СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 6637

П.Н.Боголюбов

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

СТРУКТУРА НЕКОТОРЫХ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОММУТАТОРОВ ТОКОВ

1972

P2 - 6637

П.Н.Боголюбов

СТРУКТУРА НЕКОТОРЫХ МАТРИЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ КОММУТАТОРОВ ТОКОВ

Как известно, в теории глубоконеупругого рассеяния лептонов на адронах важное значение имеет изучение матричных элементов коммутаторов токов вне энергетической поверхности. В работе /I/ рассматривались выражения

$$W_{\mu,\nu} = \sum_{(\sigma)} \int \langle p,\sigma | [j_\mu(x), j_\nu(0)] | p,\sigma \rangle e^{iqx} dx, \tag{I}$$

в которых $j_\mu(x)$ - компоненты плотности электромагнитного тока, q - четырехимпульс виртуального фотона. Матричные элементы здесь берутся между одинаковыми однонуклонными состояниями $|p,\sigma\rangle$ с четырехимпульсом p $(p^2=M^2)$ и спином σ $(\sigma = \pm\frac{1}{2})$, с применением обычной релятивистской нормировки. В упомянутой работе /I/, в частности, было показано, что в представлении тензора $W_{\mu,\nu}$ через скалярные функции V_1, V_2:

$$W_{\mu,\nu} = (-g_{\mu\nu} q^2 + q_\mu q_\nu) V_1 +$$

$$+ \{ p_\mu p_\nu q^2 - (p_\mu q_\nu + q_\mu p_\nu)(q \cdot p) + g_{\mu\nu} (q \cdot p)^2 \} V_2 \tag{2}$$

эти скалярные функции могут быть выбраны так, чтобы они были причинными, т.е. чтобы их фурье-образы исчезали для пространственно-подобных x:

$$\tilde{V}_j(x) = 0 \quad \text{при} \quad x^2 < 0. \tag{3}$$

В настоящей работе мы рассмотрим возможность получения таких результатов для более общих случаев.

Рассмотрим тензоры

$$W_{\mu,\nu}^{(a,b)} = \sum_{(\sigma)} \int \langle p,\sigma | [j_\mu^{(a)}(x), j_\nu^{(b)}(0)] | p,\sigma \rangle e^{iqx} dx, \qquad (4)$$

где a, b – индексы, не связанные с тензорными индексами μ, ν, например, изотопические индексы, индексы, относящиеся к группе SU_3 и т.д. ; $j^{(a)}$ – векторные токи. Как всегда, в локальной квантовой теории поля, предполагается, что $W_{\mu,\nu}^{(a,b)}(q)$ являются обобщёнными функциями q медленного роста. Рассмотрим сначала общий случай, когда токи $j_\nu^{(a)}(x)$ не являются сохраняющимися, так что выражения

$$q \cdot W^{(a,b)} = \sum_{(\mu)} g_{\mu\mu} q_\mu W_{\mu,\nu}^{(a,b)}$$

$$W^{(a,b)} \cdot q = \sum_{(\nu)} W_{\mu,\nu}^{(a,b)} g_{\nu\nu} q_\nu \qquad (5)$$

могут быть отличны от нуля. Сначала покажем ряд важных свойств функций $W_{\mu,\nu}^{(a,b)}(q)$, которые далее будут использоваться. Возьмём фурье-образ $W_{\mu,\nu}^{(a,b)}(q)$:

$$\widetilde{W}_{\mu,\nu}^{(a,b)}(x) = \sum_{(\sigma)} \langle p,\sigma | [j_\mu^{(a)}(x), j_\nu^{(b)}(0)] | p,\sigma \rangle =$$

$$= \sum_{(\sigma)} \langle p,\sigma | [j_\mu^{(a)}(\tfrac{x}{2}), j_\nu^{(b)}(-\tfrac{x}{2})] | p,\sigma \rangle. \qquad (6)$$

В силу общего принципа локальной квантовой теории поля видно, что

$$\tilde{W}^{(a,b)}_{\mu,\nu}(x) = 0 \quad \text{при} \quad x^2 < 0; \tag{7}$$

т.е., что функции $W^{(a,b)}_{\mu,\nu}(q)$ являются причинными. Далее, из условия спектральности

$$W^{(a,b)}_{\mu,\nu}(q) = 0 \quad \text{при} \quad \frac{-q^2}{2|(qp)|} > 1. \tag{8}$$

Так как a и b в нашем рассмотрении будут фиксированными индексами, для сокращения записи мы будем их опускать, поскольку это не приведёт к недоразумениям.

