,\Box^n\delta^{(4)}(x)\ , \qquad (6.I)$$

где

$$\Box=-\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\overset{Df}{=\!=}-\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2}{\partial \vec{x}^2}\ .$$

Свойства обобщённой функции $K(x)$ определяются коэффициентами C_n. Ниже рассмотрим два случая:

Случай I

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ |C_n|^{\frac{1}{n}}=\ell^2<\infty \qquad (6.2)$$

Случай II

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ \frac{|C_n|^{\frac{1}{n}}}{n^{\varepsilon}}=0\ ,\quad \forall\varepsilon>0. \qquad (6.3)$$

Обозначим далее $f(z)=f(z_0,z_1,z_2,z_3)=f(z_0,\vec{z})$ и $z_j=x_j+iy_j\quad (j=0,1,2,3)$.

Рассмотрим функционал

$$(K,f)=\int dx\,K(x)f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{C_n}{(2n)!}\,\Box^n f(x). \qquad (6.4)$$

Воспользуемся интегральным представлением для оператора $\Box$:

$$\Box^n=\left(-\frac{\partial^2}{\partial x_0^2}+\frac{\partial^2}{\partial \vec{x}^2}\right)^n=a_n\int\limits_{\rho^2=1}d^4\rho\left(i\rho_4\frac{\partial}{\partial x_0}+\vec{\rho}\frac{\partial}{\partial\vec{x}}\right)^{2n} \qquad (6.5)$$

$$a_n = \frac{2^{2n}}{\pi^2}\,\frac{n!\,(n+2)!}{(2n)!}\;; \quad \lim_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = 1 . \tag{6.6}$$

Интегрирование в (6.5) проводится по евклидовой сфере

$$\rho^2 = \rho_1^{\,2} + \rho_2^{\,2} + \rho_3^{\,2} + \rho_4^{\,2} = \vec{\rho}^{\,2} + \rho_4^{\,2} = 1.$$

Можно показать, что существует в комплексной ζ- плоскости такая мера $\sigma(\zeta)$, что

$$C_n a_n = \int \zeta^{2n}\, d\sigma(\zeta), \tag{6.7}$$

причём для случая (I) она сосредоточена в области $|\zeta| < \ell + \varepsilon$, а для случая (II) удовлетворяет условию

$$\int |d\sigma(\zeta)|\, e^{|\zeta|^N} < \infty \quad , \quad \forall N > 0. \tag{6.8}$$

Действительно, введём функцию

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-)^n C_n a_n}{(2n)!}\, z^{2n}.$$

Эта функция является целой функцией, порядок роста которой равен

$$h(r) = \max_{|z|=r} \log^+ |g(z)| = \begin{cases} \ell r & \text{для случая (I)} \\ r\,\lambda(r) & \text{для случая (II),} \end{cases}$$

где $\lambda(z)$ – медленно меняющаяся функция, т.е.

$$\lim_{z\to\infty} \frac{z\lambda'(z)}{\lambda(z)} = 0,$$

например, $\lambda(z)=(\log z)^{\alpha}$ или $\lambda(z)=\log\log z$.

Согласно теореме о представлении целых функций (см. /I4/и/I5/) существует представление

$$g(z) = \int e^{iz\zeta} d\sigma(\zeta), \tag{6.9}$$

где $\sigma(\zeta)$ – комплексная вполне аддитивная мера в ζ-плоскости, удовлетворяющая перечисленным выше условиям. Из (6.9) немедленно следует (6.7).

Воспользовавшись формулами (6.6) и (6.7), легко получить для функционала (6.4) представление

$$(K,f) = \int d\sigma(\zeta) \int\limits_{\rho^2=1} d^4\rho\, f(i\rho_4\zeta, \vec{\rho}\zeta). \tag{6.10}$$

Легко видеть, что обобщённые функции в случае I определены на $\mathcal{C}_1$, в случае II – на $\mathcal{C}_2$.

Фурье-образ обобщённой функции $K(x)$ определяется как

$$\tilde{K}(p^2) = (K, e^{ipz}) = \int d\sigma(\zeta) \int\limits_{\rho^2=1} d^4\rho\, e^{-p_0\rho_4\zeta - i\vec{p}\vec{\rho}\zeta} = \tag{6.11}$$

$$= \int d\sigma(\zeta)\, 2\pi^2 \frac{J_1(\zeta\sqrt{-p^2})}{\zeta\sqrt{-p^2}}.$$

Здесь $p^2 = p_0^2 - \vec{p}^{\,2}$ и $J_1(u)$ – функция Бесселя.

