ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6687

В.Ш.Гогохия

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭДВАРДСА С НЕРЕНОРМИРУЕМЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

1972

P2 - 6687

В.Ш.Гогохия *

ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЭДВАРДСА С НЕРЕНОРМИРУЕМЫМ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ

Направлено в ТМФ

* Институт математики АН Груз. ССР

§ 1. Введение

Хорошо известно, что процедура ренормировки, которая оправдала себя в ренормируемых теориях (R -теории), перестает работать в неренормируемых теориях (N -теории), т.е. эта процедура не приводит к устранению расходимостей из ряда теории возмущений /1/. Поэтому встает вопрос или о выходе за рамки методов обычной теории возмущений, или каком-либо ее изменении. В работе /2/ был предложен метод дифференциальной интерполяции (МДИ) построения модифицированной теории возмущений на основе уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом. В силу же соответствия между рассеянием на сингулярном потенциале и неренормируемой теорией поля, отмеченного в /3/, можно предположить, что (МДИ) возможно сформулировать и в рамках квантовой теории поля. Аналогом уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом в теории поля в качестве модели выбирается уравнение Эдвардса для вершинной функции /4/. Уравнение Эдвардса выбрано по нескольким соображениям.

Во-первых, вершинная функция больше всего напоминает волновую функцию нерелятивистской теории, а уравнение Эдвардса наиболее близко к уравнению Шредингера, и в случае простейших взаимодействий его даже можно непосредственно свести к уравнению Шредингера. По этой же причине уравнение Эдвардса является наиболее простым объектом для приложения методов, полученных в нерелятивистской теории. Наконец, уравнение Эдвардса в ряде случаев оказывается достаточно простым и допускает строгое исследование и даже точное решение /5,6/ с помощью функции Мейера.

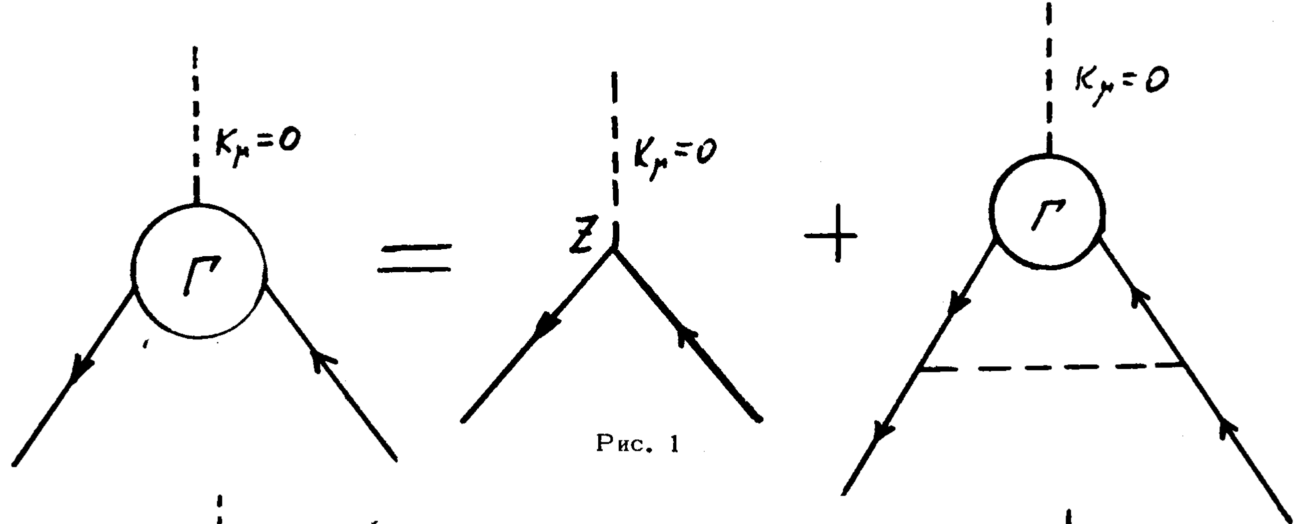
В данной работе мы ограничимся применением МДИ в случае приближенного уравнения Эдвардса, которое графически изображено на рис. 1 и 2. Очевидно, что данное приближение эквивалентно лестничному приближению для амплитуды рассеяния, определяемой уравнением Бете-Солпитера. В § 2 сформулирован МДИ в рамках квантовой теории поля. В § 3-4 показано применение МДИ в случае взаимодействия векторной A_μ и скалярных Φ_i частиц (VPP -вершина) и в случае $\omega\rho\pi$ -взаимодействия (VVP -вершина) соответственно.