Удобно выделить из тензора $W_{\mu,\nu}$ симметричный $S_{\mu,\nu}$ и антисимметричный $A_{\mu,\nu}$ тензоры

$$W_{\mu,\nu} = S_{\mu,\nu} + A_{\mu,\nu}$$

$$S_{\mu,\nu} = \frac{W_{\mu,\nu} + W_{\nu,\mu}}{2}, \quad A_{\mu,\nu} = \frac{W_{\mu,\nu} - W_{\nu,\mu}}{2}. \tag{9}$$

Из симметричного тензора S с помощью двух четырех-векторов q, p можно построить 4 лоренц-инварианта:

$$Sp\, S = \sum_{\nu=0}^{3} g_{\nu\nu} S_{\nu\nu}$$

$$q \cdot S \cdot q$$

$$p \cdot S \cdot p$$

$$q \cdot S \cdot p = p \cdot S \cdot q.$$

Таким образом, этот тензор можно представить с помощью четырех инвариантов, например:

$$S_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} U_1 + q_\mu q_\nu U_2 + (q_\mu p_\nu + p_\mu q_\nu) U_3 + p_\mu p_\nu U_4 \tag{10}$$

Для антисимметричного тензора A можно построить только один инвариант:

$$q \cdot A \cdot p = - p \cdot A \cdot q .$$

Таким образом, можно воспользоваться представлением

$$A_{\mu\nu} = (p_\mu q_\nu - q_\mu p_\nu) U_5 . \tag{11}$$

Так как $U_j(q)$ являются инвариантами, они могут зависеть от q только через 2 инварианта q^2, $(p \cdot q)$. Покажем теперь, что всегда можно определить функции $U_j(q)$ в формулах (10), (11) так, чтобы они были причинными и удовлетворяли условию типа (8):

$$U_j(q) = 0 \quad \text{при} \quad \frac{-q^2}{2|(q \cdot p)|} > 1 . \tag{12}$$

Для этого введём специальную систему отсчёта, в которой

$$\vec{p} = 0 , \tag{13}$$

а, следовательно:

$$p_0 = M \quad , \quad q \cdot p = M \cdot q_0 . \tag{14}$$

В этой системе U_j зависят от q только через посредство переменных

$$q_0^2 - \vec{q}^{\,2} \quad , \quad q_0$$

и поэтому они будут радиально симметричными по отношению к $\vec{q}$. Далее мы систематически будем использовать лемму III приложения I работы /I/:

Пусть функции $f_1(q)$, $f_2(q)$ будут причинными и удовлетворяют хотя бы одному соотношению вида:

$$\vec{q}^{\,2} f_1(q) = q_1^{n_1} q_2^{n_2} q_3^{n_3} f_2(q),$$

где n_1, n_2, n_3 – целые, такие, что

$$n_1 + n_2 + n_3 \geq 1 .$$

Пусть далее $f_2(q)$ будет радиально-симметричной. Тогда функция

$$f_2(q) / \vec{q}^{\,2} \tag{I5}$$

тоже будет радиально-симметричной причинной функцией. Здесь функция (I5) определяется как фурье-образ потенциала

$$\frac{1}{4\pi} \int \frac{\tilde{f}_2(x_0, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d\vec{y}. \tag{I6}$$

Чтобы применить эту лемму в нашем случае, рассмотрим формулу (II). В принятой специальной системе отсчёта (I3)

$$A_{0,\alpha} = q_\alpha M U_5 \quad , \quad \alpha = 1, 2, 3.$$

Поэтому
$$\sum_{\alpha=1}^{3} A_{0,\alpha} q_\alpha = \vec{q}^{\,2} M U_5 \tag{I7}$$

и
$$\vec{q}^{\,2} A_{0,\alpha} = q_\alpha (\vec{q}^{\,2} M U_5).$$

Но так как $W_{\mu,\nu}$ причинны, $S_{\mu,\nu}$ и $A_{\mu,\nu}$ также будут причинными и, в частности, причинными будут и

$$A_{0,\alpha} \quad \text{и} \quad \vec{q}^{\,2} M U_5 = \sum_{\alpha=1}^{3} A_{0,\alpha} q_\alpha .$$

Поэтому на основании вышеприведённой леммы (форма (I7) радиально-симметрична) радиально-симметричная функция

$$\frac{1}{M\vec{q}^{\,2}}\sum_{\alpha=1}^{3} A_{0,\alpha}\, q_\alpha = U_5 \tag{I8}$$

будет причинной.

