СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 6694

В.Н.Стрельцов

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

К РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКЕ

1972

Р2 - 6694

В.Н.Стрельцов

К РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ТЕРМОДИНАМИКЕ

Стрельцов В.Н.

P2 - 6694

К релятивистской термодинамике

Обсуждаются некоторые вопросы, касающиеся вида тензора энергии-импульса для жидкости.

Приводятся соображения в пользу формул преобразования Отта /3/ для теплоты и температуры.

На основании требования инвариантности уравнения состояния идеального газа показано, что увеличение температуры газа в результате движения однозначно приводит к увеличению в движущейся системе отсчета объема, занимаемого газом.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1972

Streltsov V.N.

P2 - 6694

On Relativistic Thermodynamics

Some problems are discussed concerning the type of the energy-momentum tensor for liquid.

The reasons are presented in favour of the Ott /3/ transformation equations for heat and temperature.

Basing on the requirement about the invariance of the ideal gas state equation it was shown that the gas temperature increase (as a result of motion) leads uniquely to the increase of the gas volume in the moving frame.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1972

§1. Тензор энергии-импульса жидкости

Назовем, как обычно, давлением величину изменения импульса в единицу времени, действующего на нормальную к нему единичную площадку. В случае проекции импульса p_x мы будем иметь тогда, например, величину, зависящую от четырех индексов:

$$T_{xtyz}.$$

Коль скоро по закону Паскаля для жидкостей и газов давление одинаково по всем направлениям, то мы будем иметь, что для некоторой равновесной системы, представляющей собою жидкость или газ, заключенный в сосуд,

$$T_{xtyz} = T_{ytzx} = T_{ztxy}. \qquad /1/$$

Отметим при этом, что рассматриваемая величина антисимметрична, по крайней мере, относительно перестановок двух последних индексов, поскольку элемент площади определяется антисимметричным 4-тензором второго ранга.

Если далее мы учтем, что опять-таки в случае жидкостей и газов давление также может быть определено как плотность энергии в единице объема * /см., например, /1/ /, то в дополнение к /1/ получим

$$T_{xtyz} = -T_{txyz}. \qquad /2/$$

---

* При постоянной энтропии.

При этом также можно утверждать, что величина T_{ijkl} должна быть асимметрична, по крайней мере, по трем последним /тензорным/ индексам, поскольку, например, элемент пространственного объема является компонентой антисимметричного 4-тензора третьего ранга. Если допустить, что введенная таким образом величина T_{ijkl} представляет собою полностью антисимметричный тензор четвертого ранга, то мы немедленно придем к известному результату - давление инвариантно относительно преобразований Лоренца.

Вместе с тем, как и обычно, будем иметь, что компоненты $T_{\alpha 123}$, где $\alpha = 1,2,3$, описывающие плотность импульса, будут равны нулю как компоненты антисимметричного тензора с двумя одинаковыми индексами. По той же причине /в соответствии с известными фактами/ будут равны нулю и компоненты T_{4412}, T_{4423}, T_{4431}, выражающие собою количество энергии, протекающей в единицу времени через единицу поверхности. Более строгое рассмотрение, связанное с введением величины T_{ijkl}, приведено в Приложении.

В соответствии с вышесказанным для формул преобразования плотностей энергии и импульса будем, очевидно, иметь следующие выражения:

$$T_{4123} = T'_{4123} \qquad /3/$$

$$T_{1123} = T'_{1123} = 0\,; \quad T_{2123} = T'_{2123} = 0\,; \ \ldots \qquad /3\ /$$

в отличие от известных формул преобразований /см., например, [2]/.

Кроме того, можно получить выражение для полной энергии ΔE и полного импульса $\Delta\vec{G}$ некоторого элемента объема жидкости или газа, умножив для этого T_{4123} на соответствующий элемент пространственно-временного объема:

$$\Delta E = T_{4123}\,\Delta V_{123}\,, \qquad /4'/$$

$$\Delta G_x = T_{4123}\,\Delta V_{423}\,, \ldots \qquad /4''/$$

При этом следует отметить, что в отличие от общепринятого мнения в рамках рассматриваемого подхода величины $/\Delta\vec{G}, \frac{1}{c}\Delta E\,/$, согласно формулам /4/, образуют 4-вектор и будут преобразовываться по обычным формулам Лоренца для энергии-импульса при переходе к другой инерциальной системе отсчета.

§2. *О релятивистском преобразовании работы и теплоты*

Ниже мы остановимся на вопросе, касающемся релятивистских формул преобразования количества тепла и температуры, который в последнее время привлек к себе внимание в связи с работами Отта /3/ и Арцели /4/. Дело в том, что полученные в этих работах формулы преобразования существенно отличаются от формул, выведенных в свое время Планком и Хазенорлем /см., например, /2/ /.

