СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6636

В.А.Матвеев

АВТОМОДЕЛЬНАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ВИРТУАЛЬНОГО КОМПТОН-ЭФФЕКТА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

P2 - 6636

В.А.Матвеев

АВТОМОДЕЛЬНАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ВИРТУАЛЬНОГО КОМПТОН-ЭФФЕКТА

§ I. Введение

Проблема описания асимптотического поведения процессов глубоко-неупругого взаимодействия лептонов с адронами привлекает в последние годы большое внимание теоретиков.

В недавних работах Н.Н. Боголюбова, В.С. Владимирова и А.Н. Тавхелидзе была поднята проблема корректного теоретического обоснования автомодельного асимптотического поведения формфакторов глубоко-неупругих процессов в рамках общих принципов локальной квантовой теории поля[I].

Отметим, что на важность изучения асимптотического поведения формфакторов глубоко-неупругих взаимодействий было указано М.А. Марковым ещё в 1963 году[2]. Им был предсказан эффект точечно-подобного поведения полных сечений лептон--адронных взаимодействий в области высоких энергий и больших передач импульса, получивший впоследствии экспериментальное подтверждение.

Развитие этих идей привело к формулировке принципа автомодельности, позволяющего, исходя из соображений подобия и размерности, единым образом описать асимптотическое поведение формфакторов различных лептон-адронных взаимодействий в глубоко-неупругой области[3,4]. Результаты, вытекающие из принципа автомодельности, обобщают в известной мере предположение о том, что асимптотическое поведение формфакторов глубоко-

-неупругого рассеяния лептонов на нуклонах определяется лишь одной безразмерной переменной, построенной из кинематических инвариантов[5].

В работах Н.Н. Боголюбова, В.С. Владимирова и А.Н. Тавхелидзе было дано строгое математическое обоснование непротиворечивости гипотезы об автомодельном поведении формфакторов процесса глубоко-неупругого рассеяния электрона на нуклонах.

В основе используемого в этих работах метода лежит спектральное представление Иоста-Лемана-Дайсона для Фурье--образа матричного элемента коммутатора локальных токов. Здесь найдены, в частности, условия на весовые функции в спектральном представлении, не противоречащие известным положениям квантовой теории поля и обеспечивающие существование автомодельных асимптотик определенного типа для формфакторов, связанных с Фурье-образом коммутатора токов. Кроме того, изучена связь автомодельного асимптотического поведения с характером сингулярностей коммутатора токов на световом конусе.

Следует отметить, что изучению этих вопросов посвящено в последнее время большое число работ[6-9][x)]. Однако весьма ограничительные дополнительные условия, используемые

[x)] Гипотеза автомодельного поведения в процессах сильного взаимодействия адронов при высоких энергиях обсуждается в работах[10,11].

в работах[6-9], и формальный в ряде мест характер выкладок оставляют место для сомнений в общности результатов этих исследований.

В настоящей работе обобщается развитый в работах[1] метод исследования асимптотического поведения форм-факторов в глубоко-неупругой области на случай недиагональных матричных элементов коммутатора двух электромагнитных токов, определяющих спектральную функцию амплитуды виртуального комптон-эффекта при отличных от нуля передачах импульса:

$$\gamma_\mu(q_1) + P_1 \to \gamma_\nu(q_2) + P_2 .$$

В §2 работы рассматривается кинематика процесса в произвольной и в брейтовской системах, излагается общий подход к выводу унитарных ограничений сверху на недиагональные матричные элементы виртуального комптон-эффекта. В §3 исследуется асимптотическое поведение обобщенной функции медленного роста $F(Q,\vec{P})$ в области

$$-Q^2,\ Q_0 \to +\infty \tag{I.1}$$

$$\zeta = -\frac{Q^2}{2E_P Q_0}\ ;\quad \vec{n} = \frac{\vec{Q}}{|\vec{Q}|}\ ;\quad \vec{P} - \text{фикс.}\ ;\quad E_P = \sqrt{M^2+\vec{P}^2},$$

