СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6698

Э. Вицорек, В.А. Матвеев, Д. Робашик

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ ИНВАРИАНТНЫХ ФОРМ-ФАКТОРОВ В ПРИБЛИЖЕНИИ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

Р2 - 6698

Э. Вицорек, В.А. Матвеев, Д. Робашик

ВЫЧИСЛЕНИЕ ВЕСОВЫХ ФУНКЦИЙ ИНВАРИАНТНЫХ ФОРМ-ФАКТОРОВ В ПРИБЛИЖЕНИИ СВОБОДНЫХ ПОЛЕЙ

I. Введение

В недавней работе Н.Н.Боголюбова, В.С.Владимирова и А.Н.Тавхелидзе (БВТ) [I] авторы исследовали глубоко неупругого рассеяние электронов на нуклонах в рамках локальной квантовой теории поля, используя представление Йоста-Лемана-Дайсона.

Ниже мы хотим дать точное рассмотрение для случая свободных полей. А именно, мы изучим весовые функции, соответствующие форм-факторам в разложении величины

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{8\pi}\sum_{(\sigma)}\int \langle p\sigma|[j_\mu(x), j_\nu(0)]|p\sigma\rangle e^{iqx}dx \quad ,$$

где ток $j_\mu(x)$ определен выражением

$$j_\mu(x) = \bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x) ,$$

причем $\Psi(x)$ есть свободное поле частицы со спином I/2.

2. Определения

Из усредненного по спину тензора $W_{\mu\nu}$ можно сконструировать две инвариантные функции

$$F_1(q,p) = p^\mu p^\nu W_{\mu\nu} \quad ,$$

$$F_2(q,p) = F_1(q,p) - W_\mu{}^\mu \quad ,$$

являющиеся по определению причинными.

С другой стороны, можно использовать обычные разложения тензора

$$W_{\mu\nu} = \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)W_1 + \left(p_\mu - \frac{qp}{q^2}q_\mu\right)\left(p_\nu - \frac{qp}{q^2}q_\nu\right)W_2$$

$$= (-g_{\mu\nu}q^2 + q_\mu q_\nu)V_1 + [p_\mu p_\nu q^2 - (p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu)qp + g_{\mu\nu}(qp)^2]V_2 .$$

Как показано в работе [1], форм-факторы V_1 и V_2, а следовательно, W_1 и W_2 являются причинными функциями. Соответствие между различными функциями в системе покоя ($p=(1,0,0,0)$) определяется соотношениями

$$F_1 = W_{00}, \quad F_2 = \sum_{i=1}^{3} W_{ii},$$

$$W_1 = -\frac{q_0^2}{2\mathbf{q}^2}F_1 + \frac{1}{2}F_2, \quad W_2 = \frac{q^2}{2\mathbf{q}^2}\left[\left(\frac{q_0^2}{\mathbf{q}^2} + 2\frac{q^2}{\mathbf{q}^2}\right)F_1 - F_2\right],$$

$$V_1 = \frac{1}{2\mathbf{q}^2}\left(\frac{3q_0^2}{\mathbf{q}^2}F_1 - F_2\right), \quad V_2 = V_1 - \frac{F_1}{\mathbf{q}^2},$$

$$F_1 = \frac{\mathbf{q}^2}{q^2}\left(W_1 + \frac{\mathbf{q}^2}{q^2}W_2\right), \quad F_2 = \left(3 + \frac{\mathbf{q}^2}{q^2}\right)W_1 + \frac{q_0^2\mathbf{q}^2}{(q^2)^2}W_2,$$

$$V_1 = \frac{1}{\mathbf{q}^2}\left(W_1 + \frac{q_0^2}{q^2}W_2\right), \quad V_2 = \frac{W_2}{q^2},$$

$$F_1 = q^2(V_1 - V_2), \quad F_2 = 3q_0^2(V_1 - V_2) - 2\mathbf{q}^2 V_1,$$

$$W_1 = q^2V_1 - q_0^2V_2, \quad W_2 = q^2V_2,$$

$$q^\mu = (q^0, q^1, q^2, q^3), \quad \mathbf{q} = (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)^{\frac{1}{2}},$$

