ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6689

И. Лукач, Л. Тотх

О ПОЛНОМ НАБОРЕ НАБЛЮДАЕМЫХ НА СФЕРЕ В ТРЕХМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

Р2 - 6689

И. Лукач,[1] Л. Тотх[2]

О ПОЛНОМ НАБОРЕ НАБЛЮДАЕМЫХ НА СФЕРЕ В ТРЕХМЕРНОМ КОМПЛЕКСНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Направлено в ЯФ

[1] Физический институт Словацкой Академии наук, Братислава
[2] Университет им. П.И. Шафарика, Кошице.

Введение

Методы теории групп в настоящее время широко применяются в физике. Для классификации супермультиплетов элементарных частиц был с успехом применён метод симметрий. С этой целью были рассмотрены n -мерные пространства (действительные, комплексные, кватернионные и др.) и их группы преобразований, такие как $SO(n)$, $SU(n)$, $Sp(n)$ и др. Одно из центральных мест при классификации элементарных частиц занимает унитарная симметрия (напр. /I/). Эта группа внутренней симметрии элементарных частиц связана с преобразованиями в трехмерном комплексном пространстве C_3.

Специальная унитарная (или унимодулярная) группа $SU(3)$ является группой преобразований в C_3, оставляющих инвариантной квадратичную форму

$$z_1 z^1 + z_2 z^2 + z_3 z^3 = 1 , \quad z^i = z_i^* , \quad i = 1,2,3. \tag{I}$$

Если ввести единичный комплексный вектор $\vec{c}$ с составляющими z_1, z_2, z_3, то (I) означает, что при линейных преобразованиях[x)]

$$z_i' = u_i^k z_k , \quad (u_i^j)^\dagger (u_j^k) = \delta_i^k , \quad \det(u_i^k) = 1$$

квадрат длины вектора $\vec{c}$ не изменяется.

Введём операторы

$$\hat{A}_k^i = z_i \frac{\partial}{\partial z_k} - z^k \frac{\partial}{\partial z^i} , \tag{2}$$

которые удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям

$$[\hat{A}_j^i , \hat{A}_\ell^k] = \hat{A}_\ell^i \delta_j^k - \hat{A}_j^k \delta_\ell^i . \tag{3}$$

---

x) По дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование от I до 3.

Из операторов $\hat{A}^i_k$ можно вычитанием следа получить генераторы группы $SU(3)$

$$\hat{B}^i_k = \hat{A}^i_k - \frac{1}{3}\delta^i_k \left(\hat{A}^1_1 + \hat{A}^2_2 + \hat{A}^3_3\right), \quad \hat{B}^i_i \equiv 0,$$

удовлетворяющие также коммутационным соотношениям (3).

Группа $SU(3)$ имеет три подгруппы $SU(2)$, которые в физике обозначаются как $SU_U(2)$, $SU_V(2)$ и $SU_T(2)$ и соответствуют подгруппам так называемых U-, V-, T – спинов. Кроме этих подгрупп, группа $SU(3)$ содержит две линейно независимых однопараметрических подгруппы $U_Q(1)$ и $U_Y(1)$, соответствующих операторам заряда $\hat{Q} = \hat{B}^1_1$ и гиперзаряда $\hat{Y} = -\hat{B}^3_3$. Генераторы группы $SU(3)$ удобно представить в виде матрицы

$$\hat{B}^i_k = \begin{pmatrix} \hat{Q} & \hat{T}_+ & \hat{V}_+ \\ \hat{T}_- & \hat{Y}-\hat{Q} & \hat{U}_+ \\ \hat{V}_- & \hat{U}_- & -\hat{Y} \end{pmatrix},$$

которая наглядно показывает элементы отдельных подгрупп.

Для построения неприводимых представлений группы $SU(3)$ используется обычно её редукция через подгруппу $SU_T(2)$, т.е. используется цепочка подгрупп

$$SU(3) \supset SU_T(2) \otimes U_Y(1). \tag{4}$$

Базис такого неприводимого представления группы $SU(3)$ представляют собственные векторы определённого набора пяти диагональных операторов. Этими диагональными и взаимно коммутирующими операторами в схеме (4) являются операторы: операторы Казимира второго и третьего порядков для группы $SU(3)$, оператор Казимира для группы $SU_T(2)$ и операторы заряда и гиперзаряда, т.е.

$$\hat{C}^{(2)} = \frac{1}{2}\hat{B}^i_j \hat{B}^j_i = \frac{1}{3}\left(p^2 + pq + q^2 + 3p + 3q\right),$$

$$\hat{C}^{(3)} = \hat{B}^i_j \hat{B}^j_k \hat{B}^k_i = \frac{1}{9}(p-q)(2p^2+3pq+2q^2) - p(q+2) - 2q(q+2),$$

$$\hat{C}^{(2)}_T = \frac{1}{2}\left[\hat{B}^1_2\hat{B}^2_1 + \hat{B}^2_1\hat{B}^1_2 + (\hat{B}^1_1)^2 + (\hat{B}^2_2)^2 - \frac{1}{2}(\hat{B}^1_1 + \hat{B}^2_2)^2\right] = T(T+1), \tag{5}$$

$$\hat{B}^1_1 = Q, \qquad \hat{B}^3_3 = -Y,$$

причём p – число верхних и q – число нижних индексов представления, T – изотопический спин, Q и Y – собственные значения операторов заряда и гиперзаряда соответственно.