Из (8) и (9) следует, что $A_{\mu,\nu}$ удовлетворяет (8) и потому U_5 будет удовлетворять условию (I2). В частном случае, когда рассматриваемые токи j сохраняются,

$$0=\sum_{\alpha=0}^{3} g_{\alpha\alpha} q_\alpha A_{0,\alpha} = q_0 A_{0,0} - \sum_{\alpha=1}^{3} q_\alpha A_{0,\alpha} = -\sum_{\alpha=0}^{3} q_\alpha A_{0,\alpha} = 0$$

и потому $U_5=0$. Таким образом, в этом частном случае из (II) получим:

$$A_{\nu,\mu}=0\,;\quad W_{\nu,\mu}=S_{\nu,\mu}\,. \tag{I9}$$

Рассмотрим теперь формулы (I0).

$$S_{\alpha,\beta} = -\delta_{\alpha\beta}\, U_1 + q_\alpha q_\beta\, U_2\,,\quad \alpha,\beta=1,2,3. \tag{20}$$

Отсюда

$$\sum_{\alpha=1}^{3} S_{\alpha,\alpha} = -3U_1 + \vec{q}^{\,2} U_2\,,$$

$$\vec{q}\,S\,\vec{q} = \sum_{\alpha,\beta=1,2,3} q_\alpha S_{\alpha,\beta}\, q_\beta = (-U_1+\vec{q}^{\,2}U_2)\,\vec{q}^{\,2}$$

$$(\vec{q}\cdot S)_\beta = \sum_{\alpha=1}^{3} q_\alpha S_{\alpha,\beta} = (-U_1+\vec{q}^{\,2}U_2)\,q_\beta. \tag{2I}$$

Следовательно:

$$\vec{q}^{\,2} \sum_{\alpha=1}^{3} q_\alpha S_{\alpha,\beta} = \{\vec{q}\cdot S\cdot\vec{q}\}\, q_\beta .$$

Но обе функции q :

$$\sum_{\alpha=1}^{3} q_\alpha S_{\alpha,\beta}\ , \quad \vec{q}\cdot S\cdot\vec{q}$$

являются причинными, а $\vec{q}S\vec{q}$, кроме того, радиально-симметрична. Поэтому на основании упоминавшейся леммы

$$\frac{1}{\vec{q}^{\,2}} \{\vec{q}\cdot S\cdot\vec{q}\}$$

будет радиально-симметричной причинной функцией. Используя (2I), можно положить

$$-U_1 + \vec{q}^{\,2} U_2 = \frac{1}{\vec{q}^{\,2}} \{\vec{q}\cdot S\cdot\vec{q}\}$$

Отсюда, ещё раз учитывая (2I), получим:

$$2U_1 = \frac{1}{\vec{q}^{\,2}} \{\vec{q}\cdot S\cdot\vec{q}\} - \sum_{\alpha=1}^{3} S_{\alpha,\alpha}\ ,$$

$$2\vec{q}^{\,2} U_2 = \frac{3}{\vec{q}^{\,2}} \{\vec{q}\cdot S\cdot\vec{q}\} - \sum_{\alpha=1}^{3} S_{\alpha,\alpha}\ . \qquad (22)$$

Видно, что радиально-симметричные функции U_1 и $\vec{q}^{\,2} U_2$ являются причинными. Чтобы доказать причинность самой функции U_2, отметим, что из (20)

$$S_{1,2} = q_1 q_2 U_2$$

и

$$\vec{q}^{\,2} S_{1,2} = q_1 q_2 \left\{ \frac{3}{2\vec{q}^{\,2}}\, \vec{q}\cdot S\cdot\vec{q} - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{3} S_{\alpha,\alpha} \right\}$$

Применяя опять ту же лемму, получим, что, положив

$$U_2 = \frac{1}{2\vec{q}^2}\left\{\frac{3\vec{q}\cdot S\cdot\vec{q}}{\vec{q}^2} - \sum_{\alpha=1}^{3} S_{\alpha,\alpha}\right\}, \tag{23}$$

она будет причинной функцией.