Все эти функции имеют свойства

$$F(q) = -F(-q), \qquad \tilde{F}(x) = 0 \text{ если } x^2 < 0,$$

$$F(q) = 0, \text{ если } \frac{-q^2}{|2q_0|} > 1,$$

$$F(q) = F(q_0, \mathbf{q}),$$

так что для них существует единственное представление Йоста-Лемана-Дайсона [2]

$$F(q) = \int \varepsilon(q^0)\,\delta(q^{0\,2} - (\vec{q} - \vec{u})^2 - \lambda^2)\,\Psi(\vec{u}, \lambda^2)\,d\vec{u}\,d\lambda^2 ,$$

где носитель функции Ψ сосредоточен на множестве

$$(\vec{u}, \lambda^2) : \quad |\vec{u}| \le 1 , \quad \lambda^2 \ge (1 - \sqrt{1 - \vec{u}^2})^2 .$$

Известно, что весовая функция Ψ может быть найдена с помощью Фурье-образа $\tilde{F}(x)$ функции $F(q)$ по формуле:

$$\Psi(\vec{u}, \lambda^2) = \frac{i}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \left[\theta(\lambda^2) \int_0^\infty d\kappa^2\, J_0(\kappa\lambda) \int d\vec{\eta}\, e^{-i\vec{\eta}\vec{u}} \cdot \phi(\vec{\eta}, \kappa^2) \right] ,$$

$$\phi(\vec{\eta}, \kappa^2) = \mathfrak{F}(\kappa^2 + \vec{\eta}^2, \vec{\eta}) , \quad \mathfrak{F}(x_0^2, \vec{x}) = \varepsilon(x^0)\,\tilde{F}(x) .$$

3. Весовые функции форм-факторов F_1, F_2

Найдем весовые функции для форм-факторов F_1 и F_2 в приближении свободных полей[I]. Представим

$$F_1(q) = 2F(q) + F^*(q) , \quad F_2(q) = 3F^*(q) ,$$

где

$$F(q) = \varepsilon(q^0+1)\,\delta[(q_0+1)^2 - q^2 - 1] + \varepsilon(q^0-1)\,\delta[(q_0-1)^2 - q^2 - 1] ,$$

$$F^*(q) = q_0\,\varepsilon(q_0+1)\,\delta[(q_0+1)^2 - q^2 - 1] - q_0\,\varepsilon(q_0-1)\,\delta[(q_0-1)^2 - q^2 - 1] ,$$

причем мы отбросили вклады так называемых несвязанных диаграмм.

Вычислим вначале весовые функции величин $F_{(q)}$ и $F^*_{(q)}$. Используя метод Йоста-Лемана, найдем фурье-образы величин $F_{(q)}$ и $F^*_{(q)}$

$$\tilde{F}_{(x)} = -\frac{i}{\pi} \cos x_0 \mathcal{D}(x,1) \quad ,$$

$$\tilde{F}^*_{(x)} = -\frac{i}{\pi} \frac{\partial}{\partial x_0} \left[\sin x_0 \mathcal{D}(x,1) \right] \quad .$$

Используя формулу

$$\mathcal{D}(x,\lambda^2) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int e^{-iqx} \varepsilon(q_0) \delta(q^2-\lambda^2)\, dq = \frac{1}{2\pi} \varepsilon(x_0) \frac{\partial}{\partial x^2} \left[\theta(x^2) J_0(\lambda \sqrt{x^2}) \right] ,$$

получим выражения для $\mathcal{F}(x_0^2, \vec{r})$, $\mathcal{F}^*(x_0^2, \vec{r})$, откуда окончательно найдем

$$\phi(\rho,\kappa^2) = -\frac{i}{2\pi^2} \cos\sqrt{\kappa^2+\rho^2}\, \frac{\partial}{\partial \kappa^2} \left[\theta(\kappa^2) J_0(\kappa) \right] ,$$

$$\phi^*(\rho,\kappa^2) = \phi(\rho,\kappa) - \frac{i}{\pi^2} \sqrt{\kappa^2+\rho^2} \sin\sqrt{\kappa^2+\rho^2}\, \frac{\partial^2}{\partial {\kappa^2}^2} \left[\theta(\kappa^2) J_0(\kappa) \right] .$$