Однако возникает вопрос, является ли набор диагональных операторов (5) единственно возможным и наиболее общим набором диагональных операторов для представлений группы $SU(3)$. Вместо оператора $\hat{C}^{(2)}_T$ в системе операторов (5) можно использовать оператор Казимира для подгруппы $SU_V(2)$ или подгруппы $SU_U(2)$. Операторы Казимира $\hat{C}^{(2)}_V$ и $\hat{C}^{(2)}_U$ для подгрупп V- и U- спина имеют вид, аналогичный оператору $\hat{C}^{(2)}_T$, а именно:

$$\hat{C}^{(2)}_V = \frac{1}{2}\left[\hat{B}^3_1\hat{B}^1_3 + \hat{B}^1_3\hat{B}^3_1 + (\hat{B}^1_1)^2 + (\hat{B}^3_3)^2 - \frac{1}{2}(\hat{B}^1_1 + \hat{B}^3_3)^2\right],$$

$$\hat{C}^{(2)}_U = \frac{1}{2}\left[\hat{B}^2_3\hat{B}^3_2 + \hat{B}^3_2\hat{B}^2_3 + (\hat{B}^3_3)^2 + (\hat{B}^2_2)^2 - \frac{1}{2}(\hat{B}^3_3 + \hat{B}^2_2)^2\right].$$

Известна классификация представлений группы $SU(3)$ по отношению к подгруппам V- и U- спина /1,2/.

В общем случае у нас нет оснований предпочитать одну из трех подгрупп $SU(2)$ группы $SU(3)$ двум другим. Подгруппы U-, V-, T- -спинов в общем равноправны. Так как каждый из операторов $\hat{C}^{(2)}_U$, $\hat{C}^{(2)}_V$ и $\hat{C}^{(2)}_T$ по отдельности коммутирует с операторами $\hat{C}^{(2)}$, $\hat{C}^{(3)}$, $\hat{B}^1_1$, $\hat{B}^3_3$, то в общем случае произвольная линейная комбинация операторов Казимира подгрупп U-, V- и T – спина, т.е. оператор

$$\hat{C}_{uv\pi} = a_1 \hat{C}^{(2)}_u + a_2 \hat{C}^{(2)}_v + a_3 \hat{C}^{(2)}_\pi, \quad a_i = const, \tag{6}$$

коммутирует также с операторами $\hat{C}^{(2)}$, $\hat{C}^{(3)}$, $\hat{B}^1_1$ и $\hat{B}^3_3$.

Здесь следует определить понятие эквивалентного оператора, с которым будем встречаться в дальнейшем. Если имеем некоторую систему N линейно независимых диагональных операторов, то оператор, эквивалентный данному, определяется как произвольная линейная комбинация этого оператора с остальными $(N-1)$ диагональными операторами.

В связи с определением эквивалентного оператора мы можем считать без потери общности, что в операторе (6) $a_1 + a_2 + a_3 = 0$. Заметив, что

$$\hat{C}^{(2)} = \hat{C}^{(2)}_u + \hat{C}^{(2)}_v + \hat{C}^{(2)}_\pi,$$

любой оператор типа (6) с $a'_1 + a'_2 + a'_3 \neq 0$ можно определённой линейной комбинацией с оператором $\hat{C}^{(2)}$ свести к оператору (6) с коэффициентами, связанными соотношением $a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

Согласно сказанному выше, мы в дальнейшем построим базис для группы $SU(3)$, связанный с представлением, в котором система операторов

$$\hat{C}^{(2)}, \quad \hat{C}^{(3)}, \quad \hat{C}_{uv\pi}, \quad \hat{B}^1_1, \quad \hat{B}^3_3, \tag{7}$$

или система операторов, эквивалентная системе операторов (7), диагональны. Покажем, что система диагональных операторов (7) связана с наиболее общей параметризацией сферы в трехмерном комплексном пространстве.

Параметризация сферы в C_3

Квадратичная форма (I) представляет собой уравнение сферы единичного радиуса в трехмерном комплексном пространстве. Точка на сфере в C_3 задаётся пятью независимыми параметрами.

