СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 6709

В.Н. Стрельцов

ДЛИНА В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1972

P2 - 6709

В.Н. Стрельцов

ДЛИНА В СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ *

* В порядке обсуждения

§1. *Об общепринятом определении понятия длины движущегося стержня*

Как известно, преобразования Лоренца

$$x' = \frac{x - \beta c t}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t' = \frac{t - (\beta/c)x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \qquad /1/$$

описывают соотношения между координатами одного и того же события с точки зрения двух различных систем отсчета, движущихся с достаточно большой скоростью $/v = \beta c/$ друг относительно друга. Или, может быть точнее, здесь следует говорить о разностях координат пары событий.

Таким образом, можно считать, что указанные преобразования /1/ определяют закон изменения расстояния между парой событий /или длины некоторого стержня, уложенного между точками, в которых происходят данные события/ и временного интервала между ними при переходе от одной системы отсчета к другой. Иначе это означает, что преобразования Лоренца описывают, в частности, поведение масштабов и часов, движущихся с достаточно большими скоростями.

С другой стороны, в случае достаточно малых скоростей движения поведение отмеченных объектов должно определяться преобразованиями Галилея:

$$x' = x - vt, \quad t' = t. \qquad /2/$$

Но коль скоро переход от преобразований Лоренца к преобразованиям Галилея связан с необходимым выполнением следующего специального условия /1/ :

$$x \ll ct\,, \qquad /3/$$

то вводимые в релятивистском случае понятия /скажем, длины движущегося стержня/ не должны противоречить этому условию, если только в измерительной процедуре, на которой базируется вводимое понятие, не используются непосредственно световые сигналы. А так как согласно общепринятому определению длиной движущегося стержня называется расстояние между одновременными положениями его концов $(\Delta x = \ell,\ \Delta t = 0)$, то в соответствии с предыдущим утверждением мы вынуждены поставить под сомнение правомерность указанного определения *.

Следующие ниже рассуждения призваны подкрепить сделанный вывод.

§2. Об измерении длины движущегося стержня с помощью часов и световых сигналов

1. Как было показано ранее /3/, использование общепринятого определения понятия длины движущегося масштаба приводит к трудностям при рассмотрении "мысленного" эксперимента /см., например, /4/ / по распространению света вдоль движущегося /в направлении оси OX / стержня.

При этом оказывается, что если световой сигнал был испущен из точки l / x =О, t =О//см. рис. 1/, причем точка S_1 характеризуется ** координатами $S\,(\ell, 0)$, то точка S_2 должна определяться тогда /в момент прихода туда светового сигнала/ следующими координатами:

$$S_2\ \left[\frac{\ell}{1-\beta}\left(1-\frac{\beta^2}{1+\beta}\right),\ \frac{\ell}{c}\,\frac{1}{1-\beta^2}\right], \qquad /4/$$

* По этому поводу см. также /2/ .

** В соответствии с общепринятым определением понятия длины движущегося стержня.

где $v\ (=\beta c)$ - скорость движения стержня в K-системе. Здесь мы дважды воспользовались преобразованиями Лоренца: сначала для перехода к K^{o}-системе и рассмотрения там процесса распространения света из O_0 в S и последующего обратного перехода от K^{o}- к K-системе.

Используя /4/, можно найти далее, что скорость распространения света как частное от деления пути $I.\ S_2$, пройденного светом, на время t_{IS_2} прохождения этого пути в K-системе будет определяться величиной:

$$V_{\text{света}} = \frac{IS_2}{t_{IS_2}} = c\,[1 + \beta(1-\beta)]. \qquad /5/$$

По аналогии с этим для скорости движения правого конца стержня будем иметь:

$$V = \frac{S_1 S_2}{t_{S_1 S_2}} = v(1-\beta). \qquad /6/$$

Таким образом мы получили парадоксальный результат, согласно которому свет от точки I к точке S_2 в K-системе двигался со скоростью, превышающей c.

Чтобы устранить возникшую трудность, у нас, по-видимому, нет иного выхода, как только отказаться от общепринятого определения понятия длины движущегося стержня, существенно использованного /наряду с формулами Лоренца/ при рассмотрении данного "мысленного опыта".

2. Трудностей, подобных отмеченной, вообще можно избежать, если опираться на другое определение понятия длины движущегося стержня, основанное на использовании часов и световых сигналов. Измерительная процедура в этом случае может базироваться, например, на классических методах Физо или Араго-Фуко, в которых часами служит вращающиеся зубчатое колесо или зеркало, соответственно. При этом скорость света мы будем считать заданной величиной. Кроме того, здесь можно пользоваться также методом радиолокации.