Функция $\tilde{K}(p^2)$ является целой функцией в комплексной p^2 – плоскости, причём справедливы оценки

$$|\tilde{K}(p^2)| < \begin{cases} C e^{(\ell+\varepsilon)\sqrt{|p^2|}} & \text{для случая (I)} \\ C e^{a\sqrt{|p^2|}}\lambda(|p^2|) & \text{для случая (II)} \end{cases} \qquad (6.12)$$

при некоторых $C>0$ и $a>0$.

Рассмотрим теперь пространственно-временные свойства обобщённой функции $K(x)$, согласно введённым нами определениям. Предварительно заметим, что, как следствие инвариантности относительно группы Лоренца, представление (6.10) может быть записано в различных эквивалентных формах:

$$(K,f) = \int d\sigma(\zeta) \int_{\rho^2=1} d^4\rho\, f\left(\Lambda_{0\beta}\rho_\beta\zeta, \Lambda_{1\beta}\rho_\beta\zeta, \Lambda_{2\beta}\rho_\beta\zeta, \Lambda_{3\beta}\rho_\beta\zeta\right) =$$

$$= \int d\sigma(\zeta) \int_{\rho^2=1} d^4\rho\, f(\Lambda\rho\zeta). \qquad (6.13)$$

Здесь $\Lambda_{\alpha\beta} = \Lambda_{\alpha\beta}(\vartheta,\varphi,\psi)$ представление однородной группы Лоренца;

ϑ – лоренцовский угол, т.е. $th\,\vartheta = \frac{v}{c}$,

c – скорость света,

v – скорость системы отсчёта;

φ и ψ – евклидовы углы.

В (6.13) суммирование проводится по β = 0,1,2,3 и приняты обозначения $\rho_0 = i\rho_4$.

В частности, когда $\varphi=\psi=0$, а скорость v направлена вдоль оси 3, представление (6.13) имеет вид:

$$(K,f)=\int d\sigma(\zeta)\int\limits_{\rho^2=1} d^4\rho\, f(i\rho_4\zeta\,ch\,\vartheta+\rho_3\zeta\,sh\,\vartheta,\rho_1\zeta,\rho_2\zeta,i\rho_4\zeta\,sh\,\vartheta+\rho_3\zeta\,ch\,\vartheta)$$

(6.I3a)

Рассмотрим теперь пространственно-временные свойства обобщённой функции $K(x)$, согласно введённым нами определениям.

Легко видеть, что в случае (П) носителем функционала (6.I3) является все пространство C^4. В случае (I) мера $\sigma(\zeta)$ ограничена в ζ- плоскости. Поэтому ниже все наши рассуждения будут касаться только случая (I).

Если мы зададимся в представлении (6.I3) каким-либо определённым элементом лоренцовской группы $\Lambda=\Lambda(\vartheta,\varphi,\psi)$ с фиксированными параметрами ϑ, φ и ψ, то для данного $\Lambda(\vartheta,\varphi,\psi)$ функционал (6.I3) может быть расширен на класс функций $\mathcal{Z}(\Omega_\ell(\vartheta,\varphi,\psi))$, аналитических в области

$$\Omega_\ell(\vartheta,\varphi,\psi)=\left[z:\ |\Lambda_{0\beta}z_\beta|^2+|\Lambda_{1\beta}z_\beta|^2+|\Lambda_{2\beta}z_\beta|^2+|\Lambda_{3\beta}z_\beta|^2<\ell^2+\varepsilon\right],$$

в частности:

$$\Omega_\ell(0,0,0)=\left[z:\ |z_0|^2+|z_1|^2+|z_2|^2+|z_3|^2<\ell^2+\varepsilon\right]$$

$$\Omega_\ell(\vartheta,0,0)=\left[z:\ |z_0\,ch\,\vartheta+z_3\,sh\,\vartheta|^2+|z_1|^2+|z_2|^2+|z_0\,sh\,\vartheta+z_3\,ch\,\vartheta|^2<\ell^2+\varepsilon\right].$$

Таким образом, определяющими множествами функционала (6.I3) являются множества $\Omega_\ell(\vartheta,\varphi,\psi)$, среди которых, как легко видеть, не существует ни одного, лежащего во всех остальных. Поэтому в случае (I) для произвольных последовательностей $\{c_n\}$, удовлетворяющих условию (6.2), носитель обобщённой функции $K(x)$ не может быть задан однозначно.