Составляющие z_1 , z_2 , z_3 единичного комплексного вектора представляют собой комплексные числа, которые могут быть, как известно, записаны в тригонометрической форме

$$z_1 = \xi_1 e^{i\alpha_1}, \quad z_2 = \xi_2 e^{i\alpha_2}, \quad z_3 = \xi_3 e^{i\alpha_3}, \quad Jm\, \xi_i = 0, \quad 0 \leq \alpha_i \leq 2\pi. \tag{8}$$

Уравнение (I) налагает на переменные ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 условие $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1$, которое представляет собой уравнение сферы в трехмерном эвклидовом пространстве E_3 . Следовательно, переменные ξ_1 , ξ_2 , ξ_3 можно выразить как функции двух независимых переменных, которые определяют положение точки на сфере в E_3 .

Известно, что на сфере в E_3 существуют всего две ортогональных криволинейных системы координат: полярная и эллиптическая/3/. Точка на единичной сфере в E_3 может быть задана, как хорошо известно, с помощью полярного и азимутального углов, т.е.

$$\xi_1 = \sin\theta \cos\varphi, \quad \xi_2 = \sin\theta \sin\varphi, \quad \xi_3 = \cos\theta,$$

$$d\xi_i^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

Менее известно, что на сфере в E_3 существует эллиптическая система координат, т.е. что точку на единичной сфере можно задать с помощью параметризации

$$\xi_1 = \sqrt{1-k'^2\cos^2\varphi'}\,\cos\varphi, \quad \xi_2 = \sin\varphi' \sin\varphi, \quad \xi_3 = \cos\varphi' \sqrt{1-k^2\cos^2\varphi} \tag{9}$$

$$d\xi_i^2 = (k^2\sin^2\varphi + k'^2\sin^2\varphi')\left[\frac{d\varphi^2}{1-k^2\cos^2\varphi} + \frac{d\varphi'^2}{1-k'^2\cos^2\varphi'}\right],$$

$0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \varphi' \leq \pi$, $k = \sin f$, $k' = \cos f$, где

$2f$ - расстояние между фокусами эллиптической системы координат[x]. Параметризация (9) представляет собой тригонометрическую форму эллиптической системы координат на сфере в E_3 /4/. Среди других возможных параметризаций следует отметить алгебраическую форму. Если положить:

$$\rho = e_1 + (e_2 - e_1)\cos^2\psi, \quad \rho' = e_3 - (e_3 - e_2)\cos^2\psi',$$

$$e_1 = -(1+k^2), \quad e_2 = 2k^2 - 1, \quad e_3 = 2 - k^2,$$

$$e_1 + e_2 + e_3 \equiv 0,$$

то получим

$$\xi_1^2 = \frac{(\rho - e_1)(\rho' - e_1)}{(e_1 - e_2)(e_1 - e_3)}, \quad \xi_2^2 = \frac{(\rho - e_2)(\rho' - e_2)}{(e_2 - e_3)(e_2 - e_1)}, \quad \xi_3^2 = \frac{(\rho - e_3)(\rho' - e_3)}{(e_3 - e_1)(e_3 - e_2)},$$

$$d\xi_i^2 = -\frac{1}{4}(\rho - \rho')\left[\frac{d\rho^2}{P(\rho)} - \frac{d\rho'^2}{P(\rho')}\right], \tag{10}$$

$$P(\rho) = (\rho - e_1)(\rho - e_2)(\rho - e_3) = \rho^3 + g_2\rho - g_3, \quad e_1 \le \rho \le e_2 \le \rho' \le e_3,$$

$$g_2 = e_1e_2 + e_2e_3 + e_3e_1 = -\frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) = -3(1 - k^2k'^2),$$

$$g_3 = e_1e_2e_3 = \frac{1}{3}(e_1^3 + e_2^3 + e_3^3) = -(k^2 - k'^2)(2 + k^2k'^2).$$

Алгебраическая форма эллиптической системы координат (10) обладает свойством циклических перестановок

$$e_1 \to e_2, \; e_2 \to e_3, \; e_3 \to e_1; \quad \xi_1 \to \xi_2, \; \xi_2 \to \xi_3, \; \xi_3 \to \xi_1,$$

в то время как тригонометрическая форма (9) обладает формальной симметрией взаимной замены k^2, ψ на k'^2, ψ', что соответствует переходу от правой системы координат ξ_1, ξ_2, ξ_3 к левой системе координат ξ_3, ξ_2, ξ_1.

---

[x] Полярную систему координат на сфере в E_3 с осью симметрии вдоль ξ_3 можно рассматривать как вырожденный случай эллиптической системы координат (9) при $k^2 \to 0$. В связи с этим полярную систему координат в дальнейшем рассматривать не будем.

Отметим, что с двумя возможными параметризациями точки на сфере в E_3 связаны два возможных (неэквивалентных) полных набора квантово-механических наблюдаемых/4/. Если использовать параметризацию сферы в C_3 через две возможных параметризации сферы в E_3, то очевидно, что на сфере в трехмерном комплексном пространстве должны существовать два неэквивалентных полных набора квантово-механических наблюдаемых.