Итак, будем называть длиной движущегося в системе K стержня полусумму расстояний, пройденных светом от левого конца стержня /т. I / до правого /т. S_2 / и обратно к левому концу стержня /т. I_2 /:

$$\ell = \frac{1}{2}(l S_2 + S_2 l_2). \qquad /7/$$

Воспользовавшись далее преобразованиями Лоренца, найдем, что

$$\ell = \frac{\ell_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad /8/$$

где ℓ_0 - длина данного стержня в покое.

Таким образом, с точки зрения рассматриваемого определения будет происходить удлинение, а не сокращение масштаба в результате движения.

С учетом того, что фронт сферической волны, испущенной, скажем, из начала координат в K^0 -системе, по наблюдениям из K -системы будет иметь форму эллипсоида вращения, вытянутого вдоль оси OX с полуосями $OY = OZ = \ell$ и $OX = \ell_0 (1-\beta^2)^{-1/2}$ для длины стержня, произвольно ориентированного относительно оси OX, вместо формулы /8/ будем иметь

$$\ell = \frac{\ell_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \sqrt{1 \quad \frac{(1-\beta^2)\beta^2 \sin^2\theta}{(1-\beta\cos\theta)^2}}.$$

Здесь θ - угол между направлением посылаемого светового сигнала и осью OX.

3. В заключение данного параграфа остановимся на одном вопросе общего характера, непосредственно касающегося предыдущего рассмотрения.

Подчеркнем для этого, что обычно для того, чтобы получить заключение о поведении масштабов в релятивистском случае используют формулы преобразования Лоренца, в которых налагают определенные требования на временную координату /в соответствии с тем или иным определением длины/.

Однако здесь надо учитывать то, что уже на более раннем этапе построения рассматриваемой теории - при выводе преобразований Лоренца из основных постулатов специальной теории относительности, фактически уже вводится определение понятия расстояния с точки зрения различных систем отсчета, в частности, включающее в себя, очевидно, и определение понятия длины движущегося стержня.

Действительно, когда мы полагаем, что при переходе от одной системы отсчета к другой уравнения распространения света /туда и обратно / должны иметь вид:

$$x' - ct' = h(x - ct),$$

$$x' + ct' = \mu(x + ct), \quad *$$

то мы фактически определяем координату некоторой точки $X'(X)$ как расстояние, пройденное светом от начала координат до отмеченной точки.

Но последнее определение, очевидно, представляет собою не что иное, как рассмотренное выше другое определение понятия длины, базирующееся на использовании часов и световых сигналов.

В связи с изложенным, использование последнего определения вместо общепринятого следует считать более последовательным шагом.

В пользу этого говорит и тот факт, что в рамках общей теории относительности пространственное расстояние вообще можно определить только с помощью посылки световых сигналов ** /см., например /5/ /.

§3. Парадокс транспортера

Ниже в качестве иллюстрации мы обсудим так называемый парадокс транспортера /6/, возникающий при использовании общепринятого определения длины движущегося масштаба, но успешно разрешаемый в рамках второго определения.

Рассмотрим для этого транспортер /см. рис. 2/, шкивы которого A и B укреплены на твердой станине, а расстояние между ними составляет L_{AB}. При этом L_{AB} достаточно велико по сравнению с диаметрами шкивов, так что в последующих рассуждениях отмеченные /малые/ величины можно не принимать во внимание.

---

* Здесь h и μ - пока неизвестные координаты, которые определяются впоследствии на основании принципа относительности и условия того, что точка с фиксированной координатой (X') движется со скоростью v.

** Это обусловлено, в частности, тем, что в гравитационном поле собственное время в разных точках пространства различным образом связано с координатой ct.

Пусть далее лента транспортера приведена в движение с достаточно большой скоростью v . Тогда, казалось бы, согласно общепринятому определению длины движущегося масштаба должно произойти сокращение горизонтальных частей ленты и их длина должна составить

$$L = L_{AB} \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

В самом деле, можно представить себе, что в некоторый момент времени лента у шкивов A и B /одновременно/ рассекается на два отрезка, которые затем будут продолжать двигаться со скоростями v и $-v$ вдоль направления AB. Но поскольку их длины в покое составляют L_{AB} , то в результате движения они должны сократиться до величины L .

