СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6710

В.Н. Стрельцов

К РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1972

P2 - 6710

В.Н. Стрельцов

К РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ*

---

* В порядке обсуждения

§1. К четырехмерной формулировке специальной теории относительности

Остановимся на некоторых особенностях интерпретации результатов специальной теории относительности с точки зрения четырехмерного мира Минковского.

Определим для этого, как обычно, четырехмерную скорость u_i:

$$u_i = \frac{dx_i}{ds}, \tag{1.1}$$

где ds - элемент длины в 4-мире

$$ds = \sqrt{\sum_{i=1}^{4} dx_i^2}.$$

В результате будем иметь, в частности:

$$u_x = \frac{v_x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \tag{1.2}$$

$$u_t = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \tag{1.3}$$

Привлекая далее специальные формулы преобразования Лоренца для координат, перепишем их на основании /1.2/ и /1.3/ в виде:

$$x' = xu_t - u_x t, \qquad /1.4/$$

$$t' = tu_t - \frac{u_x}{c^2}x. \qquad /1.4'/$$

Здесь, может быть, надо особо отметить, что, как следует из / 1.2/ и /1.3/, компоненты 4-скорости света, очевидно, будут определяться бесконечно большими величинами. Таким образом, в рамках данного подхода мы в каком-то смысле возвращаемся к галилеевскому случаю. Особенно, если учтем при этом, что в обсуждаемом подходе роль времени играет собственное время Минковского $\tau = s/ic$, формула преобразования которого:

$$\tau' = \tau$$

имеет, очевидно, вид формулы преобразования Галилея.

Что касается правила сложения скоростей, то оно будет определяться следующими выражениями:

$$u'_x = u_x V_t - V_x u_t,$$

$$u'_t = u_t V_t - \frac{u_x V_x}{c^2}.$$

Очевидно, далее, что в рамках рассматриваемого подхода импульс, как и в классической физике, будет выражаться произведением массы на скорость:

$$P_x = mu_x = m\frac{v_x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

Таким образом, с точки зрения четырехмерного подхода масса /как и электрический заряд/ является скаляром и не преобразуется при переходе к другой системе отсчета.

Подобно этому, сила Минковского будет определяться как произведение /скаляра/ массы на 4-ускорение w_i, компоненты w_x и w_t которого будут даваться следующими выражениями:

$$w_x = \dot{u}_x u_t\ ,$$

$$w_t = \dot{u}_t\, u_t\ .$$

Что касается плотности силы Лоренца, то ее компоненты будут составлять

$$k_i = j_k F_{ik} = \frac{\rho^*}{c} F_{ik}\, u_k\ ,$$

где ρ^*- плотность заряда в единице 4-объема, тогда как для самой силы Лоренца будем иметь

$$K_i = \frac{e}{c} F_{ik}\, u_k,$$

т.е., например,

$$\vec{K} = \frac{e}{c}(\vec{E} u_t + [\vec{u}\vec{H}]).$$

Отметим также, что в рамках рассматриваемого подхода работа силы будет определяться произведением 4-ой компоненты силы Минковского на элемент длины в 4-мире ds :

$$dA = F_4 ds\ .$$

§2. Об инвариантности электрического заряда

1. Как известно, в 4-пространстве объем параллелепипеда представляет собою одну из компонент полностью антисимметричного тензора 3-го ранга (V_{ijk}). Поэтому, если мы умножим некоторый вектор j_ℓ на указанный тензор, то в результате, очевидно, должны получить также тензор не ниже 2-го ранга.

Пусть, в частности, j_ℓ представляет собою 4-вектор плотности электрического тока. Тогда для того, чтобы после умножения j_ℓ на V_{ijk} получить скалярную величину - электрический заряд, мы, например, должны домножить указанное произведение /скалярно/ на $e_{\mu\nu\tau\sigma}$. Здесь $e_{\mu\nu\tau\sigma}$ - единичный 4-тензор 4-го ранга, антисимметричный по всем индексам. Иными словами, этот шаг означает переход к антисимметричному тензору ($J_{\mu\nu\tau}$) плотности электрического тока, дуальному j_ℓ , или введение дуального дополнения (V_σ) к тензору объема, представляющего собою вектор, нормальный по отношению к элементу объема и по абсолютной величине равный объему этого элемента.