Далее, так как $S_{\nu,\mu}$ удовлетворяет условию (8), нетрудно заметить из (22), (23), что функции U_1 и U_2 также удовлетворяют условию (I2). Рассмотрим возможное определение U_3. Из (I0) следует, что

$$S_{0,\alpha} = q_0 q_\alpha U_2 + M q_\alpha U_3 = M q_\alpha\left(U_3 + \frac{q_0}{M}U_2\right).$$

отсюда нетрудно получить

$$\frac{1}{M}\sum_{\alpha=1}^{3} S_{0,\alpha} q_\alpha = \vec{q}^2\left(U_3 + \frac{q_0}{M}U_2\right)$$

и

$$\frac{1}{M}\vec{q}^2 S_{0,\alpha} = \left(\frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{3} S_{0,\nu} q_\nu\right) q_\alpha .$$

Поэтому функция

$$\frac{1}{\vec{q}^2}\left(\frac{1}{M}\sum_{\nu=1}^{3} S_{0,\nu} q_\nu\right)$$

получается радиально-симметричной причинной функцией.

Положив

$$U_3 = -\frac{q_0}{M}U_2 + \frac{1}{M\vec{q}^2}\sum_{\nu=1}^{3} S_{0,\nu} q_\nu =$$

$$= -\frac{q_0}{2M\vec{q}^2}\left\{\frac{3\vec{q}\cdot S\cdot\vec{q}}{\vec{q}^2} - \sum_{\alpha=1}^{3} S_{\alpha,\alpha}\right\} + \frac{1}{M\vec{q}^2}\sum_{\nu=1}^{3} S_{0,\nu} q_\nu, \tag{24}$$

видно, что эта радиально-симметричная функция также будет причинной и на основании (8) видно, что она удовлетворяет условию (I2).

Из формулы (I0) следует, что

$$M^2 U_4 = S_{c,c} - U_1 - q_c^2 U_2 - 2 q_c M U_3 \tag{25}$$

и потому U_4 также будет причинной, радиально-симметричной функцией, удовлетворяющей условию (I2).

Итак, резюмируя всё вышесказанное, для рассматриваемого тензора $W_{\mu,\nu}$ получаем представление вида:

$$W_{\mu,\nu} = g_{\mu\nu} U_1 + q_\mu q_\nu U_2 + (q_\mu P_\nu + P_\mu q_\nu) U_3 + \\ + P_\mu P_\nu U_4 + (P_\mu q_\nu - q_\mu P_\nu) U_5 , \tag{26}$$

в котором инвариантные функции U_j причинны и удовлетворяют условию (I2). Поэтому для них можно воспользоваться интегральным представлением Йоста-Лемана-Дайсона в специальной лабораторной системе отсчёта (I3), так как в этой системе U_j будут радиально-симметричными.

Выше мы рассмотрели случай векторных токов j. Это было существенно только потому, что мы считали, что $W_{\mu,\nu}$ является тензором. Если оба тока $j^{(a)}$ и $j^{(b)}$ являются псевдовекторами, то $W_{\mu,\nu}$ также будет тензором и все полученные результаты остаются справедливыми. Если один из токов $j^{(a)}$, $j^{(b)}$ является векторным, а другой псевдовекторным, то $W_{\mu,\nu}$ будет псевдотензором. Этот случай получается ещё более простым. Действительно, из двух векторов q и p можно построить с точностью до скалярного множителя только один псевдотензор

$$\sum_{(\lambda,\rho)} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, q_\lambda\, p_\rho\, g_{\lambda\lambda}\, g_{\rho\rho}\ .$$

Поэтому для псевдотензорного $W_{\mu,\nu}$

$$W^{ps}_{\mu,\nu} = \sum_{(\lambda,\rho)}{}' \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, q_\lambda\, p_\rho\, g_{\lambda\lambda}\, g_{\rho\rho}\, U_6, \qquad (27)$$

где U_6 – скалярная функция, зависящая от q только через инварианты q^2 и qp. В лабораторной системе отсчёта (I3):

$$W_{\alpha,\beta} = M \sum_{\gamma=1}^{3} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, q_\gamma\, U_6,$$

так что

$$W_{2,3} = -W_{3,2} = M q_1 U_6$$

$$W_{3,1} = -W_{1,3} = M q_2 U_6$$

$$W_{1,2} = -W_{2,1} = M q_3 U_6 .$$

Отсюда

$$\vec{q}^{\,2} U_6 = \frac{1}{2M} \Big\{ q_1 (W_{2,3} - W_{3,2}) + q_2 (W_{3,1} - W_{1,3}) +$$

$$+ q_3 (W_{1,2} - W_{2,1}) \Big\} =$$

$$= \frac{1}{2M} \sum_{(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, q_\alpha\, W_{\beta,\gamma}$$