§ 2. Метод дифференциальной интерполяции

Метод дифференциальной интерполяции (МДИ) в рамках теории поля формулируется следующим образом. Для некоторого процесса рассматриваются диаграммы низших приближений, записанные в эвклидовских переменных. Все расходящиеся интегралы обрезаются на верхнем пределе $q^2_{max} = D$. Если все значения инвариантных переменных, от которых зависит матричный элемент рассматриваемого процесса, ограничены, то зависимость от безразмерной величины $g^2 D$ можно найти, исследуя суммы лестничных диаграмм, анализ которых приводит к некоторому дифференциальному уравнению по параметру обрезания

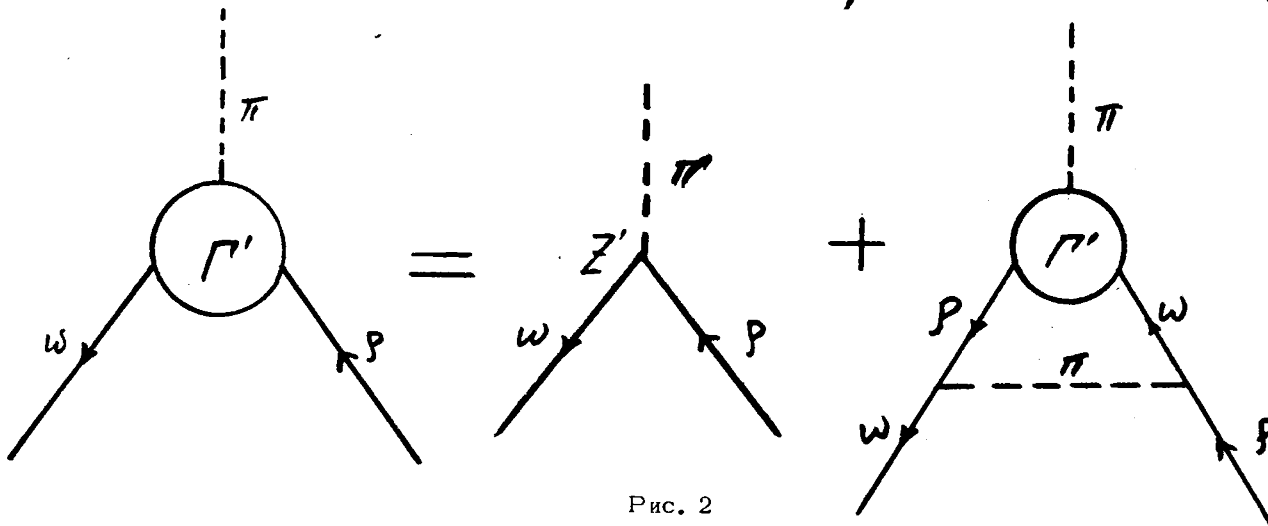
$$\sum_{n=0}^{N} D^n (a_n^{(0)} + a_n^{(1)} g^2 D + \dots) \frac{d^n F(g^2 D,\dots)}{dD^n} = 0\,, \tag{2.1}$$

где в $F(g^2 D,\dots)$ многоточием обозначены инвариантные импульсные переменные. Общее решение этого уравнения имеет вид



$K_\mu = 0$
Γ
$K_\mu = 0$
Z
$K_\mu = 0$
Γ

Рис. 1



π
Γ'
ω
ρ
π
Z'
ω
ρ
π
Γ'
ρ
ω
π
ω
ρ

Рис. 2

$$F(g^2D,\dots) = \sum_{n=1}^{N} f_n(g^2D)\phi_n(\dots), \qquad (2.2)$$

где $f_n(g^2D)$ -система линейно независимых решений уравнения (2.1). Предположим далее, что

$$f_n(g^2D)/f_1(g^2D) \xrightarrow[D\to\infty]{} c, \qquad (2.3)$$

где c -некоторая конечная величина или нуль (если предположение (2.3) не выполняется при физическом значении g^2, то всегда можно добиться его выполнения посредством аналитического продолжения в область нефизических значений g^2). Тогда, выделяя из (2.2) множитель $f_1(g^2D)$ и вводя константу ренормировки ($F^R \equiv ZF$, $Z \equiv [f_1(g^2D)]^{-1}$), получим в пределе $D\to\infty$ конечное выражение для F^R. Коэффициенты $f_n(g^2D)$ в общем случае могут зависеть от g^2 неаналитически, тогда как все выражение (2.2) при конечных D аналитично по g^2 в точке $g^2=0$. Функции $\phi_n(\dots)$ поэтому можно определить, приравнивая (2.2) ряду теории возмущений. Таким путем получим для $F^R(\infty,\dots)$ выражение, разложенное в ряд по степеням $g^\nu(\ln g)^{n_\nu}$, где n_ν -целое число, а ν в общем случае не целое (модифицированный ряд теории возмущений).