Обе функции здесь зависят только от $|\vec{\eta}| = \rho$, так что интегрирование по углам может быть выполнено тривиально, и мы получим

$$\Psi(r,\lambda^2) = \frac{2i}{r} \frac{\partial}{\partial \lambda^2} \left[\theta(\lambda^2) \int_0^\infty d\kappa^2 J_0(\kappa\lambda) \int \rho\, d\rho \sin r\rho\; \phi(\rho,\kappa^2) \right] ,$$

$$|\vec{u}| = r \quad .$$

В первом случае имеем

$$\Psi(r,\lambda^2) = \frac{1}{\pi^2 r}\frac{\partial}{\partial\lambda^2}\Big\{\theta(\lambda^2)\int_0^\infty dk^2\, J_0(k\lambda)\frac{\partial}{\partial k^2}\left[\theta(k^2)J_0(k)\right]\times$$

$$\times\int_0^\infty \rho\, d\rho\, \sin r\rho \cos\sqrt{k^2+\rho^2}\Big\} .$$

Используя (Рыжик, Градштейн , 3.876.I)

$$\int_0^\infty \sin r\rho \cos\sqrt{k^2+\rho^2}\,\rho\, d\rho = \frac{\partial^2}{\partial r\partial\xi}\int_0^\infty \sin\left(\xi\sqrt{k^2+\rho^2}\right)\frac{\cos r\rho}{\sqrt{k^2+\rho^2}}\,d\rho\Big|_{\xi=1}$$

$$= -\frac{\partial^2}{\partial r\partial\xi}\left[\frac{\pi}{2}\theta(\xi-r)J_0\left(k\sqrt{\xi^2-r^2}\right)\right]_{\xi=1} = \pi\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r^2}\left[\theta(1-r^2)J_0\left(k\sqrt{1-r^2}\right)\right].$$

получим

$$\Psi(r,\lambda^2) = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^2\left(\theta(1-r^2)\frac{\partial}{\partial\lambda^2}\Big\{\theta(\lambda^2)\int_0^\infty dk^2\,J_0(k\lambda)J_0\left(k\sqrt{1-r^2}\right)\frac{\partial}{\partial k^2}\left[\theta(k^2)J_0(k)\right]\Big\}\right)$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^2\Big\{\theta(1-r^2)\Big[\delta(\lambda^2)-\delta(\lambda^2)\int_0^\infty dk\,J_0\left(k\sqrt{1-r^2}\right)J_1(k)$$

$$-\theta(\lambda^2)\frac{\partial}{\partial\lambda^2}\int_0^\infty dk\,J_0(k\lambda)J_0\left(k\sqrt{1-r^2}\right)J_1(k)\Big]\Big\} .$$

Учитывая, что (Градштейн, Рыжик, 6,578.3.4)

$$\int_0^\infty dk\,J_0\left(k\sqrt{1-r^2}\right)J_1(k) = 1 ,$$

$$\int_0^\infty dk\,J_0(k\lambda)J_0\left(k\sqrt{1-r^2}\right)J_1(k) = \chi(r,\lambda^2) = \begin{cases} 0 , & \lambda^2 > \left(1+\sqrt{1-r^2}\right)^2 \\ 1 , & \lambda^2 < \left(1-\sqrt{1-r^2}\right)^2 \end{cases} ,$$

найдем

$$\Psi(r,\lambda^2) = -\frac{2}{\pi}\,\theta(\lambda^2)\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^2\frac{\partial}{\partial\lambda^2}\left[\theta(1-r^2)\,\chi(r^2,\lambda^2)\right] .$$

Во втором случае

$$\Psi^*(r,\lambda^2) = \Psi(r,\lambda^2) + \frac{2}{\pi^2 r}\frac{\partial}{\partial\lambda^2}\Big[\theta(\lambda^2)\int_0^\infty dk^2 J_0(k\lambda) \times$$

$$\times\left(\frac{\partial}{\partial k^2}\right)^2[\theta(k^2)J_0(k)]\int_0^\infty \rho\, d\rho \sin r\rho \sqrt{k^2+\rho^2}\sin\sqrt{k^2+\rho^2}\Big] .$$