Здесь следует отметить, например, что если рассматривать плотность электрического тока как тензор 3-го ранга, то для второй пары уравнений Максвелла надо использовать выражение вида:

$$\frac{\partial F^*_{\mu\nu}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial F^*_{\nu\tau}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F^*_{\tau\mu}}{\partial x_\nu} = J_{\mu\nu\tau} , \qquad /2.1/$$

где $F^*_{\mu\nu}$ - тензор, дуальный тензору электромагнитного поля $F_{\tau\sigma}$.

Рассмотрим теперь формулы преобразования для компонент тензора объема, которые будут определяться следующими выражениями:

$$V'_{123} = \frac{V_{123} - \beta c V_{423}}{\sqrt{1-\beta^2}} ,$$

$$V'_{124} = V_{124} , \quad V'_{134} = V_{134} , \qquad /2.2/$$

$$V'_{423} = \frac{V_{423} - \frac{\beta}{c} V_{123}}{\sqrt{1-\beta^2}} .$$

Вводя далее элемент объема $\Delta V'_{ijk}$ в собственной системе отсчета, где $J'_1 = J'_2 = J'_3 = 0$, найдем, что заряд, заключенный в элементе объема $\Delta V' = \Delta x'\Delta y'\Delta z'$, будет определяться выражением:

$$\Delta Q = J'_{123} \, \Delta V'_{123} = \frac{1}{ic} j'_4 \, \Delta V'_4 = \rho' \Delta V' , \qquad /2.3/$$

По наблюдениям из другой системы отсчета указанная величина будет определяться как

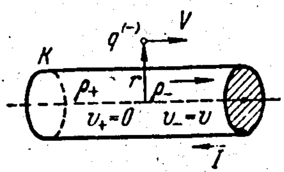
$$\Delta Q = J_{123}\,\Delta V_{123} - J_{423}\,\Delta V_{423} = \frac{1}{ic}\, j_4 \Delta V_4 - j_1 \Delta V_1 . \qquad /2.4/$$

Отсюда, с учетом того, что $J_{123} \Delta V_{123} = \rho \Delta V$, мы можем заключить, что в общем случае

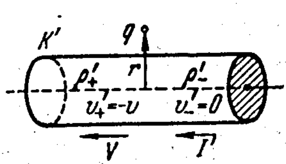
$$\rho' \Delta V' \neq \rho \Delta V , \qquad /2.5/$$

т.е. заряд, находящийся внутри некоторого элемента пространственного объема, с точки зрения наблюдателей из разных систем отсчета будет определяться разными величинами.

2. Полученные результаты снимают трудности, возникающие, скажем, при рассмотрении задачи взаимодействия заряда $q^{(-)}$ и проволоки с током /см., например, работу /1/ /. В этой задаче в системе отсчета K заряд движется со скоростью $v_x = v$, а проволока, расположенная вдоль оси OX, покоится /см. рисунок/. Причем плотности отрицательных и положительных зарядов ρ_- и ρ_+ внутри проволоки одинаковы, поэтому суммарная плотность $\rho = 0$, т.е. в об-



а)



б)

щепринятом смысле проволока не заряжена, т.к. $\rho V=0$. Ток плотности $-j_x \equiv j_x^{(-)}$, протекающий по проволоке, создает магнитное поле, в результате чего на движущийся заряд действует сила, направленная к проводнику */.

Согласно принципу относительности, указанная сила должна действовать на заряд и в той системе отсчета (K'), где заряд покоится /и $j^{(-)'} = 0$ /, а проволока движется со скоростью $-v$. Но коль скоро в K'-системе заряд покоится, то сила, действующая на него, должна носить электрический характер. Таким образом, мы приходим к определенной трудности: в результате движения изменился заряд проволоки /в общепринятом смысле/. Проволока заряжается положительно.

Легко видеть, однако, что с точки зрения проведенного выше рассмотрения /и, в частности, /2.4// никакой трудности нет, поскольку и в K'-системе заряд проволоки

$$Q = \rho' V'_4 - j^{(+)'} V'_1 , \qquad /2.6/$$

как показано в Приложении, тоже равен нулю.