Поскольку обычно не удается получить точное уравнение для F, покажем, как использовать эти идеи, если известно лишь конечное число членов ряда теории возмущений

$$F(g^2D,\dots) = F^{(0)}(D,\dots) + g^2F^{(1)}(D,\dots) + \dots g^{2n}F^{(n)}(D,\dots) + \dots \qquad (2.4)$$

Нетрудно найти дифференциальное уравнение типа уравнения (2.1), которому удовлетворяют известные члены ряда (2.4). Будем рассматривать это уравнение как приближение к точному уравнению. Проводя все указанные выше вычисления, получим в итоге для F конечное выражение, которое можно представить в виде ряда по степеням g и $\ln g$ с точностью до членов порядка $g^{2n}(\ln g)^m$. Сравнение приближений, полученных таким способом, показывает, что можно эффективно получать разложение матричных элементов в ряд модифицированной теории возмущений (по степеням $g^{\nu}(\ln g)^{n_\nu}$), если известно их разложение в ряд обычной теории возмущений при конечных значениях параметра обрезания. В заключение приведем наиболее общий вид рекуррентного соотношения /2/ между известными членами ряда теории возмущений (2.4)

$$(gD)^n \sum_{k=0}^{N_n} C_k^{(0)} D^k \frac{\partial^k F^{(0)}}{\partial D^k} + (gD)^{n-1} \sum_{k=0}^{N_{n-1}} C_k^{(1)} D^k \frac{\partial^k F^{(1)}}{\partial D^k} + \qquad (2.5)$$

$$+ \ldots \sum_{k=0}^{N_0} C_k^{(n)} D^k \frac{\partial^k F^{(n)}}{\partial D^k} = 0 .$$

Рекуррентное соотношение (2.5) является основой для получения дифференциального интерполирующего уравнения типа (2.1), ибо, как только определены соотношения между коэффициентами $C_k^{(0)}$, $C_k^{(1)} \ldots C_k^{(n)}$, то уравнение типа (2.1) для F можно получить опусканием индексов $F^{(i)}$ в (2.5).

В следующих двух пунктах мы рассмотрим применение МДИ в случае VPP- и VVP -вершинных функций.

§ 3. VPP -вершина

Лагранжиан взаимодействия векторных частиц A_k^{μ} с массой m и скалярных частиц Φ_k с массой M возьмем в виде /5/

$$L_{int} = \lambda c_{ijR} \; \Phi_i \frac{\partial \Phi_i}{\partial x^{\mu}} A_{\ell}^{\mu} . \qquad (3.1)$$

Здесь $C_{ij\ell}$ -структурные константы группы симметрии рассматриваемой теории, причем для SU_2 -группы $C_{ij\ell} = \epsilon_{ij\ell}$, где $\epsilon_{ij\ell}$ -совершенно антисимметричный тензор, а для SU_3 -группы $C_{ij\ell} = f_{ij\ell}$ /7/. Уравнение Эдвардса в лестничном приближении, которое графически изображено на рис. 1, для вершинной функции Γ_μ имеет вид

$$\Gamma_\mu(p,k) = 2p_\mu +$$
$$+ a\lambda \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4 i} \frac{(p+q)^2 - k^2 + m^{-2}[(p^2-q^2)^2 - (k,p-q)^2]}{[(q-\frac{k}{2})^2 + M^2][(q+\frac{k}{2})^2 + M^2][(p-q)^2 + m^2]} \Gamma_\mu(q,k), \tag{3.2}$$

где a = 1 для SU_2 -группы и a=3/2 - для SU_3 -группы. Исследуя уравнения такого рода в перенормируемых теориях, Эдвардс показал, что перенормировка теории приводит к появлению при неоднородном члене множителя Z , который может быть равен 0 или ∞ . Дополняя решение таким образом модифицированного уравнения условием нормировки вершины на массовой поверхности, получим перенормированную вершинную функцию /4/. Ввиду трудностей исследования даже приближенного уравнения Эдвардса положим $k_\mu = 0$, тогда $\Gamma_\mu(p,0) = 2p_\mu F(p^2)$.