Метрика на множестве единичных комплексных векторов $\vec{c}$ с учётом (8) имеет вид

$$ds^2 = dz_i\, d\bar{z}^i = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + d\xi_3^2 + \xi_1^2 d\alpha_1^2 + \xi_2^2 d\alpha_2^2 + \xi_3^2 d\alpha_3^2.$$

Нетрудно выразить операторы $\hat{A}^i_k$ (а соответственно, и операторы $\hat{B}^i_k$) через дифференциальные операторы от переменных ξ_i, α_i. Для $\hat{A}^i_k$ получаем выражение:

$$\hat{A}^i_k = \frac{1}{2} e^{i(\alpha_i - \alpha_k)}\left[\left(\xi_i\frac{\partial}{\partial\xi_k} - \xi_k\frac{\partial}{\partial\xi_i}\right) - i\left(\frac{\xi_i}{\xi_k}\frac{\partial}{\partial\alpha_k} + \frac{\xi_k}{\xi_i}\frac{\partial}{\partial\alpha_i}\right)\right].$$

Оператор $\xi_i\,\partial/\partial\xi_k - \xi_k\,\partial/\partial\xi_i$, входящий в $\hat{A}^i_k$, можно выразить как инфинитезимальный оператор от переменных ρ, ρ', определяющих положение точки на сфере в E_3:

$$\hat{L}_j = -i\, e_{jkl}\, \xi_k \frac{\partial}{\partial\xi_l} = \frac{i}{H_\rho H_{\rho'}}\left[\frac{\partial\xi_j}{\partial\rho'}\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{\partial\xi_j}{\partial\rho}\frac{\partial}{\partial\rho'}\right],$$

где H_ρ и $H_{\rho'}$ являются коэффициентами Ламе в формулах (10).

Эллиптический базис в C_3

Приведём явный вид пяти операторов, которые диагональны на сфере в C_3 в случае параметризации этой сферы через (8) и (10). Будем пользоваться операторами $\hat{A}^i_k$ вместо операторов $\hat{B}^i_k$, и тогда непосредственным вычислением получаем набор диагональных операторов, эквивалентный набору операторов (7), а именно:

$$\frac{1}{2}\hat{A}^i_j\hat{A}^j_i = u(u+2)+m^2,$$

$$\frac{1}{2}\hat{A}^1_1 = m_1,\quad \frac{1}{2}\hat{A}^2_2 = m_2,\quad \frac{1}{2}\hat{A}^3_3 = m_3, \tag{II}$$

$$\frac{1}{2}\Big\{ e_1\left[\hat{A}^2_3\hat{A}^3_2+\hat{A}^3_2\hat{A}^2_3-(\hat{A}^1_1)^2-\hat{A}^2_2\hat{A}^3_3\right]+ e_2\left[\hat{A}^3_1\hat{A}^1_3+\hat{A}^1_3\hat{A}^3_1-(\hat{A}^2_2)^2-\hat{A}^3_3\hat{A}^1_1\right]+ e_3\left[\hat{A}^1_2\hat{A}^2_1+\hat{A}^2_1\hat{A}^1_2-(\hat{A}^3_3)^2-\hat{A}^1_1\hat{A}^2_2\right]\Big\} = \varepsilon^{u(\tau)}_{m_1m_2m_3}(k^2).$$

В формулах (II) $u=\frac{1}{2}(p+q)=0,1/2,1,\dots$, $m=m_1+m_2+m_3=\frac{1}{2}(p-q)$; $|m_i|=0,1/2,1,\dots u$ x). Собственное значение $\varepsilon^{u(\tau)}_{m_1m_2m_3}(k^2)$ является функцией только одного параметра $0\le k^2\le 1$, причём

$$\varepsilon^{uT}_{m_1m_2m_3}(0) = 3T(T+1)-3m_3^2-u(u+2),$$

$$\varepsilon^{uU}_{m_1m_2m_3}(1) = -3U(U+1)+3m_1^2+u(u+2),$$

где $T(T+1)$ и $U(U+1)$ собственные значения оператора Казимира на подгруппах T- и U- спина. Символ $(\tau)=1,2,\dots(u+1-|m_1|-|m_2|-|m_3|)$ различает родственные значения с одинаковыми u, m_1, m_2, m_3. Последний оператор в (II) эквивалентен оператору $\hat{C}_{uvT}$ из (6) и между ними существует связь

$$\hat{C}_{uvT} = \varepsilon^{u(\tau)}_{m_1m_2m_3}(k^2)+a_1m_1^2+a_2m_2^2+a_3m_3^2,$$

причем $k^2=(a_2-a_1)/(a_3-a_1)$.