Представим себе для этого некоторую равновесную термодинамическую систему в виде цилиндра с жидкостью, покоящуюся в инерциальной системе K°, причем, крышки цилиндра изготовлены в виде поршней, которые могут перемещаться.

По наблюдениям из другой системы отсчета K, движущейся относительно исходной со скоростью $v=\beta c$, данная равновесная система, согласно /4/, будет, очевидно, обладать энергией и импульсом

$$E = \frac{P^\circ V^\circ}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad /5/$$

$$G = \frac{\beta}{c}\,\frac{P^\circ V^\circ}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad /6/$$

Рассмотрим теперь некоторый конечный процесс, который переводит рассматриваемую систему /жидкость/ из одного термодинамически равновесного состояния в другое. При этом мы будем считать, что после процесса /как и до него/ жидкость покоится в K° -системе. Действительно, мы можем представить себе этот процесс как расширение /или сжатие/, произведенное одновременно обоими поршнями, двигавшимися одинаковым образом, но в противоположных направлениях *.

Согласно первому закону термодинамики, изменение энергии ΔE рассматриваемой системы в результате данного процесса должно определяться выражением

$$\Delta E = \Delta Q + \Delta A, \qquad /7/$$

* Здесь также неявно полагается, что жидкость не получила импульса в K°-системе и за счет подвода тепла ΔQ°.

где ΔQ - количество тепла, переданное системе в течение процесса, а ΔA - механическая работа, совершенная над системой со стороны окружающих ее тел /цилиндра/.

Если при этом в K°-системе энергия жидкости изменилась на величину ΔE°, то по наблюдениям из K-системы это изменение будет составлять

$$\Delta E = \frac{\Delta E^{\circ}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad /8/$$

Что касается формулы преобразования для работы, то при ее выводе мы будем опираться на релятивистское определение количества работы, даваемое следующим выражением:

$$\Delta A = F_4 \, \Delta s. \qquad /9/$$

Здесь F_4 - временная компонента силы Минковского, а Δs - элемент длины в 4-мире. Привлекая известные выражения для F_4 и Δs, получим:

$$\Delta A = \frac{F \cdot v}{\sqrt{1-\beta^2}} \Delta t \sqrt{1-\beta^2} = F v \Delta t. \qquad /10/$$

Отсюда можно заключить, что введенное релятивистское определение понятия работы находится в полном соответствии с общепринятым определением.

На основании /9/ и с учетом того, что в рассматриваемом случае пространственные компоненты 4-вектора работы в K°-системе равны нулю, немедленно получим, что

$$\Delta A = \frac{\Delta A^{\circ}}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad /11/$$

откуда, используя /7/ и /8/, придем к формуле Отта:

$$\Delta Q = \frac{\Delta Q^{\circ}}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad /12/$$

При условии обратимости рассматриваемого термодинамического процесса для изменения энтропии системы будем иметь:

$$\Delta S^{\circ} = \frac{\Delta Q^{\circ}}{T^{\circ}} . \qquad /13/$$

Учитывая, что энтропия является инвариантной величиной при переходе к другой системе отсчета, придем ко второй формуле Отта:

$$T = \frac{T^{\circ}}{\sqrt{1-\beta^2}} \; * . \qquad /14/$$

Следует специально подчеркнуть, что полученные выше формулы преобразования /12/ и /14/ справедливы, очевидно, только в том случае, если жидкость после процесса покоится в K°-системе. В противном случае, например, вид формулы /12/ должен измениться в соответствии с приобретенным жидкостью импульсом /скажем, за счет передачи тепла/.

Что же касается формулы Планка, то на основании /15/ легко видеть, что она может быть справедливой только в таком частном случае, когда после процесса скорость движения жидкости по величине и направлению будет совпадать со скоростью K-системы.

§3. *О ковариантности уравнения состояния идеального газа*

Рассмотрим уравнение состояния идеального газа

$$P^{\circ}V^{\circ} = nkT^{\circ} , \qquad /15/$$

* Отметим, что, например, в случае идеального газа формула /14/ может быть получена также на основе уравнения состояния $E^{\circ} = 3nkT^{\circ}/2$ и формулы преобразования для энергии $E = E^{\circ}/\sqrt{1-\beta^2}$.

описывающее некоторую равновесную систему, покоящуюся в системе отсчета K°.