Для главной части вершинной функции $F^{(0)}$, определяемой соотношением $F = F^{(0)} + F^{(1)}$, после перехода к сферическим координатам получим уравнение /5/

$$F(x) = Z + \lambda \{ \int_0^\infty dy \frac{y^2 F(y)}{(y+M^2)^2} + \frac{1}{x^2} \int_0^x dy \frac{y^4 F(y)}{(y+M^2)^2} -$$

$$-\frac{2}{x}\int_0^x dy\,\frac{y^3F(y)}{(y+M^2)^2}-2x\int_x^\infty dy\,\frac{y\,F(y)}{(y+M^2)^2}+x^2\int_x^\infty dy\,\frac{F(y)}{(y+M^2)^2}\;\},\qquad(3.3)$$

где $\tilde{\tilde{\lambda}} = a\lambda^2/32\pi^2 m^2$.

Уравнение (3.3) служит основой развиваемого ниже формализма метода дифференциальной интерполяции, который обсуждался в предыдущем пункте. Обрезая уравнение (3.3) на верхнем пределе и итерируя, в первом приближении по $\tilde{\tilde{\lambda}}$, получим следующий ряд теории возмущений

$$\begin{aligned}F(D,x) &= 1+\tilde{\tilde{\lambda}}\,[D-2(1+x)\ln D+\Phi(x)]+\ldots = \\ &= F^{(0)}+\tilde{\tilde{\lambda}}\,F^{(1)}+\ldots,\end{aligned}\qquad(3.4)$$

где

$$\Phi(x) = \frac{4+9x+\frac{16}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3}{x(1+x)} - \left(\frac{4}{x^2}+\frac{6}{x}-2x\right)\ln(1+x).$$

Рекуррентное соотношение (2.5) в данном случае имеет вид:

$$C_0^{(0)}\lambda D\,F^{(0)}+C_0^{(1)}F^{(1)}+C_1^{(1)}D\,\frac{\partial F^{(1)}}{\partial D}+C_2^{(1)}D^2\,\frac{\partial^2 F^{(1)}}{\partial D^2} = 0.\qquad(3.5)$$

Очевидно, что (3.4) удовлетворяет соотношению (3.5) при следуюших условиях: $C_0^{(1)} = 0$, $C_1^{(1)} = C_2^{(1)} = C_0^{(0)}$. Таким образом, $F(D,x)$ удовлетворяет интерполирующему дифференциальному уравнению

$$D^2\frac{\partial^2 F}{\partial D^2}+D\frac{\partial F}{\partial D}-\tilde{\tilde{\lambda}}\,D\,F = 0,\qquad(3.6)$$

решения которого суть $I_0(2\sqrt{\tilde{\tilde{\lambda}} D}$, $K_0(2\sqrt{\tilde{\tilde{\lambda}} D})$. Представим далее $F(D,x)$ в виде (2.2)

$$F(D,x) = I_0(2\sqrt{\tilde{\tilde{\lambda}} D})\, F_1(x) + K_0(2\sqrt{\tilde{\tilde{\lambda}} D})\, F_2(x). \tag{3.7}$$

Разлагая далее каждый член правой части соотношения (3.7) в ряд по степеням $\tilde{\tilde{\lambda}}$, получим

$$\begin{gathered} F(D,x) = [1 + \tilde{\tilde{\lambda}} D + \ldots](f_1^{(0)} + \tilde{\tilde{\lambda}} f_1^{(1)} + \tilde{\tilde{\lambda}} \ln \tilde{\tilde{\lambda}}\; f_1^{(1)} + \ldots) + \\ + [(-\gamma - \frac{1}{2} \ln \tilde{\tilde{\lambda}} - \frac{1}{2} \ln D) + \tilde{\tilde{\lambda}} D \quad - \quad \tilde{\tilde{\lambda}} D \quad (\gamma + \frac{1}{2} \ln \tilde{\tilde{\lambda}} + \\ + \frac{1}{2} \ln D)](f_2 \; + \tilde{\tilde{\lambda}} f_2^{(1)} + \ldots). \end{gathered} \tag{3.8}$$

Появление члена $\approx \tilde{\tilde{\lambda}} \ln \tilde{\tilde{\lambda}}$ в разложении $F_1(x)$ обусловлено тем, что $K_0(2\sqrt{\lambda D})$ имеет логарифмическую особенность по $\tilde{\tilde{\lambda}}$ в точке $\tilde{\tilde{\lambda}} = 0$, в то время как сингулярные члены в общем выражении (3.7) должны отсутствовать.