и

$$\vec{q}^{\,2}\, W_{2,3} = \frac{q_1}{2} \sum_{(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, q_\alpha\, W_{\beta,\gamma} .$$

Из этих соотношений легко видеть, что

$$U_6 = \frac{1}{\vec{q}^{\,2}}\; \frac{1}{2M} \sum_{(\alpha,\beta,\gamma=1,2,3)}' \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\, q_\alpha\, W_{\beta,\gamma} \qquad \text{является} \tag{28}$$

причинной радиально-симметричной функцией q . Рассмотрим теперь общий случай, когда токи j состоят из суперпозиции векторных и аксиальных (псевдовекторных) токов. Такой случай имеет место при рассмотрении токов, соответствующих слабым взаимодействиям. В этом случае коммутатор

$$\left[j^{(a)}(x),\, j^{(b)}(0) \right]$$

будет состоять из суммы коммутаторов между двумя векторными токами, между двумя псевдовекторными и одним векторным, а другим псевдовекторным токами. Таким образом, величины $W_{\mu,\nu}$ могут быть выражены через шесть скалярных причинных функций U_j (вообще зависящих ещё от индексов a , b), удовлетворяющих условию (I2):

$$W_{\mu,\nu} = g_{\mu\nu} U_1 + q_\mu q_\nu U_2 + (q_\mu P_\nu + P_\mu q_\nu) U_3 + P_\mu P_\nu U_4 +$$

$$+ (P_\mu q_\nu - q_\mu P_\nu) U_5 + \sum_{(\rho,\lambda)} \epsilon_{\mu\nu\lambda\rho}\, g_{\rho\rho}\, g_{\lambda\lambda}\, P_\rho\, q_\lambda\, U_6 . \tag{29}$$

Перейдём к рассмотрению специального случая, когда токи $j^{(a)}, j^{(b)}$ сохраняются. Как было показано, в этом случае

$$U_5 = 0, \tag{30}$$

а функции U_1, U_2, U_3, U_4 можно выразить с помощью законов сохранения через две скалярные функции. Здесь можно заметить, что формулы (22-25) справедливы и при наличии у $W_{\mu,\nu}$ псевдотензорной части, везде в них можно заменить $S_{\mu,\nu}$ на $W_{\mu,\nu}$, так как в них будут входить только симметричные комбинации W. Введём инвариантные причинные функции:

$$M^2 F_1 = \sum_{(\mu,\nu)} g_{\mu\mu} g_{\nu\nu} P_\mu P_\nu W_{\mu,\nu}.$$

$$F_2 = F_1 - \sum_{(\mu)} g_{\mu\mu} W_{\mu,\mu}. \tag{31}$$

В системе отсчёта (13)

$$F_1 = W_{0,0}, \quad F_2 = \sum_{\alpha=1}^{3} W_{\alpha,\alpha}. \tag{32}$$

В силу законов сохранения

$$(\vec{q} \cdot W)_\nu = \sum_{\alpha=1}^{3} q_\alpha W_{\alpha,\nu} = q_0 W_{0,\nu},$$

$$(W \cdot \vec{q})_\nu = q_0 W_{\nu,0},$$

$$\sum_{\nu=1}^{3} W_{0,\nu} q_\nu = W_{0,0} q_0,$$

$$\vec{q} \cdot W \cdot \vec{q} = q_0^2 W_{0,0}.$$

Поэтому, используя определения (22-25), получим

$$U_2 = \frac{1}{2\vec{q}^2}\left\{\frac{3q_0^2 F_1}{\vec{q}^2} - F_2\right\},$$

$$U_1 = \frac{1}{2}\left\{\frac{q_0^2 F_1}{\vec{q}^2} - F_2\right\} = \vec{q}^2 U_2 - \frac{q_0^2}{\vec{q}^2} F_1 =$$

$$= q^2 U_2 + \left(q_0^2 U_2 - \frac{q_0^2}{\vec{q}^2} F_1\right),$$

$$M U_3 = -q_0 U_2 + \frac{q_0}{\vec{q}^2} F_1$$

$$M^2 U_4 = F_1 - U_1 - q_0^2 U_2 - 2q_0 M U_3 = \qquad (33)$$

$$= F_1 + q^2 U_2 - \left(q_0^2 U_2 - \frac{q_0^2}{\vec{q}^2} F_1\right) - q_0^2 U_2 + 2q_0^2 U_2 - 2\frac{q_0^2}{\vec{q}^2} F_1 =$$

$$= q^2 U_2 + F_1\left(1 - \frac{q_0^2}{\vec{q}^2}\right) = q^2 U_2 \quad F_1 \frac{q^2}{\vec{q}^2}$$