Используя

$$\int_0^\infty \sin r\rho \sqrt{k^2+\rho^2}\sin\sqrt{k^2+\rho^2}\,\rho\, d\rho = \frac{\partial^3}{\partial r\partial\xi^2}\int_0^\infty \sin(\xi\sqrt{k^2+\rho^2})\frac{\cos r\rho}{\sqrt{k^2+\rho^2}}d\rho\Big|_{\xi=1} =$$

$$= \frac{\partial^3}{\partial r\partial\xi^2}\Big[\frac{\pi}{2}\theta(\xi-r)J_0(k\sqrt{\xi^2-r^2})\Big]\Big|_{\xi=1} =$$

$$= 2\pi\frac{\partial^2}{\partial r\partial r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r^2}-\frac{1}{2}\right)\Big[\theta(1-r)J_0(k\sqrt{1-r^2})\Big],$$

мы находим

$$\Psi^*(r,\lambda^2) = \Psi(r,\lambda^2) + \frac{8}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial r^2}-\frac{1}{2}\right)\Big(\theta(1-r^2)\frac{\partial}{\partial\lambda^2}\Big\{\theta(\lambda^2)\times$$

$$\times\int_0^\infty dk^2 J_0(k\lambda)J_0(k\sqrt{1-r^2})\left(\frac{\partial^2}{\partial k^2{}^2}\right)[\theta(k^2)J_0(k)]\Big\}\Big) .$$

Производя дифференцирование по λ^2 и после интегрирования по частям, мы можем записать

$$\Psi^*(r,\lambda^2) = \Psi(r,\lambda^2) + \frac{8}{\pi}\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial r^2}-\frac{1}{2}\right)\Big\{\theta(1-r^2)\Big[\delta(\lambda^2)\frac{\lambda^2-r^2}{4}+\frac{\theta(\lambda^2)}{4}+$$

$$+\delta(\lambda^2)\int_0^\infty dk^2 J_1(k\sqrt{1-r^2})\left(\frac{\partial}{\partial k^2}\right)^2 J_1(k) + \theta(\lambda^2)\frac{\partial}{\partial\lambda^2}\int_0^\infty dk^2 J_0(k\lambda)\times$$

$$\times J_0(k\sqrt{1-r^2})\left(\frac{\partial}{\partial k^2}\right)^2 J_0(k)\Big]\Big\} .$$

С помощью

$$4\int_0^\infty dk^2 J_0(k\lambda)J_0(k\sqrt{1-r^2})\left(\frac{\partial}{\partial k^2}\right)^2 J_0(k) = 1 - X^*(r^2,\lambda^2) ,$$

$$X^*(r^2,\lambda^2) = 2\lambda\int_0^\infty J_1(k\lambda)J_1(k\sqrt{1-r^2})J_1(k)\frac{dk}{k} + 2\sqrt{1-r^2}\int_0^\infty J_0(k\lambda)J_1(k\sqrt{1-r^2})J_1(k)\frac{dk}{k} =$$

$$= \begin{cases} 1-r^2-\lambda^2 & \lambda^2 < (1-\sqrt{1-r^2})^2 \\ 1 & \lambda^2 > (1+\sqrt{1-r^2})^2 \end{cases} ,$$

найдем

$$\Psi^*(r,\lambda^2) = \Psi(r,\lambda^2) + \Psi_0(r,\lambda^2)$$

$$\Psi_0(r,\lambda^2) = \frac{2}{\pi}\,\theta(\lambda^2)\left(\frac{\partial}{\partial r^2}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial r^2}-\frac{1}{2}\right)\left\{\theta(1-r^2)\left(1-\frac{\partial}{\partial\lambda^2}X^*(r^2,\lambda^2)\right)\right\} .$$

Наконец, весовые функции, соответствующие форм-факторам F_1 и F_2,

$$\Psi_{F_1} = 3\,\Psi(r,\lambda^2) + \Psi_0(r,\lambda^2) ,$$

$$\Psi_{F_2} = 3\,\Psi(r,\lambda^2) + 3\,\Psi_0(r,\lambda^2) .$$

Они обладают свойствами

$$\Psi_{F_1}(r,\lambda^2) = 0 , \quad \text{если} \quad \lambda^2 < (1-\sqrt{1-r^2})^2$$