x) Собственные значения оператора $\hat{A}^i_j\hat{A}^j_i$, выраженные через p и q, равны $p(p+2)+q(q+2)$ и собственные значения оператора $\hat{A}^i_j\hat{A}^j_k\hat{A}^k_i = \hat{B}^i_j\hat{B}^j_k\hat{B}^k_i+(\hat{A}^i_i)(\hat{A}^j_k\hat{A}^k_j)-\frac{2}{9}(\hat{A}^i_i)^3$ равны

$$(2m-1)\left[3u(u+2)+m^2\right]+2m = p^3-q^3-pq+2p(p-1)-4q(q+1).$$

Если использовать формулы для $\hat{A}^i_k$, то нетрудно найти явный вид пяти диагональных операторов в (II). Они выражаются через переменные ρ, ρ', α_1, α_2, α_3 следующим образом:

$$\hat{A}^1_1=-i\frac{\partial}{\partial\alpha_1}=2m_1,\quad \hat{A}^2_2=-i\frac{\partial}{\partial\alpha_2}=2m_2,\quad \hat{A}^3_3=-i\frac{\partial}{\partial\alpha_3}=2m_3,$$

$$\frac{1}{2}\hat{A}^i_j\hat{A}^j_i-\frac{1}{4}(\hat{A}^i_i)^2 = u(u+2) =$$

$$=\frac{1}{\rho-\rho'}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\mathcal{P}(\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\rho'}\left(\mathcal{P}(\rho')\frac{\partial}{\partial\rho'}\right)\right]+\frac{m_1^2}{\xi_1^2}+\frac{m_2^2}{\xi_2^2}+\frac{m_3^2}{\xi_3^2}, \tag{I2}$$

$$\varepsilon^{u(\tau)}_{m_1m_2m_3}(k^2)=\frac{1}{\rho-\rho'}\left[\rho'\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\mathcal{P}(\rho)\frac{\partial}{\partial\rho}\right)-\rho\frac{\partial}{\partial\rho'}\left(\mathcal{P}(\rho')\frac{\partial}{\partial\rho'}\right)\right]+$$

$$+\frac{\rho+\rho'-e_1}{\xi_1^2}m_1^2+\frac{\rho+\rho'-e_2}{\xi_2^2}m_2^2+\frac{\rho+\rho'-e_3}{\xi_3^2}m_3^2.$$

Система операторных уравнений (I2) допускает разделение переменных, если решение искать в виде

$$\Lambda^{u(\tau)}_{m_1m_2m_3}(\rho)\,\Lambda'^{u(\tau)}_{m_1m_2m_3}(\rho')\exp\left[2i(m_1\alpha_1+m_2\alpha_2+m_3\alpha_3)\right].$$

Функция $\Lambda^{u(\tau)}_{m_1m_2m_3}(\rho)$ удовлетворяет при этом дифференциальному уравнению

$$\left[\frac{d}{d\rho}\left(\mathcal{P}(\rho)\frac{d}{d\rho}\right)-u(u+2)\rho+\varepsilon^{u(\tau)}_{m_1m_2m_3}(k^2)-9\left(\frac{k^2m_1^2}{\rho-e_1}-\frac{k^2k'^2m_2^2}{\rho-e_2}+\frac{k'^2m_3^2}{\rho-e_3}\right)\right]\Lambda^{u(\tau)}_{m_1m_2m_3}(\rho)=0. \tag{I3}$$

Если искать решения дифференциального уравнения (I3) в виде

$$(\rho-e_1)^{|m_1|}(\rho-e_2)^{|m_2|}(\rho-e_3)^{|m_3|}\,\mathcal{P}^{u(\tau)}_{m_1m_2m_3}(\rho),$$

то функция $\mathcal{P}^{u(\tau)}_{m_1m_2m_3}(\rho)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\left\{ P(\rho)\frac{d^2}{d\rho^2} + \left[(2m_0+3)\rho^2 + 2G_1\rho + 2G_2 + g_2\right]\frac{d}{d\rho} + \right.$$

$$\left. + \varepsilon^{u(\tau)}_{m_1m_2m_3}(k^2) - (u-m_0)(u+m_0+2)\rho + (2m_0+1)G_1\right\} \mathcal{P}^{u(\tau)}_{m_1m_2m_3}(\rho) = 0, \qquad (\text{I4})$$

причём введены обозначения

$$m_0 = |m_1| + |m_2| + |m_3| ,$$

$$G_1 = e_1|m_1| + e_2|m_2| + e_3|m_3| , \quad G_2 = e_2e_3|m_1| + e_3e_1|m_2| + e_1e_2|m_3| .$$

Уравнение (I4) представляет собой дифференциальное уравнение Гойна с четырьмя регулярными особыми точками/5/. Его можно охарактеризовать P -символом Римана

$$P\left\{\begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & \infty & \\ 0 & 0 & 0 & m_0-u & \rho \\ 2|m_1| & 2|m_2| & 2|m_3| & u+m_0+2 & \end{matrix}\right\}.$$