Рассмотрим теперь два частных случая. Пусть в представлении (6.7) мера $\sigma(\zeta)$ сосредоточена на вещественной или на мнимой оси в $\zeta=\xi+i\eta$-плоскости, т.е.

Тип А
$$c_n a_n = \int_{-\ell}^{\ell} d\sigma(\zeta)\zeta^{2n} = \int_{-\ell}^{\ell} d\sigma(\xi)\xi^{2n} \tag{6.I4}$$

Тип Б
$$c_n a_n = \int_{-i\ell}^{+i\ell} d\sigma(\zeta)\zeta^{2n} = (-)^n \int_{-\ell}^{\ell} d\sigma(i\eta)\eta^{2n} = = (-)^n \int_{-\ell}^{\ell} d\sigma_1(u)u^{2n} \tag{6.I5}$$

Тогда представление (6.I3) для функционала K можно записать в виде

Тип А
$$(K,f) = \int_{-\ell}^{\ell} d\sigma(u) \int_{\rho^2=1} d^4\rho\, f(\Lambda\rho u) = \int_{-\ell}^{\ell} d\sigma(u) \int_{\rho^2=1} d^4\rho\, f(i\rho_4 u, \vec{\rho} u) \tag{6.I6}$$

Тип Б
$$(K,f) = \int_{-\ell}^{\ell} d\sigma_1(u) \int_{\rho^2=1} d^4\rho\, f(-i\Lambda\rho u) = \int_{-\ell}^{\ell} d\sigma_1(u) \int_{\rho^2=1} d^4\rho\, f(\rho_4 u, i\vec{\rho} u). \tag{6.I7}$$

Легко видеть, что в этих случаях носитель аналитического функционала расположен в R_3^Y (Тип А) и в R_0^Y (Тип Б), причём носителями являются:

Тип А

$$K^A = \operatorname{supp} K = \{ z : y_0^2 + \vec{x}^2 < \ell^2 + \varepsilon ,\ z \in R_3^Y \subset C^Y \} \tag{6.18}$$

Тип Б

$$K^Б = \operatorname{supp} K = \{ z : x_0^2 + \vec{y}^2 < \ell^2 + \varepsilon ,\ z \in R_0^Y \subset C^Y \}. \tag{6.19}$$

Эти носители единственны в том смысле, что любое другое определяющее множество функционала $K(x)$ содержит их как подмножество.

Если теперь исследовать пространственно-временные свойства этих функционалов при помощи проектирующих последовательностей, тогда, как легко убедиться,

$$K_R^A = \{ X : X_0 = 0 ,\ \vec{x}^2 < \ell^2 + \varepsilon \}, \tag{6.20}$$

т.е. K_R^A – трехмерный шар при $t = X_0 = 0$.

$$K_R^Б = \{ X : X_0^2 < \ell^2 + \varepsilon ,\ \vec{x} = 0 \}, \tag{6.21}$$

т.е. отрезок на временной оси $[-\ell - \varepsilon < t = X_0 < \ell + \varepsilon]$ при $\vec{x} = 0$.

Таким образом, в смысле введённых определений обобщённые функции типа A дают нам релятивистски инвариантное описание протяжённых объектов в координатном пространстве.

Может возникнуть вопрос: как может быть, чтобы у релятивистски-инвариантного функционала носитель был сосредоточен на явно релятивистски неинвариантной области K_R^A ?

Ответ состоит в следующем. Проверка пространственно-временных свойств функционала совершается с помощью функций, которые не являются релятивистски-инвариантными. В каждой лоренцовской системе существует своя совокупность проектирующих последовательностей. Иначе: тот инструмент, с помощью которого проверяются пространственно-временные свойства функционала, должен выбираться независимо в каждой лоренцовской системе. Значит, релятивистская инвариантность функционала состоит в том, что результат действия функционала на каждую такую проектирующую последовательность, связанную с некоторой системой L, не должен зависеть от этой системы L. Наш результат как раз в этом и состоит. Именно: если в каждой системе L выбрать проектирующие последовательности независимым образом, то вещественный носитель функционала всегда сосредоточен в области K_R^A.