и

$$\Psi_{F_1}(r,\lambda^2) = -\frac{2}{\pi}\left[\delta''(1-r^2) + \frac{1}{2}\delta'(1-r^2)\right] , \quad \text{если} \quad \lambda^2 > 4 .$$

$$\Psi_{F_2}(r,\lambda^2) = -\frac{6}{\pi}\left[\delta''(1-r^2) + \frac{1}{2}\delta'(1-r^2)\right] ,$$

4. Весовые функции для V_1 и V_2

Точные вычисления форм-факторов V_1, V_2 с помощью формул

$$V_1 = \frac{1}{2q^2}\left(\frac{3q_0^2}{q^2}F_1 - F_2\right) , \qquad V_2 = V_1 - \frac{F_1}{q^2}$$

для случая свободных полей дают

$$V_1(q) = 0\ ,$$

$$V_2(q) = -\left[\varepsilon(q_0+1)\,\delta((q_0+1)^2-q^2-1)\,\frac{q^0+2}{q^2} - \varepsilon(q_0-1)\,\delta((q_0-1)^2-q^2-1)\,\frac{q^0-2}{q^2}\right].$$

Чтобы использовать метод Йоста-Лемана , необходимо найти Фурье-образы этих форм-факторов, которыемогут быть представлены в виде:

$$\tilde{V}_1(x) = 0\ ,$$

$$\tilde{V}_2(x) = \frac{2}{(2\pi)^4}\left[\sin x_0 \frac{\partial A}{\partial x_0} - \cos x_0\, A(x)\right],$$

где

$$A(x) = \int d^4k\, e^{-ikx}\,\varepsilon(k_0)\,\delta(k^2-1)\,\frac{1}{|\vec{k}|^2}$$

$$= -\frac{2\pi^2 i}{r}\left[\varepsilon(x^0)\,\theta(x^2)\int_0^r J_0(\sqrt{x_0^2-a^2})\,da + \varepsilon(x^0)\,\theta(-x^2)\sin|x_0|\right].$$

Окончательноевыражение для $\tilde{V}_2(x)$ имеет вид:

$$\tilde{V}_2(x) = \frac{i}{4\pi^2 r}\,\varepsilon(x^0)\,\theta(x^2)\left[\cos x^0\int_0^r J_0(\sqrt{x_0^2-a^2})\,da + \sin x_0 \int_0^r \frac{J_1(\sqrt{x_0^2-a^2})}{\sqrt{x_0^2-a^2}}\,da\, x_0\right].$$

Соответствующие функции $\phi(\rho,\kappa^2)$ есть

$$\phi(\rho,\kappa^2) = \frac{i}{4\pi^2\rho}\,\theta(\kappa^2)\Big[\cos\sqrt{\kappa^2+\rho^2}\int_0^\rho J_0(\sqrt{\rho^2+\kappa^2-a^2})\,da$$

$$+ \sin\sqrt{\kappa^2+\rho^2}\cdot\sqrt{\kappa^2+\rho^2}\int_0^\rho \frac{J_1(\sqrt{\kappa^2+\rho^2-a^2})}{\sqrt{\kappa^2+\rho^2-a^2}}\,da\Big],$$

что ведет к окончательному выражению для весовой функции форм-фактора

$$\Psi_{V_2}(r,\lambda^2) = \frac{\partial}{\partial\lambda^2}\left[\theta(\lambda^2)\int_0^\infty d\kappa^2\, J_0(\kappa\lambda)\, f(\kappa,r)\right],$$

$$f(k,r) = -\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{r}\int_0^\infty \rho\, d\rho \sin r\rho \Big[\frac{1}{\rho}\cos\sqrt{k^2+\rho^2}\int_0^\rho J_0\big(\sqrt{k^2+\rho^2-a^2}\big)\, da$$

$$+ \frac{\sqrt{k^2+\rho^2}}{\rho}\sin\sqrt{k^2+\rho^2}\int_0^\rho \frac{J_0\big(\sqrt{k^2+\rho^2-a^2}\big)}{\sqrt{k^2+\rho^2-a^2}}\, da \Big].$$

Дальнейшие вычисления становятся значительно более сложными.