Коль скоро рассматриваемое уравнение выражает некоторый закон природы, то мы вправе полагать, что оно должно удовлетворять требованию ковариантности относительно преобразований Лоренца. Тогда, учитывая, что P и nk - скалярные величины, можно заключить, что при переходе к системе отсчета K величины V и T должны преобразовываться по аналогичным формулам.

Если далее мы воспользуемся полученной выше формулой преобразования /14/ для температуры, то для формулы преобразования объема будем иметь:

$$V = \frac{V^\circ}{\sqrt{1-\beta^2}}. \qquad /16/$$

Последнее выражение, очевидно, противоречит формуле "лоренцова сокращения", на основании которой имеем, что

$$V = V^\circ\sqrt{1-\beta^2}. \qquad /17/$$

С другой стороны, полученный результат находится в полном соответствии с законом преобразования длин, который вытекает из иного определения понятия длины движущегося масштаба, основанного на непосредственном использовании часов и световых сигналов /5/ .

Приложение

При введении тензора $T_{x_i x_j x_k x_l}$ здесь мы будем опираться на существование тензора плотности $n_{x_m x_n x_p}$ *. Четыре компоненты этого полностью антисимметричного тензора определяют собою следующие величины: n_{xyz} - плотность частиц /их число в единице пространственного объема/; n_{tyz} - число частиц, падающих в единицу времени на единичную площадку, перпендикулярную оси OX и т.д.

---

* Обычно для удобства вместо тензора плотности фактически пользуются его дуальным дополнением - вектором плотности тока j_{x_q} .

Коль скоро давление определяется величиной изменения импульса в единицу времени, действующего на нормальную к нему единичную площадку, то, очевидно, что давление, испытываемое элементом площади YZ будет даваться , в частности, выражением

$$-\Delta p_x \, n_{tyz} \,.$$

Здесь Δp_x, скажем, - среднее изменение импульса частицы в результате соударения, например, с элементом стенки, ограничивающей газ или жидкость.

Для окончательного выяснения вида искомого тензора энергии-импульса * следует также учесть, что его компоненты, выражающие плотность импульса в единице объема, должны быть равны нулю:

$$T_{x,\,xyz} = T_{y,\,xyz} = T_{z,\,xyz} = 0 \,. \qquad /п.1/$$

Кроме того, должно выполняться равенство

$$T_{t,\,tyz} = T_{t,\,tzx} = T_{t,\,txy} = 0 \,, \qquad /п.2/$$

выражающее собою тот факт, что поток энергии в единицу времени через единичную поверхность равен нулю.

И, наконец, условие, связанное с неизменностью импульсов частиц, движущихся по касательной к данному элементу поверхности, запишется в виде равенства нулю следующих компонент:

$$T_{y,\,tyz} = T_{z,\,tyz} = 0 \,,$$

$$T_{x,\,tzx} = T_{z,\,tzx} = 0 \,, \qquad /п.3/$$

$$T_{x,\,txy} = T_{y,\,txy} = 0 \,.$$

На основании /п.1/, /п.2/ и /п.3/ можно заключить, что вводимая таким образом величина $T_{x_i\,,\,x_j x_k x_l}$ должна представлять собою полностью антисимметричный 4-тензор четвертого ранга и описываться следующим выражением

$$T_{x,yzt} = n_{xyz}\,\Delta E - n_{yzt}\,\Delta p_x + n_{xzt}\,\Delta p_y - n_{xyt}\,\Delta p_z \,.$$

* Как образуемого произведением 4-вектора энергии-импульса на тензор плотности.

В качестве очевидного следствия из последнего факта будем иметь равенство

$$T_{x,\,tyz} = T_{y,\,tzx} = T_{z,\,txy} ,$$

выражающее собою закон Паскаля.

Вводя далее скалярное давление и скалярную плотность энергии с помощью выражений:

$$T_{ajkl} = p\,e_{ajkl} ,$$

$$-T_{4jkl} = \epsilon\, e_{4jkl} ,$$

где e_{ijkl} - совершенно антисимметричный единичный 4-тензор четвертого ранга, будем иметь кроме того равенство:

$$\epsilon = -p .$$

Литература

1. *Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Статистическая физика. "Наука", М., 1964, стр. 58.*
2. *В.Паули. Теория относительности. ГИТТЛ, М.-Л., 1947, стр.196; см. также Х.Мёллер. Эйнштейновский сборник 1969-1970, "Наука", М., 1970, стр. 11 и 40.*
3. H.Ott. Zt.f. Phys. 175, 70, 1963.
4. H.Arzeliès. Nuovo Cim. 35, 792, 1965.
5. *В.Н.Стрельцов. Сообщения ОИЯИ, Р2-5555 и Р2-5626, Дубна, 1971.*

Рукопись поступила в издательский отдел 29 августа 1972 года.