являющейся Фурье-образом "причинной" функции $\mathcal{F}(x,\vec{P})$, т.е. обращающейся в нуль при $x^2<0$, и удовлетворяющей представлению Йоста-Лемана-Дайсона [12]

$$F(Q,\vec{P}) = \int \epsilon(Q_0)\,\delta\left[Q_0^2 - (\vec{Q}-\vec{u})^2 - \lambda^2\right]\cdot \varphi(\vec{u},\vec{P};\lambda^2)\,d\vec{u}\,d\lambda^2. \tag{I.2}$$

Здесь $\vec{P}$ – пространственный импульс начального адрона в брейтовской системе $(\vec{P}_1+\vec{P}_2=0)$, $\psi(\vec{u},\vec{P};\lambda^2)$ – – весовая функция, являющаяся обобщенной функцией медленного роста, носитель которой сосредоточен в множестве:

$$\left[(\vec{u},\lambda^2)_p : |\vec{u}|\leq E_p \ ; \ \lambda^2 \geqslant \left(E_p-\sqrt{E_p^2-\vec{u}^2}\right)^2\right]. \tag{I.3}$$

Показано, что условия на характер поведения весовой функции $\psi(\vec{u},\vec{P};\lambda^2)$ при больших λ^2, сформулированные в работах [1], приводят без дополнительных ограничений к асимптотическому поведению автомодельного типа для функции $F(Q,\vec{P})$ в области (I.I). Например, в предположении, что существует слабый предел

$$\lim_{\lambda^2\to+\infty} \lambda^{-2K}\psi(E_p\vec{r},\vec{P};\lambda^2)=\frac{1}{E_p^3}\psi_0(\vec{r},\vec{P}); \quad |\vec{r}|\leq 1. \tag{I.4}$$

при $K>-1$, найдена автомодельная асимптотика вида:

$$F(Q,\vec{P}) \sim \nu^K \Gamma(K+1)\cdot \Phi_{K+2}(\ell,\vec{n},\vec{P}); \quad \nu\sim+\infty, \tag{I.5}$$

где коэффициентная функция

$$\Phi_K(\ell,\vec{n},\vec{P})=\frac{1}{\Gamma(K-1)}\int\limits_{|\vec{r}|\leq 1} d\vec{r}\,\psi_0(\vec{r},\vec{P})\,(\vec{n}\cdot\vec{r}-\ell)_+^{K-2} \tag{I.6}$$

обращается в нуль при $\ell>1$.

В §4 изучается связь поведения величины $\mathcal{F}(x,\vec{p})$ в окрестности светового конуса с автомодельной асимптотикой Фурье-образа $F(Q,\vec{p})$ в области (I.I).

В частности, при условии существования слабого предела (I.4) найдено следующее асимптотическое поведение $\mathcal{F}(x,\vec{p})$ вблизи светового конуса:

$$\mathcal{F}(x,\vec{p}) \underset{x^2\sim 0}{\sim} \frac{2i}{\pi} G(\vec{x},\vec{p})\cdot(-\Box)^{k}\left[\frac{\mathcal{D}(x,0)}{x^2}\right], \tag{I.7}$$

где $\mathcal{D}(x,0)$ есть известная перестановочная функция скалярного поля нулевой массы,

$$G(\vec{x},\vec{p}) = \int\limits_{|\vec{r}|\leq 1} d\vec{r}\, e^{iE_p(\vec{x}\cdot\vec{r})}\cdot \psi_0(\vec{r},\vec{p}) \tag{I.8}$$

есть целая аналитическая функция $\vec{x}$.

Указывается, что в частном случае, когда направление вектора $\vec{x}$ совпадает с $\vec{n}$, величина $G(\vec{x},\vec{p})$ может быть непосредственно выражена через коэффициентную функцию $\Phi_1(l,\vec{n},\vec{p})$, определяющую автомодельную асимптотику (I.5), по формуле:

$$G(\vec{n}\cdot|\vec{x}|,\vec{p}) = \int\limits_{-1}^{1} dl\, \Phi_1(l,\vec{n},\vec{p})\, e^{iE_p l|\vec{x}|}. \tag{I.9}$$

Используемые в этой работе сведения математического характера читатель может найти в монографиях [13,14].