Как было показано, функция

$$\frac{q_0}{\vec{q}^2} F_1 = \frac{\sum_{v=1}^{3} W_{0,v} q_v}{\vec{q}^2} \qquad (34)$$

является причинной. Отсюда, однако, не следует, что и функция $\frac{1}{\vec{q}^2} F_1$, будет причинной. В x - представлении

$$\left(\widetilde{\frac{1}{\vec{q}^2} F_1}\right)_x = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\tilde{F}_1(x_0, \vec{y})}{|\vec{x} - \vec{y}|} d\vec{y}$$

и, так как F_1 является причинной и радиально-симметричной,

$$\left(\widetilde{\frac{1}{q^2} F_1}\right)_x = \frac{\frac{1}{4\pi}\int \widetilde{F}_1(x_0, \vec{y})\, d\vec{y}}{|\vec{x}|} \quad \text{для } |\vec{x}| > |x_0|. \tag{35}$$

Так как (34) причинна, видно, что

$$\frac{\partial}{\partial x_0} \int \widetilde{F}_1 (x_0, \vec{y})\, d\vec{y} = 0$$

т.е.

$$\int \widetilde{F}_1 (x_0, \vec{y})\, d\vec{y} = Const. \tag{36}$$

Эта константа C может зависеть от индексов a , b : $C = C^{(a,b)}$. На основании (6)

$$\widetilde{F}^{(a,b)}(x) = \sum_{(\sigma)} \langle p, \sigma | [j_0^{(a)}(\tfrac{x}{2}), j_0^{(b)}(-\tfrac{x}{2})] | p, \sigma \rangle,$$

откуда видно, что

$$\widetilde{F}^{(a,b)}(-x) = -\widetilde{F}^{(b,a)}(x)$$

Но, так как (36) не зависит от x_0 ,

$$C^{(a,b)} = \int \widetilde{F}_1^{(a,b)}(-x_0, \vec{y})\, d\vec{y} = \int \widetilde{F}_1^{(a,b)}(-x_0, -\vec{y})\, d\vec{y} =$$

$$= -\int \tilde{F}^{(b,a)}(x_0,\vec{y})\, d\vec{y},$$

т.е. $C^{(a,b)} + C^{(b,a)} = 0$ (37)

Введём в рассмотрение функцию

$$f(q) = 2\pi C^{(a,b)} \epsilon(q^0)\, \delta(q_0^2 - \vec{q}^{\,2}), \tag{38}$$

которая будет причинной, так как её фурье-образ пропорционален $\epsilon(x^0)\,\delta(x^2)$. Получим:

$$f(q_0,\vec{q}) = \int \tilde{f}(x_0,\vec{y})\, e^{iq_0x_0} e^{-i\vec{q}\vec{y}}\, dx_0\, d\vec{y}$$

поэтому

$$2\pi C^{(a,b)}\delta(q_0) = 2\pi C^{(a,b)}\epsilon(q_0)q_0\,\delta(q_0^2) =$$

$$= \int \tilde{f}(x_0,\vec{y})\, e^{iq_0x_0}\, dx_0\, d\vec{y},$$

а, так как

$$2\pi\,\delta(q_0) = \int e^{iq_0x_0}\, dx_0,$$

отсюда получим, что

$$\int \tilde{f}(x_0,\vec{y})\, d\vec{y} = C^{(a,b)}.$$

Следовательно,

$$\int \{\tilde{F}_1(x_0,\vec{y}) - \tilde{f}(x_0,\vec{y})\} d\vec{y} = 0,$$

и потому функция

$$\frac{F_0(q)}{\vec{q}^{\,2}} = \frac{F_1(q) - f(q)}{\vec{q}^{\,2}} = \frac{F_1(q) - 2\pi C^{(a,b)} \epsilon(q_0) q_0\, \delta(q^2)}{\vec{q}^{\,2}} \tag{39}$$

будет причинной. Так как $f(q)$ исчезает при $q^2 < 0$, то $F_0(q)$ так же,как и $F_1(q)$ удовлетворяет условию (I2).