Для фурье-образов получим:

Тип А

$$\widetilde{K}(p^2) = 2\pi^2 \int_{-l}^{l} d\sigma(u)\, \frac{J_1(u\sqrt{-p^2})}{u\sqrt{-p^2}} \xrightarrow[p^2\to-\infty]{} 0 \qquad (6.22)$$

Тип Б

$$\widetilde{K}(p^2) = 2\pi^2 \int_{-l}^{l} d\sigma_1(u)\, \frac{J_1(u\sqrt{+p^2})}{u\sqrt{p^2}} \xrightarrow[p^2\to+\infty]{} 0 .$$

Интересно отметить, что унитарная нелокальная квантовая теория поля может быть построена только с помощью обобщённых функций типа A (см. /7/).

Несколько слов скажем о свойствах обобщённых функций $K(x)$ в случае (П) для типов A и $Б$.

Имеем:

Тип А

$$(K,f)=\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma(u)\int_{\rho^2=1}d^4\rho\, f(i\rho_4 u,\vec{\rho}u) \tag{6.23}$$

Тип Б

$$(K,f)=\int_{-\infty}^{\infty}d\sigma_1(u)\int_{\rho^2=1}d^4\rho\, f(\rho_4 u,i\vec{\rho}u).$$

Для проекций носителей на R^4 получим

$$K_R^A=\left\{x: x_0=0,\ \vec{x}\in R^3\right\}$$

$$K_R^Б=\left\{x: x_0\in R,\ \vec{x}=0\right\}. \tag{6.24}$$

Итак, обобщённые функции типа A в случае П сосредоточены во всем координатном пространстве R^3 и не имеют никакой протяжённости вдоль временной оси.

С помощью этих функций можно также построить конечную унитарную S-матрицу в нелокальной теории поля /7/.

Таким образом, в смысле введённых определений, обобщённые функции $K(x)$ типа A дают нам релятивистски инвариантное описание протяжённых в координатном пространстве R^3 объектов, строго локализованных в точке на временной оси.

В заключение выражаю благодарность академику В.С. Владимирову, профессору Я.А. Смородинскому, С.С. Хоружему и А.Ю. Юматову за обсуждения.

Литература:

I. K.Hepp, High Energy physics, Proc. of the XV International Conference, "Naukova Dumka", Kiev, 1972.

2. Н.Н. Мейман. ЖЭТФ, 47, 1966 , 1964.

3. A.M.Jaffe, Phys.Rev.Lett. 17, 661, 1966. Phys.Rev. 158, 1454, 1967.

4. Р. Стритер, А. Вайтман. PCT, спин и статистика и всё такое. "Наука", Москва, 1966.

5. Н.Н. Боголюбов, А.А. Логунов, И.Т. Тодоров. Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля. "Наука", Москва,1969.

6. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат. Москва, 1957.

7. Г.В. Ефимов. Commun.Math.Phys. 5, 42, 1967; 7,138,1968; ЯФ, 4, 432, 1966. Препринт ИТФ-68-52,54,55,Киев, 1968; Проблемы физики ЭЧАЯ, том. I, вып. I. стр. 256, Атомиздат, 1970.

8. G.V.Efimov, CERN preprint TH 1086, 1969; High Energy Physics. Proceedings of the XY th International Conference, "Naukova Dumka", Kiev, 19721 A.Salam, ICTP, Trieste, IC/71/108, Development in High Energy Phys. Vien. p. 1-31, 1970.
М.К. Волков. Проблемы физики ЭЧАЯ, т. 2, вып. I, стр. 33, Атомиздат 1971 .

9. М.З. Иофа, В.Я. Файнберг, ЖЭТФ, 56, 1644,1969; ТМФ, I, 187, 1969.

10. S.S. Khoruzhy, Preprint ITP-68-22, Kiev, 1968.

11. П. Шапиро. Теория гиперфункций. Библиотека сборника "Математика",. "Мир", Москва, 1972.

12. C.O.Kiselman, Arkiv for Matematik, 6, 307, 1966.
13. В.Я. Файнберг. Препринт ФИАН СССР, № 137, Москва 1967.
14. И.М. Гельфанд, Г.Е. Шилов. Обобщённые функции, том. II, Физматгиз, Москва, 1958.
15. Г.В. Ефимов. ДАН СССР, 195, 536, 1970.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 октября 1972 года.