Решения дифференциального уравнения (I4) следует искать в виде ряда

$$\sum_{r=0}^{\infty} A_r\, \rho^{u-m_0-r} . \qquad (\text{I5})$$

Коэффициенты A_r при этом удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению

$$r(r-2u+2)A_r + \left[\varepsilon(k^2) + (2u+3-2r)G_1\right]A_{r-1} +$$

$$+ (u+2-m_0-r)\left[2G_2 + (u+2-m_0-r)g_2\right]A_{r-2} -$$

$$-(u+2-m_0-r)(u+3-m_0-r)\,g_3 A_{r-3} = 0, \quad A_p \equiv 0,\ p<0 .$$

Собственные значения $\varepsilon(k^2)$ определяются из условия конечности ряда (I5). Это условие имеет вид $A_{u-m_0+1} = 0$, и для определения

$\varepsilon(k^2)$ получаем алгебраическое уравнение степени $u-m_0+1$. Различные корни этого уравнения будем обозначать символом $(\tau) = 1, 2, \ldots (u-m_0+1)$.

Теперь нетрудно построить явный вид ненормированных собственных волновых функций системы диагональных операторов (II). Эти функции имеют вид:

$$\xi_1^{2|m_1|}\,\xi_2^{2|m_2|}\,\xi_3^{2|m_3|}\exp\left[2i(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3)\right]$$

$$\left[\sum_{r=0}^{u-m_0} A_r\,\rho^{u-m_0-r}\right]\left[\sum_{r=0}^{u-m_0} A_r\,\rho'^{\,u-m_0-r}\right]. \qquad (\text{I6})$$

Если заметить, что имеет место тождество

$$\frac{z_1z^1}{\Theta-e_1} + \frac{z_2z^2}{\Theta-e_2} + \frac{z_3z^3}{\Theta-e_3} = \frac{(\rho-\Theta)(\rho'-\Theta)}{P(\Theta)} ,$$

то функции (I6) можно переписать также в другой форме

$$\xi_1^{2|m_1|}\,\xi_2^{2|m_2|}\,\xi_3^{2|m_3|}\exp\left[2i(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3)\right]$$

$$\prod_{p=1}^{u-m_0}\left(\frac{z_1z^1}{\Theta_p-e_1} + \frac{z_2z^2}{\Theta_p-e_2} + \frac{z_3z^3}{\Theta_p-e_3}\right), \qquad (\text{I7})$$

где Θ_p – корни полиномов в (I6). Некоторые нормированные волновые функции и соответствующие им собственные значения $\varepsilon^{u(\tau)}_{m_1m_2m_3}(k^2)$ приведены в приложении.

Заключение

Итак, построены собственные волновые функции системы пяти операторов, которые диагональны в эллиптической системе координат на сфере в трехмерном комплексном пространстве. Эти собственные волновые функции являются ортогональным базисом для представлений группы $SU(3)$, который будем называть эллиптическим в отличие от обычно применяемого в физике (сферического) базиса /6/. Эллиптический базис построен аналитически, на основе системы диагональных операторов (II), без применения методов тензорного анализа, которые обычно используются при построении базиса для группы $SU(3)$. Базис (I7) представляет собой тензоры разных рангов от составляющих единичного комплексного вектора $\vec{c}$. Его особенностью является то, что он является аналитической функцией параметра $0 \le k^2 \le 1$, имеющего наглядный геометрический смысл и позволяющего непрерывным образом перейти от цепочки подгрупп $SU(3) \supset SU_T(2) \otimes U_Y(1)$ к цепочке подгрупп $SU(3) \supset SU_U(2) \otimes U_Q(1)$.

Размерность $D(p,q) = D'(u,m)$ представления группы $SU(3)$, как известно, равна

$$D(p,q) = \frac{1}{2}(p+1)(q+1)(p+q+2) = (u+1)\left[(u+1)^2 - m^2\right].$$

Размерности представлений в схеме p, q и в схеме u, m показаны на рис. I.

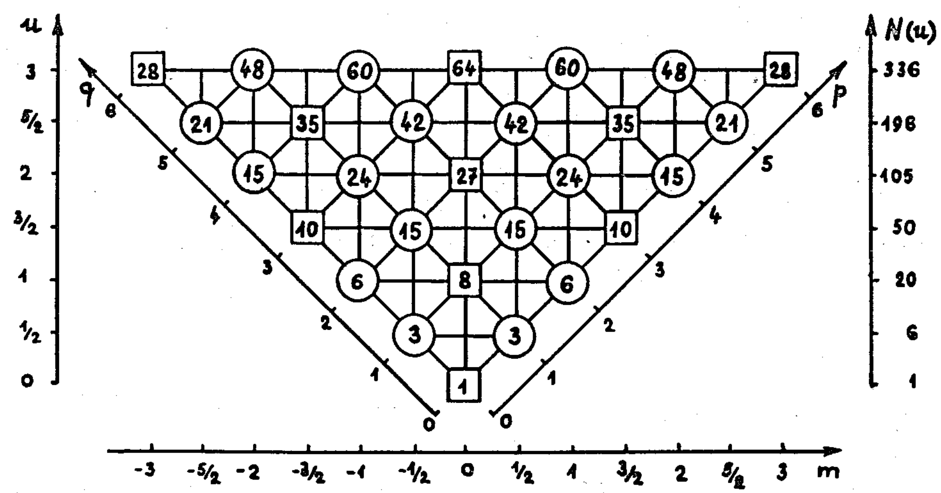

Рис. I.