Введём обозначения

$$V_1 = \frac{1}{2\vec{q}^{\,2}} \left\{ \frac{3q_0^2}{\vec{q}^{\,2}} F_1 - F_2 \right\},$$

$$V_2 = V_1 - \frac{F_0(q)}{\vec{q}^{\,2}}.$$

Так как

$$\frac{q_0^2 f(q)}{\vec{q}^{\,2}} = 2\pi C^{(a,b)} \epsilon(q_0) \frac{q_0^3 \delta(q_0^2 - \vec{q}^{\,2})}{\vec{q}^{\,2}} =$$

$$= 2\pi C^{(a,b)} \epsilon(q_0)\, q_0\, \delta(q^2),$$

$$q^2 f(q) = 2\pi C^{(a,b)} \epsilon(q_0) q_0\, q^2\, \delta(q^2) = 0,$$

то из (33) получим:

$$U_2 = V_1 \ ,$$

$$U_1 = -q^2 V_1 + q_0^2 V_2 + 2\pi C^{(a,b)} \epsilon(q_0) q_0 \, \delta(q^2) ,$$

$$M U_3 = -q_0 V_1 - 2\pi C^{(a,b)} \epsilon(q_0) \, \delta(q^2) ,$$

$$M^2 U_4 = q^2 V_2 \tag{40}$$

Эти формулы получены в лабораторной системе (I3). Чтобы перейти к произвольной системе отсчёта, достаточно произвести тривиальную замену

$$q_0 \to \frac{q \cdot P}{M}$$

$$\vec{q}^{\,2} = q_0^2 - q^2 \to \frac{(qP)^2}{M^2} - q^2 . \tag{4I}$$

Видно, что псевдотензорная часть в (29):

$$W^{PS}_{\mu,\nu} = \sum_{(\rho,\lambda)}' \epsilon_{\nu\mu\lambda\rho} \, g_{\rho\rho} g_{\lambda\lambda} P_\rho q_\lambda \, U_6$$

удовлетворяет законам сохранения

$$\sum_{(\mu)}' g_{\mu\mu} q_\mu W^{PS}_{\mu,\nu} = \sum_{(\nu)}' g_{\nu\nu} q_\nu W^{PS}_{\mu,\nu} = 0 .$$

Положив

$$U_6 = V_3 \tag{42}$$

и подставив в (29) формулы (30),(40),(4I), для случая сохраняющихся токов, получим окончательно:

$$
\begin{aligned}
W_{\mu\nu} = {} & (-g_{\mu\nu} q^2 + q_\mu q_\nu) V_1 + \\
& + \left[P_\mu P_\nu q^2 - (q_\mu P_\nu + P_\mu q_\nu)(Pq) + g_{\mu\nu} (qP)^2 \right] \frac{1}{M^2} V_2 + \\
& + 2\pi C^{(a b)} \epsilon(q_0) \delta(q^2) \left[g_{\mu\nu}(qP) - (q_\mu P_\nu + P_\mu q_\nu) \right] \frac{1}{M} + \sum_{(\rho,\lambda)} \epsilon_{\nu\mu\rho\lambda} q_\lambda P_\rho V_3 .
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Здесь V_1 , V_2 , V_3 – инвариантные причинные функции, удовлетворяющие условиям (I2). Если токи j чисто векторные, псевдотензорный член в (43) будет отсутствовать $(V_3 = 0)$. Кроме того, если $a = b$, т.е. мы рассматриваем коммутатор между одним током, то , в силу (38) $C^{(a,a)} = 0$ и получается результат работы /I/. Следует отметить, что при исследовании асимптотического поведения при

$$
q^2 \to -\infty , \quad \frac{-q^2}{2(q \cdot P)} = \xi = \mathrm{Const} ,
$$

член с $C^{(a,b)}$ как пропорциональный $\delta(q^2)$ из формулы (43) выпадает.

Автор благодарен В.А.Матвееву и А.Н.Тавхелидзе за обсуждение результатов работы.

Литература

I. Н.Н.Боголюбов, В.С.Владимиров, А.Н.Тавхелидзе. Препринт ОИЯИ Е2-6490, Дубна 1972.

Рукопись поступила в издательский отдел
3I июля 1972 г.