Как было показано в работе [I], существенную роль для автомодельного асимптотического поведения и характера сингулярностей коммутатора токов вблизи светового конуса играет поведение весовых функций при больших λ^2.

Если

$$\Psi(r,\lambda^2) \underset{\lambda\to\infty}{\sim} \lambda^{2k}\Psi_0(r), \qquad k > -1,$$

тогда

$$F(q) \underset{\substack{\nu\to\infty \\ \xi\ \mathrm{fix}}}{\sim} \nu^k F(\xi), \qquad \xi = -\frac{q^2}{\nu}, \quad \nu = 2q\cdot p,$$

либо, если s -ая первообразная $\Psi(u,\lambda^2)$ по отношению к λ^2 существует и интегрируема на $(0,\infty)$, тогда имеем

$$F(q) \underset{\substack{\nu\to\infty \\ \xi\ \mathrm{fix}}}{\sim} \frac{1}{\nu^{s+1}} F(\xi).$$

В соответствии с этой теоремой весовые функции Ψ_{F_i} имеют в качестве асимптотического предела константы. Форм-фактор

V_2 в случае свободных полей убывает как $\frac{1}{V^2}$,так что следует ожидать существования и интегрируемости первой первообразной Ψ_{V_2}.

Сейчас мы рассмотрим асимптотическое поведение Ψ_{V_2}. Для этого мы изучим поведение

$$g(r,\lambda^2) = \int_0^\infty dk^2\, J_0(k\lambda)\, f(k^2,r) \quad .$$

С помощью интегрального представления для J_0 мы запишем

$$g(r,\lambda^2) = \pi \int_0^\infty dk^2 \int_{-1}^{+1} dt \, \frac{f(k^2,r)}{\sqrt{1-t^2}}\, e^{ik\lambda t}$$

$$= \pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau\, e^{i\lambda\tau} \int_{\tau^2}^{\infty} dk^2 \, \frac{f(k^2,r)}{\sqrt{k^2-\tau^2}} \quad .$$

Здесь интеграл по k^2 определяет целую функцию первого порядка по переменной τ (см.Приложение). Как хорошо известно, Фурье-преобразование такой целой функции имеет конечный носитель (Гельфанд, Шилов, II)/3/. То же справедливо для

$$\Psi_{V_2} = \frac{\partial}{\partial\lambda^2}\left\{\theta(\lambda)\, g(r,\lambda^2)\right\} \quad .$$

Первая первообразная Ψ_{V_2} есть просто

$$\Psi_{(1)}(r,\lambda^2) = \int_{0_-}^{\lambda^2} d\lambda'^2\, \Psi_{V_2}(r,\lambda'^2) = g\,(r,\lambda^2) \quad .$$

Следовательно, первообразная имеет также конечный носитель. Отсюда следует, что весовая функция Ψ_{V_2}, определенная как производная g, не может быть знакоопределенной.

Согласно работе [I], масштабная функция определена выражением:

$$V_2(\xi) = \Psi_0(\xi) - \int_{0_-}^{\infty} d\lambda^2\, \Psi_{(1)}(\xi,\lambda^2) \quad .$$

Далее

$$V_2(\xi) = \int_0^\infty d\lambda^2\, g(\xi,\lambda^2) = \int_0^\infty d\lambda^2 \int_0^\infty d\kappa^2\, J_0(\kappa\lambda)\, f(\kappa^2,\xi) \quad .$$

Используя

$$\int_0^\infty d\lambda^2\, J_0(\kappa\lambda) = \lim_{\alpha\to 0} \frac{2\alpha}{(\alpha^2+\kappa^2)^{3/2}}$$

и

$$\lim_{\alpha\to 0_+} \left\{ \alpha \int_0^\infty dt\, G(t)\, \frac{1}{(\alpha^2+t)^{3/2}} \right\} = 2\,G(0) \quad ,$$