Сравнивая (3.8) с (3.4), получим следующие условия, которым должны подчиняться коэффициенты разложения $F_1(x)$ и $F_2(x)$:

$$f_1^{(0)} = 1, \quad f_2^{(1)} = 4(1 + x), \quad \tilde{\tilde{f}}_1^{(1)} = 2(1 + x), \quad f_2^{(0)} = 0,$$

$$f_1^{(1)} = 2\gamma(1 + x) + \Phi(x).$$

Подставляя далее эти значения коэффициентов разложения $F_1(x)$ и $F_2(x)$ в (3.7) и переходя к пределу $D \to \infty$, получим

$$F(\infty, x) = Z\{1 + \tilde{\tilde{\lambda}}[2(1 + x)\ln \tilde{\tilde{\lambda}} + 2\gamma(1 + x) + \Phi(x)] + \ldots\}. \tag{3.9}$$

Нормируя решение (3.9) условием $F(\infty, 0) = 1$, окончательно получим

$$F(\infty, x) = 1 + \tilde{\tilde{\lambda}}\,[2x \ln \tilde{\tilde{\lambda}} + x(2\gamma + \frac{1}{3}) + (\frac{4}{x} + 4) - \tag{3.10}$$
$$- (\frac{4}{x^2} + \frac{6}{x} - 2x) \ln(1 + x)] + \ldots$$

Точное решение, найденное в работе /5/, имеет вид

$$F(x) = 1 + \tilde{\tilde{\lambda}}\,[2x \ln \lambda + x(2 \ln 12 + 8\gamma - \frac{20}{3}) + \tag{3.11}$$
$$+ (\frac{4}{x} + 4) - (\frac{4}{x^2} + \frac{6}{x} - 2x) \ln(1 + x)] + \ldots$$

Из сравнения (3.10) и (3.11) получим

$$F(x) - F(\infty, x) \approx 1.43\, \tilde{\tilde{\lambda}}\, x,$$

откуда следует, что при достаточно малых значениях константы связи интерполированное решение дает хорошее приближение к точному решению при условии применимости модифицированной теории возмущений $|\tilde{\tilde{\lambda}}\, x \ln \tilde{\tilde{\lambda}}| \ll$ $\ll 1$.

§ 4. VVP -вершина

В качестве VVP -вершины рассмотрим $\omega\rho\pi$ -взаимодействие. Уравнение Эдвардса в случае $\omega\rho\pi$ -вершины изображено на рис. 2. Лагранжиан взаимодействия берется в виде /6/

$$L_{int} = g\epsilon_{ijk\ell}\; \partial_i \omega_j\; \partial_k \rho_\ell^a \pi^a . \tag{4.1}$$

Для упрощения задачи воспользуемся приближением мягких пионов: $m_\pi = 0$, $k_\pi = P_\omega + P_\rho = 0$, учтем также, что $m_\omega = m_\rho = M$. Тогда для функции $F(x) = F(\frac{p^2}{M^2}, \frac{p^2}{M^2})$, определяемой соотношением

$$\Gamma^{\mu\nu}(p_\omega, p_\rho) = g\epsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} p^\omega_\lambda p^{(\rho)}_\nu F(\frac{p^2_\omega}{m^2_\omega}, \frac{p^2_\rho}{m^2_\rho}), \tag{4.2}$$

получим уравнение, которое после перехода к евклидовому пространству импульсов и выполнения интегрирований по угловым переменным можно записать в виде /6/:

$$F(x) = Z' + \lambda \{ \int_0^x \frac{F(y)}{(y+M^2)^2} (\frac{y^4}{x^2} - \frac{2y^3}{x}) dy +$$

$$+ \int_x^\infty \frac{F(y)}{(y+M^2)^2} (x^2 - 2xy) dy \}, \tag{4.3}$$

где $\lambda \equiv g^2/384\pi^2$, фактор Z' определяет нормировку и во всех последующих выкладках будет опущен. Уравнение (4.3) неожиданным образом совпадает с уравнением (3.3) за исключением члена $I \equiv \int_0^\infty \frac{y^2 F(y)}{(y+M^2)^2}$, который при итерации (3.3) расходится линейным образом. Это единственное отличие, как это будет показано ниже, приводит к некоторому изменению в методе дифференциальной интерполяции в случае $\omega\rho\pi$ -взаимодействия. Действительно, первая итерация уравнения (4.3) дает только один сингулярный член $\approx \ln D$, характерный для перенормируемых теорий. Легко показать, что в этом случае МДИ не приводит ни к какому дифференциальному уравнению по параметру обрезания D . Поэтому необходима вторая итерация уравнения (4.3) в результате которой появляется степенным образом расходящиеся члены, характерные для неренормируемых теорий. Таким образом получим следующий ряд теории возмущений

$$F(D,x) = 1 + \lambda[-2x\ln D + \Phi_1(x)] + \lambda^2\Big[\frac{10}{3}xD + \nu(x)\ln D - x^2\ln^2 D + \Phi_2(x)\Big] + \ldots = F^{(0)} + \lambda F^{(1)} + \lambda^2 F^{(2)} + \ldots, \tag{4.4}$$