Представления, интересующие нас с точки зрения унитарной симметрии, на рисунке отмечены квадратом. Число представлений, имеющихся при заданном u, равно $2u+1$. Общее число $N(u)$ функций (I6) при заданном u равно

$$N(u) = \sum_{m=-u}^{+u} D(u,m) = \frac{1}{3}(u+1)^2(2u+1)(2u+3).$$

Наконец, ещё несколько слов о том, где и как могут быть применены полученные результаты. Разработанный математический аппарат и построенный эллиптический базис созданы с целью их применения к систематике элементарных частиц в рамках симметрии $SU(3)$. Эллиптический базис можно охарактеризовать цепочкой подгрупп $SU(3) \supset U_Q(1) \otimes U_Y(1)$, которая означает сохранение заряда и гиперзаряда без сохранения изотопической инвариантности. Следовательно, с помощью эллиптического базиса можно рассмотреть вместе сильные и электромагнитные взаимодействия и провести классификацию частиц при наличии двух этих взаимодействий. Результаты данной работы можно использовать также в нерелятивистской квантово-механической задаче трех тел для классификации трехчастичных состояний.

Авторы благодарят проф. Я.А. Смородинского за постоянный интерес к работе и обсуждения.

Приложение

Приведём здесь явный вид собственных значений $\varepsilon^{u(\tau)}_{m_1 m_2 m_3}(k^2)$ и соответствующих им нормированных волновых функций $\left| {}^{u(\tau)}_{m_1 m_2 m_3} \right\rangle$ для $u - m_0 = 0, 1$:

$u - m_0 = 0, \quad \tau = 1$

$$\varepsilon^{m_0(1)}_{m_1 m_2 m_3}(k^2) = -(2m_0+1)\, G_1,$$

$$\left| \begin{matrix} m_0\,(\tau) \\ m_1 m_2 m_3 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{(2m_0+2)!}{2\pi^3\,(2|m_1|)!\,(2|m_2|)!\,(2|m_3|)!}}\ \times$$

$$\xi_1^{2|m_1|}\ \xi_2^{2|m_2|}\ \xi_3^{2|m_3|}\ \exp\left[2i\,(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3)\right],$$

$\underline{u - m_0 = 1, \quad \tau = 1,2}$

$$\varepsilon^{m_0+1\,(\tau)}_{m_1 m_2 m_3}(k^2) = -2\,(m_0+1)\,G_1 \pm \sqrt{G_1^2 - (2m_0+3)(g_2+2G_2)}$$

$$\left| \begin{matrix} m_0+1\,(\tau) \\ m_1 m_2 m_3 \end{matrix} \right\rangle = \sqrt{\frac{(2m_0+4)!\,(2m_0+3)^3}{4\pi^3\,(2|m_1|)!\,(2|m_2|)!\,(2|m_3|)}}\ \times$$

$$\xi_1^{2|m_1|}\ \xi_2^{2|m_2|}\ \xi_3^{2|m_3|}\ \exp\left[2i\,(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3)\right] \times$$

$$\left[(\Theta-e_2)(\Theta-e_3)\,\xi_1^2 + (\Theta-e_3)(\Theta-e_1)\,\xi_2^2 + (\Theta-e_1)(\Theta-e_2)\,\xi_3^2\right] \times$$

$$\Big\{2\left[-2G_1^2 + (2m_0+3)G_2 - (m_0+1)(2m_0+3)g_2\right]\left[G_1^2 - (2m_0+3)(g_2+2G_2)\right] \mp$$

$$\mp \left[4G_1^3 - 6\,(2m_0+3)\,G_1G_2 + 2m_0\,(2m_0+3)\,g_2G_1 + (2m_0+3)^3 g_3\right]$$

$$\sqrt{G_1^2 - (2m_0+3)(g_2+2G_2)}\ \Big\}^{-1/2},$$

$$\Theta = -\frac{1}{2m_0+3}\left[G_1 \pm \sqrt{G_1^2 - (2m_0+3)(g_2+2G_2)}\right].$$

На рис. 2 показана графическая зависимость собственных значений $\varepsilon^{u(\tau)}_{m_1 m_2 m_3}(k^2)$ от параметра $0 \leq k^2 \leq 1$ для представлений $D(1,1), D(3,0), D(2,2)$ группы $SU(3)$. Для достижения одинакового масштаба графиков собственных значений $\varepsilon^{u(\tau)}_{m_1 m_2 m_3}(k^2)$ с разными u введён нормировочный множитель $2\left[(2u+1)(2u+3)\right]^{-1}$.