Однако, с другой стороны, рассматриваемые длины должны быть равны расстоянию между шкивами, которое, очевидно, не меняется после приведения шкивов во вращение. Таким образом, мы пришли к парадоксу.

Отметим сразу, что указанный парадокс является прямым следствием использования общепринятого определения понятия длины движущегося масштаба как расстояния между одновременными положениями его концов.

В то же время использование процедуры измерения длины движущегося стержня с помощью часов и световых сигналов не приводит ни к какому парадоксу.

Чтобы измерить длину движущейся ленты в этом случае пошлем из точки А /оставив на ленте метку 3/ в B световой сигнал /вдоль нижнего участка ленты/, который, отразившись от B /оставив на ленте метку 2/ и возвратившись к метке 3, позволит нам определить расстояние между метками 3 и 2. Затем засечем время выхода из А того светового сигнала, который придет в B тогда, когда там будет метка 2. В результате мы измерим расстояние между метками 2 и 1 и т.д. Оказывается, например, что при скорости v =0,5 с для измерения длины движущейся ленты необходимо провести ровно три измерения /см. Приложение/. При этом будем иметь, что $L_{23} = L_{12} = L_{31}$, а сумма этих величин составит

$$L_{32} + L_{21} + L_{31} = 2L \quad ,$$

т.е. будет равна, как того и требует логика вещей, удвоенному расстоянию между шкивами.

Дополнение

Следует отметить, что введенная Г. Кавалери и Г. Сальгарелли /7/ /см. также /8/ / при рассмотрении вопросов динамики протяженных тел так называемая асинхронная формулировка, предполагающая одновременные измерения в собственной системе отсчета, в какой-то мере подкрепляет полученные выше доводы. Действительно, в рамках отмеченной формулировки также происходит удлинение масштабов в результате движения.

Приложение

Легко видеть, что путь, пройденный светом от т. A /метка 2/ до т. B /метка 3/, в точности равен L_{AB} . С точки зрения системы отсчета K', движущейся со скоростью v вдоль направления AB, этот путь составляет

$$L_0 = L_{AB}\sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}}.$$

Тогда расстояние L_{23} как полусумма расстояний, пройденных светом от метки 3 до метки 2 и обратно к метке 3 * , определяется величиной:

$$L_{23} = \frac{L_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{L_{AB}}{1 + v/c}.$$

Отсюда легко видеть, что при $v/c = 0{,}5$ $L_{23} = L_{AB} / 1{,}5 = 2L_{AB}/3$, т.е. действительно равно одной трети от полной длины ленты.

---

* Очевидно, что в момент возвращения светового сигнала к метке 3 она будет занимать промежуточное положение между точками A и B.

Литература

1. В.Н. Стрельцов. Сообщения ОИЯИ, Р2-5131 и Р2-5313, Дубна, 1970.
2. В.Н. Стрельцов. Сообщения ОИЯИ, Р2-3482, Дубна, 1967 и Р2-5555, Дубна, 1971.
3. В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-5626, Дубна, 1971.
4. В.А. Угаров. Специальная теория относительности, изд. "Наука", М., 1969, стр. 48.
5. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория поля, ГИФМЛ, М., 1960, стр. 284.
6. Ю.И. Соколовский. Теория относительности в элементарном изложении, "Наука", М., 1964, стр. 25.
7. G.Cavalleri, G.Salgarelli. Nuovo Cim., 67, 722, 1969.
8. S.Aranoff. Nuovo Cim., 10B, 155, 1972.

Рукопись поступила в издательский отдел
8 сентября 1972 года.

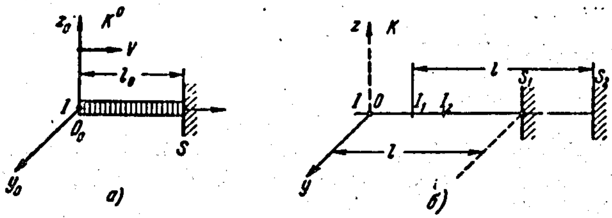

Рис. 1

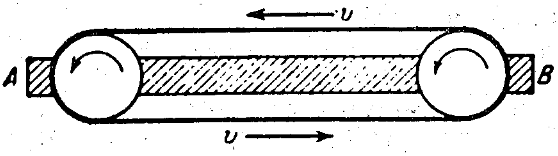

Рис. 2