3. В заключение остановимся на одной интегральной теореме электромагнетизма, непосредственно связанной с предыдущим рассмотрением.

По теореме Стокса /см., например, /2а/ / будем иметь

$$\int_{V(2)} F^*_{\mu\nu} \, dV_{\mu\nu} = \frac{1}{3} \int_{V(3)} \mathrm{rot}_{\mu\nu\tau} \, F^* \, dV_{\mu\nu\tau} ,$$

где

$$\mathrm{rot}_{\mu\nu\tau} F^* = \frac{\partial F^*_{\mu\nu}}{\partial x_\tau} + \frac{\partial F^*_{\nu\tau}}{\partial x_\mu} + \frac{\partial F^*_{\tau\mu}}{\partial x_\nu} .$$

Воспользовавшись далее уравнениями Максвелла /2.1/, придем к следующей интегральной теореме

---

*/ Пусть для определенности наблюдение происходит в момент времени, когда нормаль, проходящая через пробный заряд, пересекает середину проводника.

$$\int\limits_{V(2)} F^*_{\mu\nu}\, dV_{\mu\nu} = \frac{1}{3} \int\limits_{V(3)} J_{\mu\nu\tau}\, dV_{\mu\nu\tau} .$$

Здесь в правой части стоит величина, которая в собственной системе отсчета будет, очевидно, определять собою электрический заряд, заключенный внутри объема $V(3)$:

$$Q = \int\limits_{V(3)} J_{123}\, dV_{123} = \int \rho\, dx\, dy\, dz .$$

В то же время очевидно, что с точки зрения некоторой другой системы отсчета в указанную величину будут давать вклад и иные компоненты плотности электрического тока.

§3. *Об электромагнитной массе электрона*

При рассмотрении вопроса о том, как преобразуется энергия и импульс электромагнитного поля электрона /при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой /мы будем, как обычно, опираться на тензор T_{ik} энергии-импульса электромагнитного поля, а также на 4-вектор объема V_ℓ, дуальный рассмотренному в§2 тензору объема V_{pqr}.

1. Исключительно для простоты будем полагать далее, что элемент пространственного объема в собственной системе (K') электрона образуется тремя 4-векторами A'_i, B'_i и C'_i специального вида:

$$A'_i \{ a'_x ,0,0,0 \}, \quad B'_i \{0, b'_y ,0,0\}, C'_i \{0,0, c'_z, 0 \} , \qquad /3.1/$$

которые определяются с помощью следующих выражений:

$$A'_i = \frac{1}{2}(\underset{\rightarrow}{a}'_i - \underset{\leftarrow}{a}'_i), \; B'_i = \frac{1}{2}(\underset{\rightarrow}{b}'_i - \underset{\leftarrow}{b}'_i), C'_i = \frac{1}{2}(\underset{\rightarrow}{c}'_i - \underset{\leftarrow}{c}'_i). \qquad /3.2/$$

При этом векторы a'_i , b'_i и c'_i характеризуются компонентами:

$$\underset{\rightarrow}{a'_i}\{a'_x, 0, 0, \frac{1}{c}a'_x\},\ \underset{\rightarrow}{b'_i}\{0, b'_y, 0, \frac{1}{c}b'_y\},\ \underset{\rightarrow}{c'_i}\{0, 0, c'_z, \frac{1}{c}c'_z\}, \qquad /3.3/$$

$$\underset{\leftarrow}{a'_i}\{-a'_x, 0, 0, \frac{1}{c}a'_x\},\ \underset{\leftarrow}{b'_i}\{0, -b'_y, 0, \frac{1}{c}b'_y\},\ \underset{\leftarrow}{c'_i}\{0, 0, -c'_z, \frac{1}{c}c'_z\} \qquad /3.4/$$

и описывают собою процесс распространения сигнала со скоростью "c" вдоль пространственных векторов a'_x , b'_y и c'_z туда $(\rightarrow)$ и обратно $(\leftarrow)$, , в связи с чем формулы /3.2/ могут рассматриваться как определения соответствующих длин, базирующиеся, скажем, на методе измерения расстояний с помощью радиолокации */.