мы получим

$$V_2(\xi) = \lim_{\alpha\to 0_+} \left\{ 2\alpha \int_0^\infty d\kappa^2\, f(\kappa^2,\xi)\, \frac{1}{(\alpha^2+\kappa^2)^{3/2}} \right\} = 4\, f(0,\xi)$$

$$= -\frac{2}{\pi^2} \int_0^\infty d\rho\, \frac{\sin \xi\rho}{\xi} \left[\cos\rho \int_0^\rho da\, J_0(\sqrt{\rho^2-a^2}) + \rho\sin\rho \int_0^\rho \frac{J_1(\sqrt{\rho^2-a^2})}{\sqrt{\rho^2-a^2}}\, da \right.,$$

где

$$\int_0^{\rho} da\, J_0(\sqrt{\rho^2-a^2}) = \sin\rho \quad , \quad \rho\int_0^{\rho} da\, \frac{J_1(\sqrt{\rho^2-a^2})}{\sqrt{\rho^2-a^2}} = 1-\cos\rho \ .$$

Окончательно имеем

$$V_2(\xi) = -\frac{2}{\pi^2}\frac{1}{\xi}\int_0^{\infty} d\rho\, \sin\xi\rho\, \sin\rho = \frac{2}{\pi^2}\frac{1}{\xi}\left[\frac{\partial}{\partial\eta}\int_0^{\infty} d\rho\, \frac{\sin\xi\rho\cos\eta\rho}{\rho}\right]_{\eta=1}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\frac{1}{\xi}\left\{\delta(1-\xi)-\delta(1+\xi)\right\} .$$

Соотношение между масштабными функциями $V(\xi)$ и $F(\xi)$ согласно работе [I] есть

$$V_1(\xi) = \frac{1}{\pi\xi}\left(3F_1(\xi)-F_2(\xi)\right) \quad , \quad V_2(\xi) = \frac{1}{\pi\xi}\left(F_1(\xi)-F_2(\xi)\right) .$$

Полученные выше результаты согласуются с этими соотношениями (Приложение П). Авторы благодарят А.Н. Тавхелидзе за внимание к работе и многочисленные обсуждения.

Приложение I

Вместо изучения интеграла

$$\int_{\tau^2}^{\infty} dk^2\, \frac{f(k^2,r)}{\sqrt{k^2-\tau^2}} \ .$$

более удобно использовать свойство этой величины как обобщенной функции по переменной r и рассмотреть интегрированное распределение с симметричной функцией $\varphi(r)$ из пространства Z :

$$J(\tau) = \int_0^\infty r^2 dr \int_{\tau^2}^\infty dk^2 \frac{\varphi(r) f(k^2, r)}{\sqrt{k^2-\tau^2}} .$$

Так как

$$\int_0^\infty dr\, r^2 \frac{\sin r\rho}{r} \varphi(r) = \frac{\rho}{4\pi} \tilde{\varphi}(\rho) ,$$

интегрирование по r дает Фурье-преобразование $\tilde{\varphi}(\rho)$, которое соответствует пространству K (см.Гельфанд, Шилов), т.е. $\tilde{\varphi}(\rho)$ имеет конечный носитель

$$J(\tau) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{\tau^2}^\infty dk^2 \frac{1}{\sqrt{k^2-\tau^2}} \int_0^\infty d\rho\, \rho\, \tilde{\varphi}(\rho) \times$$

$$\times \left[\cos\sqrt{k^2+\rho^2} \int_0^\rho da\, J_0(\sqrt{k^2+\rho^2-a^2}) + \sqrt{k^2+\rho^2} \sin\sqrt{k^2+\rho^2} \int_0^\rho da \frac{J_1(\sqrt{k^2+\rho^2-a^2})}{\sqrt{k^2+\rho^2-a^2}}\right] .$$

Отметим, что интеграция как по переменной ρ , так и по переменной a распространяется на конечную область, так что интегралы имеют те же асимптотические свойства, что и подинтегральные выражения. Поэтому достаточно исследовать величины

$$\int_{\tau^2}^\infty dk^2 \frac{\cos\sqrt{k^2+\rho^2}}{\sqrt{k^2-\tau^2}} J_0(\sqrt{k^2+\rho^2-a^2})$$

и

$$\int_{\tau^2}^\infty dk^2 \sin\sqrt{k^2+\rho^2}\, \sqrt{k^2+\rho^2}\, \frac{J_1(\sqrt{k^2+\rho^2-a^2})}{\sqrt{k^2+\rho^2-a^2}} .$$

Сходимость, например, первого интеграла можно установить из представления

$$\int_0^\infty dx^2 \cos\sqrt{x^2+a^2}\, J_0(x)\left\{\frac{1}{x}+\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2-\rho^2-\tau^2}}-\frac{1}{x}\right)\right\},$$

откладывая интеграл по конечной области. Первая часть вычисляется согласно (Р.Г.6.737.I), тогда как вторая сходится абсолютно.