где $\nu(x) = 2x \ln x^2 - \frac{17}{6}x^2$,

$$\Phi_1(x) = 2x\ln x + \frac{1}{3}x, \tag{4.5}$$
$$\Phi_2(x) = \frac{17}{6}x^2\ln x - \frac{227}{72}x^2 - x^2\ln^2 x.$$

Рекуррентское соотношение (2.5) в данном случае запишется в виде:

$$(\lambda D)^2 C_0 F^{(2)} + \lambda D\Big[C_0^{(1)} F^{(1)} + C_1^{(1)} D \frac{\partial F^{(1)}}{\partial D}\Big] + C^{('')} F^{(2)} + C_1^{('')} D\frac{\partial F^{(2)}}{\partial D} + C_2^{('')} D^2\frac{\partial^2 F^{(2)}}{\partial D^2} + C_3^{('')} D^3\frac{\partial^3 F^{(2)}}{\partial D^3} = 0. \tag{4.6}$$

Ряд теории возмущений (4.4) удовлетворяет соотношению (4.6), если только: $c_0 = c_0^{(')} = c_0^{('')} = 0$, $c_1^{(')} = c_3^{(')}$, $c_3^{(')} = 3c_3^{('')}$, $c_1^{(')} = \frac{5}{3}c_3^{('')}$. Подставляя эти соотношения обратно в (4.6) и опуская индексы в $F^{(i)}$ получим дифференциальное интерполирующее уравнение следующего вида

$$D^3\frac{\partial^3 F}{\partial D^3} + 3D^2\frac{\partial^2 F}{\partial D^2} + \Big(1 + \frac{5}{3}\lambda D\Big)D\frac{\partial F}{\partial D} = 0. \tag{4.7}$$

Решения уравнения (4.7) представляются в виде функций Мейера /8/, причем $G^{10}_{13}(z) \equiv 1$, а $G^{20}_{13}(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$ и $G^{30}_{14}(z) \xrightarrow[z\to\infty]{} 0$, где введена безразмерная переменная $z = \frac{5}{3}\lambda D$. Представление (2.2) запишется в виде

$$F(z,x) = F_1(x) + G^{20}_{13}(z) F_2(x) + G^{30}_{13}(z) F_3(x). \tag{4.8}$$

Представим (4.8) при малых значениях λ в форме

$$\begin{aligned} F(z,x) = {} & (f_1^{(0)} + \lambda f_1^{(')} + \lambda \ln\lambda \,\tilde{\tilde{f}}_1^{(')} + \lambda^2 f_1^{(2)} + \lambda^2 \ln\lambda \,\tilde{\tilde{f}}_1^{(2)} + \\ & + \lambda^2 \ln^2\lambda\, f_1^{(3)} + \ldots) + [-2\gamma + z - \ln z - \frac{1}{8} z^2 + \ldots] \times \\ & \times (f_2^{(0)} + \lambda f^{(')} + \lambda \ln\lambda\, \tilde{\tilde{f}}_2^{(')} + \lambda^2 f_2^{(2)} + \lambda^2 \ln\lambda\, \tilde{\tilde{f}}_2^{(2)} + \\ & + \lambda^2 \ln^2\lambda\, f_2^{(3)} + \ldots) + [m_1 - m_2 z + m_3 z^2 + \\ & + 2\gamma \ln z - z\ln z + \frac{1}{2}\ln^2 z + \frac{z^2}{8}\ln z + \ldots] \times \\ & \times (f_3^{(0)} + \lambda f_3^{(')} + \lambda\ln\lambda\, \tilde{\tilde{f}}_3^{(1)} + \lambda^2 f_3^{(2)} + \lambda^2 \ln\lambda\, f_3^{(2)} + \\ & + \lambda^2 \ln\lambda\, f_3^{(3)} + \ldots), \end{aligned} \tag{4.9}$$