С учетом вышесказанного для компонент тензора объема в рассматриваемом случае будем иметь:

$$V'_{123} = a'_x\, b'_y\, c'_z\ , \qquad /3.5а/$$

$$V'_{423} = V'_{143} = V'_{124} = 0\ .^{**/} \qquad /3.5б/$$

Воспользовавшись далее формулами преобразования, обратными /2.2/, и переходя к 4-вектору объема, получим

$$V_4 = V'_4\cdot\gamma\ ,$$

$$V_2 = V'_2 = 0\ ,\quad V_3 = V'_3 = 0\ , \qquad /3.6/$$

$$V_1 = \beta V'_1\cdot\gamma\ ,$$

где $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$.

---

*/Следует отметить здесь, что наблюдатель из некоторой другой системы отсчета K , следящий, например, за процедурой измерения длины отрезка a'_x с помощью своих часов, найдет, что соответствующая величина /которую вполне разумно назвать длиной данного отрезка в движении/ $A_x = a'_x / \sqrt{1-\beta^2}$.

**/К последнему результату, как будет показано ниже, можно прийти также на основании условия сферической симметрии электрона.

2. Рассмотрим теперь выражения для энергии и импульса электромагнитного поля покоящегося электрона:

$$\epsilon' = \int T'_{44}\, dV'_4 \ , \qquad /3.7а/$$

$$G'_x = \frac{i}{c}\left(\int T'_{11}\, dV'_1 + \int T'_{12}\, dV'_2 + \int T'_{13}\, dV'_3\right), \qquad /3.7б/$$

$$G'_y = \frac{i}{c}\left(\int T'_{21}\, dV'_1 + \int T'_{22}\, dV'_2 + \int T'_{23}\, dV'_3\right), \qquad /3.7в/$$

$$G'_z = \frac{i}{c}\left(\int T'_{31}\, dV'_1 + \int T'_{32}\, dV'_2 + \int T'_{33}\, dV'_3\right). \qquad /3.7г/$$

Здесь мы учли, что для покоящегося заряда магнитное поле $\vec{H} = 0$, а поэтому компоненты $T'_{\alpha 4} = 0$.

Привлекая далее условие сферической симметрии

$$E'^2_x = E'^2_y = E'^2_z = \frac{1}{3} E'^2$$

вместе с требованием равенства нулю импульса $\vec{G}$ будем иметь, что

$$-\frac{1}{6}\int E'^2 dV'_1 + \frac{1}{3}\int E'^2 dV'_2 + \frac{1}{3}\int E'^2 dV'_3 = 0,$$

$$\frac{1}{3}\int E'^2 dV'_1 - \frac{1}{6}\int E'^2 dV'_2 + \frac{1}{3}\int E'^2 dV'_3 = 0,$$

$$\frac{1}{3}\int E'^2 dV'_1 + \frac{1}{3}\int E'^2 dV'_2 - \frac{1}{6}\int E'^2 dV'_3 = 0,$$

откуда в полном согласии с /3.5б/ немедленно получим:

$$dV'_1 = dV'_2 = dV'_3 \ .$$

По наблюдениям из K-системы энергия и импульс электромагнитного поля электрона /с учетом /3.6// будут определяться выражениями:

$$\epsilon = \int T_{44}\, dV_4 + \int T_{41}\, dV_1 \ , \qquad /3.8а/$$

$$G_x = \frac{i}{c}\left(\int T_{14}\, dV_4 + \int T_{11}\, dV_1 \right). \qquad /3.8б/$$

Поскольку движение происходит вдоль оси OX, другие компоненты импульса будут равны нулю и в K-системе.