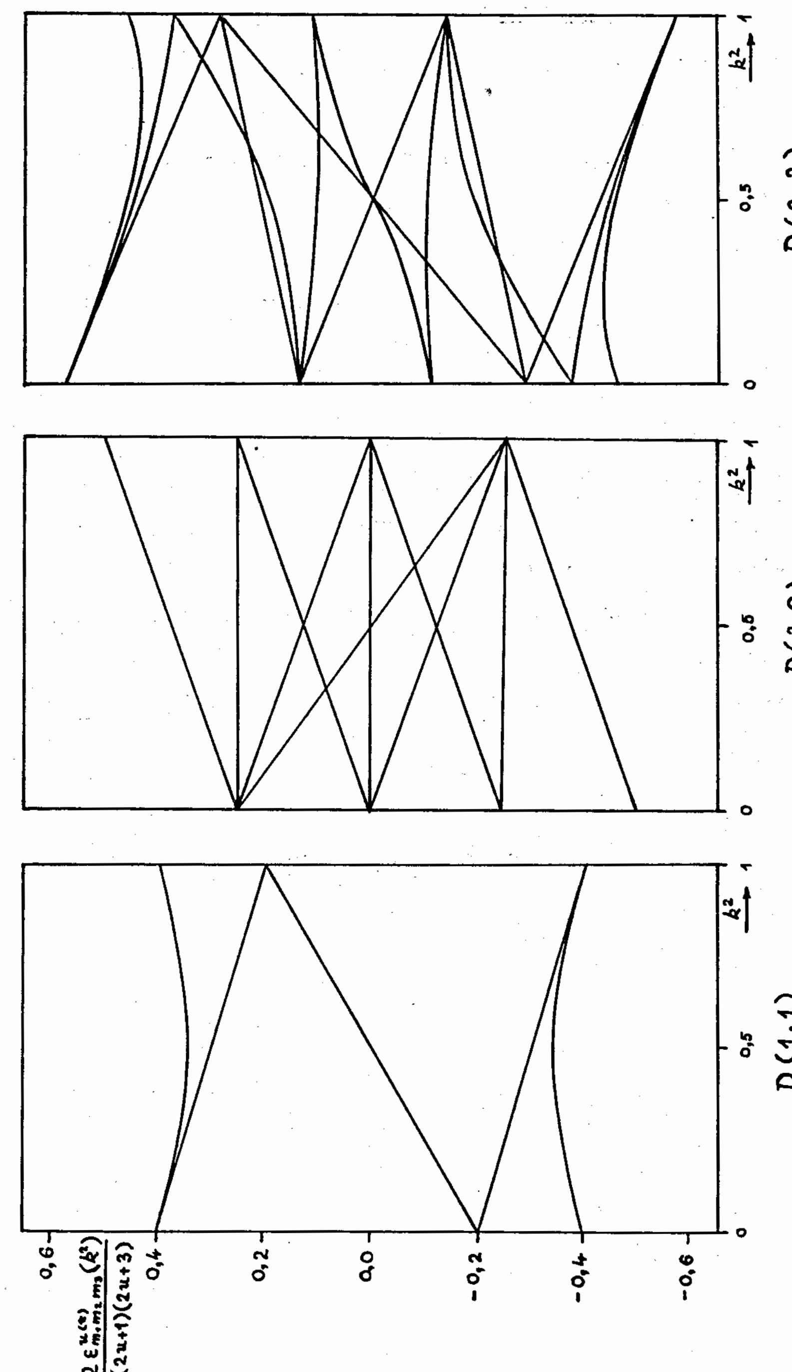

Рис. 2.

<u>Литература:</u>

1. Ю.Б. Румер, А.И. Фет. Теория унитарной симметрии. Наука, Москва, 1970;

   Нгуен Ван Хьеу. Лекции по теории унитарной симметрии элементарных частиц. Атомиздат, Москва, 1967;

   Я.А. Смородинский, УФН, <u>84</u>, 3 (1964).

2. C.A.Levinson, H.J.Lipkin, S.Meshkov, Phys.Lett. <u>1</u>, 44 (1962); Nuovo Cim. <u>23</u>, 236 (1962); Phys.Rev.Lett. <u>10</u>, 361 (1963).

3. М.Н. Олевский. Мат сб., <u>27</u>, 379 (1950).

4. И. Лукач, препринт ОИЯИ Р4-6268, Дубна, 1972.

5. Э.Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон. Курс современного анализа, т. 2, ГИФМЛ, Москва, 1963;

   Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Высшие трансцендентные функции, т. 3, Наука, Москва, 1967.

6. В.В. Судаков, в кн."Вопросы физики элементарных частиц", Ереван, 1964, стр. 117.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 августа 1972 года.