причем в квадратных скобках выписаны разложения $G_{13}^{(20)}(z)$ и $G_{13}^{30}(z)$ (см. Приложение). Появление членов $\approx \lambda\, ln\, \lambda$, $\lambda^2 ln\, \lambda$, $\lambda^2 ln^2 \lambda$ в разложениях $F_1(x)$, $F_2(x)$ и $F_3(x)$ обусловлено наличием такого рода членов в разложениях $G_{13}^{20}(z)$ и $G_{13}^{30}(z)$ при малых z, так как в общем выражении (4.8) сингулярные, т.е. неаналитические по λ члены, должны сокращаться. Из сравнения (4.9) с (4.4) получим следующие условия связи для отличных от нуля коэффициентов разложений $F_1(x)$, $F_2(x)$ и $F_3(x)$.

$$f_1^{(0)} = 1, \quad f_1^{(')} = \Phi_1(x) + 2x(2\gamma + ln\frac{5}{3}), \quad f_1^{(')} = \tilde{\tilde{f}}_1^{(')} = 2x$$

$$f_1^{(2)} = \Phi_2(x) - 2x^2[\frac{\pi^2}{6} + 6\gamma^2 + 2\gamma\, ln\frac{5}{3} + \frac{1}{2}ln^2\frac{5}{3}] -$$

$$-(2\gamma + ln\frac{5}{3})\nu(x), \quad f_1^{(3)} = \frac{1}{2}\tilde{\tilde{f}}_2^{(2)} = -x^2,$$

$$\tilde{\tilde{f}}_1^{(2)} = -[\nu(x) + 2x^2/2\gamma + ln\frac{5}{3})],$$

где $\nu(x)$, $\Phi_1(x)$, $\Phi_2(x)$ даны формулами (4.5).

Подставляя теперь эти значения коэффициентов обратно в (4.8) и переходя к пределу $z \to \infty$, получим с точностью до членов порядка λ (т.е. g^2)

$$F([,x) = 1 + \lambda x[2\, ln\, \lambda x + (2\gamma + ln\frac{5}{3} + \frac{1}{3})] + \ldots \qquad (4.10)$$

Точное решение, найденное в работе /6/, имеет вид

$$F(x) = 1 + \lambda x \, [\, 2 \ln \lambda x + 2 \, (4 \gamma + \ln 12 - \frac{10}{3})] + \cdots \qquad (4.11)$$

Из сравнения (4.10) и (4.11) получим, что

$$F(x) - F(\infty, x) \approx 0.921 \, \lambda x ,$$

откуда следует, что и в этом случае, как и в случае VPP -вершины, методом дифференциальной интерполяции получено решение, достаточно близкое к точному.

§ 5. Заключение

Выше был сформулирован метод дифференциальной интерполяции в рамках квантовой теории поля. Показана эффективность данного метода в построении рядов модифицированной теории возмущений для VPP и VVP вершинных функций. В случае VPP -вершины константа ренормировки $Z_{VPP} \equiv [\, I_0 \, (2 \sqrt{\lambda D} \,) \,]^{-1}$, а для VVP -вершины $Z_{VVP} \equiv 1$. Различия между точными решениями и интерполированными содержатся только в конечных членах, т.е. сингулярные члены (члены вида $g^{\nu} (\ln g)^{n_{\nu}}$) вычисляются точно. Необходимо отметить, что метод дифференциальной интерполяции можно применить для любых неренормируемых теорий с неизвестными точными решениями, в частности, значительный интерес представляет применение этого метода к слабым взаимодействиям элементарных частиц, что и будет предметом дальнейшего исследования.

В заключение автору приятно выразить свою глубокую благодарность А.Т. Филиппову и А.Н. Тавхелидзе.

Приложение

В этом приложении показано, как находить разложения функций Мейера, например $G^{30}_{13}(z\,|^{1}_{0,00})$, при малых z в случае, когда любые два параметра отличаются на целое число. Воспользуемся для этого представлением

$$G^{30}_{13}\left(z\,\middle|\,{1 \atop 0,0,0}\right) = \lim_{\delta\to 0} G^{30}_{13}\left(z\,\middle|\,{1 \atop 0+\delta c,\ 0+\delta \mathrm{a},\ 0+\delta \ell}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma[\delta(\mathrm{a}-c)]\,\Gamma[\delta(b-c)]}{\Gamma(1-\delta c)}\, z^{\delta c}\, {}_1F_2\left({\delta c \atop 1+\delta(c-\mathrm{a}),\ 1-\delta(b-c)}\,\middle|\, z\right) +$$

$$+ \frac{\Gamma[\delta(c-\mathrm{a})]\,\Gamma[\delta(b-\mathrm{a})]}{\Gamma(1-\delta \mathrm{a})}\, z^{\delta a}\, {}_1F_2\left({\delta \mathrm{a} \atop 1-\delta(\mathrm{a}-c),\ 1-\delta(b-\mathrm{a})}\,\middle|\, z\right), \qquad (\Pi.1)$$

$$+ \frac{\Gamma[\delta(c-b)]\,\Gamma[\delta(\mathrm{a}-b)]}{\Gamma(1-\delta b)}\, z^{\delta b}\, {}_1F_2\left({\delta b \atop 1-\delta(c-b),\ 1-\delta(\mathrm{a}-b)}\,\middle|\, z\right),$$