Воспользовавшись далее известными формулами преобразования для компонент тензора энергии-импульса T_{ik}:

$$T_{44} = \gamma^2 (T'_{44} - \beta^2 T'_{11}),$$

$$T_{41} = T_{14} = i\beta\gamma^2 (T'_{11} - T'_{44}),$$

$$T_{11} = \gamma^2 (T'_{11} - \beta^2 T'_{44})$$

и привлекая снова /3.6/, легко найдем, что

$$\epsilon = \gamma\epsilon', \qquad /3.9/$$

$$G = \frac{\beta}{c}\gamma\epsilon'. \qquad /3.9б/$$

Очевидно, что полученные таким образом формулы /3.9/ соответствуют обычным релятивистским формулам преобразования для энергии и импульса частицы и отличаются от общеизвестных выражений /см., например, /2 б/, а также /3/ /:

$$\epsilon = \gamma\epsilon' \left(1 + \frac{\beta^2}{3}\right),$$
$$G_x = \frac{4}{3}\,\frac{\beta}{c}\,\gamma\epsilon'. \qquad /3.10/$$

Коль скоро проведенное выше рассмотрение носит ковариантный характер, то, скажем, обычное /основанное на формулах /3.10// утверждение о том, что электрону обязательно должна быть приписана механическая инертная масса, нельзя считать обоснованным. В связи с этим вопрос о введении неэлектрических сил - "напряжений Пуанкаре" оказывается за рамками рассматриваемой проблемы.

Приложение

Последующее рассмотрение мы проведем, полагая для простоты, что поперечные размеры проводника достаточно малы и ими можно пренебречь, скажем, по сравнению с расстоянием (h) до пробного заряда q.

Итак, пусть наблюдение в K-системе производится в точке нахождения пробного заряда с координатами $t=0$, $x=0$, $y=h$. В этот момент на заряд q будет действовать электромагнитное поле, испущенное зарядами левого $(x=-L_0/2)$ и правого $(x=L_0/2)$ концов проводника в моменты времени $t_{\text{л,п}} = -\frac{1}{c}[h^2+(\frac{L_0}{2})^2]^{1/2}$. При этом, очевидно, что в рассматриваемом случае

$$V_4 = x_{\text{п}} - x_{\text{л}} = L_0,$$

$$V_1 = t_{\text{п}} - t_{\text{л}} = 0.$$

Воспользовавшись далее преобразованиями Лоренца, найдем, что по наблюдениям из K'-системы, соответствующие величины будут определяться выражениями:

$$x'_{\substack{\text{л}\\\text{п}}} = \frac{\mp\frac{L_0}{2} + \beta c[-\frac{1}{c}\sqrt{h^2+(\frac{L_0}{2})^2}]}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$t'_{\substack{\text{л}\\\text{п}}} = \frac{-\frac{1}{c}\sqrt{h^2+(\frac{L_0}{2})^2} + \frac{\beta}{c}(\mp\frac{L_0}{2})}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

откуда будем иметь, что

$$V'_4 = x'_п - x'_л = \frac{L_0}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$V'_1 = \frac{\beta L_0}{c\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Привлекая теперь формулы преобразования для плотностей зарядов и тока */:

$$\rho'_- = \rho_- \sqrt{1-\beta^2},$$

$$\rho'_+ = -\frac{\rho_-}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

$$j'_- = j'_+ = -\frac{\beta c \rho_-}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

действительно придем к формуле /2.6/:

$$\rho' V'_4 - j' V'_1 = 0,$$

где $\rho' = \rho'_+ + \rho'_- = -\rho_- \frac{\beta^2}{\sqrt{1-\beta^2}}.$

Следует отметить, что в тех случаях, когда в момент наблюдения в K-системе нормаль, проходящая через пробный заряд, будет пересекать проводник не в средней точке, заряд проводника будет определяться величиной

$$Q = -j_- V_1 \neq 0.$$

---

*/ Выводя их, мы учли, что в K-системе $\rho_+ = -\rho_-$, а $j'_- = 0$.

Литература

1. Р.Фейнман, Р.Лейтон, М.Сэндс. Фейнмановские лекции по физике. т. У, "Мир", М /1966/, гл. 13, §6, стр. 266.
2. В.Паули. Теория относительности, ГИТТЛ, М.-Л. /1947/. а/ §19, стр. 84; б/ §44, стр. 191.
3. Р.Беккер. Теория электричества. т. II, ГИТТЛ, М.-Л. /1941/, §66, стр. 345.

Рукопись поступила в издательский отдел 8 сентября 1972 года.