Сходимость интеграла для произвольной производной по τ^2 видна из

$$\left(\frac{\partial}{\partial\tau^2}\right)^n\int_{\tau^2}^\infty dk^2\,\frac{\cos\sqrt{k^2+\rho^2}\,J_0(\sqrt{k^2+\rho^2-a^2})}{\sqrt{k^2-\tau^2}}=\int_{\tau^2}^\infty dk^2\left(\frac{\partial}{\partial\rho^2}\right)^n\frac{\left(\cos\sqrt{k^2+\rho^2}\,J_0(\sqrt{k^2+\rho^2-a^2})\right)}{\sqrt{k^2-\tau^2}}.$$

Поэтому интеграл и все его производные по τ^2 существуют в каждом конечном интервале τ. Интеграл есть целая функция τ. Покажем, что она имеет порядок единицу. Чтобы установить это, запишем

$$\int_{\tau^2}^\infty dk^2\,\frac{\cos\sqrt{k^2+\rho^2}\,J_0(\sqrt{k^2+\rho^2-a^2})}{\sqrt{k^2-\tau^2}}=\int_{\tau^2}^0 dk^2\ldots+\int_0^\infty dk^2\ldots$$

Для $\tau^2\to\infty$ (не вдоль вещественной оси!) основной вклад дает первый интеграл от области $k^2\approx\tau^2$, который также порядка I.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Форм-факторы как функции переменных $\xi = -\frac{q^2}{2\nu}$, $\nu = 2qp$. Соотношения между форм-факторами в этих переменных есть

$$W_1 = -\frac{1}{2(1+\frac{4\xi}{\nu})} F_1 + \frac{1}{2} F_2 \;, \quad W_2 = \frac{1}{2(1+\frac{\nu}{4\xi})^2}\left[(2-\frac{\nu}{4\xi})F_1 + (1+\frac{\nu}{4\xi})F_2\right]$$

$$V_1 = \frac{2}{\nu^2(1+\frac{4\xi}{\nu})}\left(\frac{3}{1+\frac{4\xi}{\nu}}F_1 - F_2\right), \quad V_2 = V_1 - \frac{4F_1}{\nu^2(1+\frac{4\xi}{\nu})} .$$

Для случая свободных полей точные вычисления для форм-факторов дают $(\xi > 0,\ \nu > 0)$

$$F_1(\xi,\nu) = \frac{1}{2}(1+\frac{4}{\nu})\,\delta(1-\xi) \;, \quad F_2(\xi,\nu) = \frac{3}{2}\,\delta(1-\xi) \;,$$

$$W_1(\xi,\nu) = \frac{1}{2}\,\delta(1-\xi) \;, \quad W_2 = \frac{2}{\nu}\,\delta(1-\xi) \;,$$

$$V_1(\xi,\nu) = 0 \;, \quad V_2(\xi,\nu) = -\frac{2}{\nu^2}\,\delta(1-\xi) .$$

Автомодельные асимптотики определяются как

$$\lim_{\substack{\nu\to\infty \\ \xi\ \text{fix}}} F(\xi,\nu) = \nu^{\kappa} F(\xi) ,$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

I. N.N.Bogolubov, A.N.Tavkhelidze, V.S.Vladimirov, On Automodel Asymptotic in Quantum Field Theory, Препринт ОИЯИ, E2-6490, Дубна, 1972.

2. R.Jost, H. Lehmann. Nuovo Cimento, 5, 1598 (1957). F.J.Dyson, Phys.Rev. 110, 579 (1958).

3. И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов. Пространства основных и обобщенных функций, Физматгиз, Москва, 1958.

Рукопись поступила в издательский отдел 31 августа 1972 года.