где

$${}_1F_2\left({\mathrm{a} \atop b,\,c}\,\middle|\, z\right) = \sum \frac{z^n}{n!}\,\frac{(\mathrm{a})}{(b)_n\,(c)_n}\,,\quad (a)_n = \frac{\Gamma(n+\mathrm{a})}{\Gamma(\mathrm{a})}\,. \qquad (\Pi.2)$$

Легко видеть, что второй член в (П.1) можно получить из первого заменой $a \to c$, а третий – заменой $b \to c$. Поэтому в явном виде достаточно вычислить только первый член. Для того чтобы найти предел $\delta \to 0$, достаточно разложить все функции по δ с точностью до δ^2 (в П.1 члены, пропорциональные δ^{-1}, δ^{-2}, сокращаются). При разложении удобно использовать следующие соотношения

$$z^{\delta} = 1 + \delta \ln z + \frac{\delta^2}{2} \ln^2 z + \ldots \qquad (\text{П.3})$$

$$\Gamma(N+\delta) = \Gamma(N)\{1 + \delta \Psi_{N-1} + \frac{\delta^2}{2}[\Psi'_{N-1} - \Psi^2_{N-1}] + \ldots\} \qquad (\text{П.4})$$

$$\Psi(z) = \Psi_{z-1} = \Gamma'(z)/\Gamma(z), \quad \Psi'_z = \frac{d\Psi_z}{dz} \quad \Psi'(z+1) - \Psi'_z$$

$$\frac{1}{\Gamma(N+\delta)} = \frac{1}{\Gamma(N)}\{1 - \delta \Psi_{N-1} - \frac{\delta^2}{2}[\Psi'_{N-1} - \Psi^2_{N-1}] + \ldots\}. \qquad (\text{П.5})$$

Для преобразований функций $\Gamma[\delta(a-c)]$, $\Gamma[\delta(b-c)]$ можно использовать известное соотношение

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}.$$

Подставляя разложения (П.3-5) в (П.1) и пользуясь данным соотношением в пределе $\delta \to 0$, получим с точностью до z^2 следующее выражение

$$G^{30}_{13}(z)_{z\to 0} \approx m - m_2 z + m_3 z^2 + m \quad z + 2\gamma \ln z - z \ln z +$$

$$+ \frac{1}{2} \ln^2 z + \frac{1}{8} z^2 \ln z + \dots, \tag{П.6}$$

где $\gamma = -\Psi_0 = 0.577\dots$ есть постоянная Эйлера,

$$m_1 = 2(\Psi'_0 - \Psi_0^2) + \frac{1}{2}(i\pi),$$

$$m_2 = \Psi_0 - 3\Psi_1, \tag{П.7}$$

$$m_3 = \frac{1}{8}(\Psi_1 - 3\Psi_2).$$

Точно таким же путем находится разложение $G^{20}_{13}(z)$, которое имеет вид

$$G^{20}_{13}(z)_{z\to 0} \approx -2\gamma + z - \ln z - \frac{1}{8} z^2 + \dots \tag{П.8}$$

Литература

1. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. ГИИТЛ, Москва, 1957.
2. A.T.Filippov, V.S.Gogokhia. Preprint JINR, E2-6043, Dubna 1971.
3. A.Bastai e.a. NC 30 (1963), 1512; 30 (1963) 1532.
4. S.F.Edwards. Phys.Rev., 90, 284 (1953).
5. Б.А. Арбузов, А.Т. Филиппов. Препринт ОИЯИ, Р-1910, Дубна, 1964. NC 38, 796 (1965).

6. A.T.Filippov, Yu.N.Yepifanov. Preprint JINR E2-6017, Dubna 1971.
7. M.Gell-Mann. The Eighfold Way. A.Theory of Strong Interection Symmetry. CTSL-20 (1961).
8. A.Erdely, W.Magnus, F.Oberhettinger, F.G.Tricomi. Higher Transcendental Functions. v.I. New-York, Toronto, London (1953).

Рукопись поступила в издательский отдел
25 августа 1972 года.