§2. Кинематика процесса

Спектральная функция процесса виртуального комптон-эффекта $\gamma_\mu(q_1)+p_1\to\gamma_\nu(q_2)+p_2$ определяется Фурье-образом коммутатора электромагнитных токов

$$W_{\mu\nu}(P,Q,\Delta)=\frac{1}{4\pi}\cdot\int dx\, e^{ixQ}\langle p_2|[J_\mu(\tfrac{x}{2}),J_\nu(-\tfrac{x}{2})]|p_1\rangle \tag{2.1}$$

между состояниями частиц, нормированными релятивистски инвариантным образом *

$$\langle p_2|p_1\rangle=(2\pi)^3\cdot 2p_0\,\delta(\vec{p}_1-\vec{p}_2)\,;\quad p_0=\sqrt{M^2+\vec{p}_1^{\,2}}. \tag{2.2}$$

Здесь выбраны следующие переменные

$$P=\frac{1}{2}(p_1+p_2)\,;\ Q=\frac{1}{2}(q_1+q_2)\,;\ \Delta=(p_1-p_2)=-(q_2-q_1), \tag{2.3}$$

из которых можно построить четыре независимых инварианта

$$Q^2\,;\ \nu=2PQ\,;\ t=\Delta^2\,;\ \delta=2\Delta Q, \tag{2.4}$$

причем

---

* Мы рассматриваем простейший случай частиц со спином нуль [9].

$$\frac{1}{4}\Delta^2=\frac{m^2-p_1p_2}{2}\,;$$

$$\left(P\pm\frac{1}{2}\Delta\right)^2=M^2\ ,\quad \text{или}\quad P\cdot\Delta=0\ . \tag{2.5}$$

Из определения (2.I) и эрмитовости электромагнитного тока [15] $J_\mu=i\frac{\delta S}{\delta A_\mu}\cdot S^+$ следуют свойства симметрии величины $W_{\mu\nu}$:

$$W_{\mu\nu}\Big|_{Q\to -Q}\to -W_{\nu\mu}\ ; \tag{2.6а}$$

$$W_{\mu\nu}\Big|_{\Delta\to -\Delta}\to W^*_{\nu\mu}\ . \tag{2.6б}$$

Учитывая закон сохранения электромагнитного тока, можно представить тензор $W_{\mu\nu}$ расложением вида [9]

$$W_{\mu\nu}=\Pi_{\mu\alpha}\left(Q+\tfrac{1}{2}\Delta\right)\Pi_{\nu\beta}\left(Q-\tfrac{1}{2}\Delta\right)\cdot w_{\alpha\beta}\left(P,Q,\Delta\right), \tag{2.7}$$

где

$$w_{\alpha\beta}=-g_{\alpha\beta}\cdot W_1+P_\alpha P_\beta\cdot W_2+\left(P_\alpha\Delta_\beta+P_\beta\Delta_\alpha\right)W_3^{(+)}+ \tag{2.8}$$

$$+\left(P_\alpha\Delta_\beta-P_\beta\Delta_\alpha\right)W_3^{(-)}+\Delta_\alpha\Delta_\beta W_4$$

и

$$\Pi_{\mu\alpha}(q)=-g_{\mu\alpha}+\frac{q_\mu q_\alpha}{q^2}\quad -\quad \text{проекционный оператор.}$$

Инвариантные форм-факторы W_i являются функциями четырех независимых переменных (2.4) и в области, определяемой условиями спектральности

$$(p_1+q_1)^2 \geq M^2; \quad (p_2+q_2)^2 \geq M^2;$$

$$Q^2+|\nu| \geq \frac{1}{4}\Delta^2; \quad Q^2 \leq 0; \quad \Delta^2 \leq 0 \tag{2.9}$$

имеет следующие свойства четности:

$$\nu \to -\nu \quad , \; W_{1,2,4}\text{-нечетные}, \quad W_3^{(\pm)} - \text{четные} ; \tag{2.10а}$$

$$\delta \to -\delta \quad , \; W_{1,2,4}; \, W_3^{(-)} - \text{четные}; \; W_3^{(+)} - \text{нечетный}. \tag{2.10б}$$

В физической области комптоновского рассеяния, т.е. в области (2.9) при $\nu > 0$ из (2.I) для спектральной функции $W_{\mu\nu}$ может быть выведено условие положительной определенности, приводящее к ряду ограничений сверху на инвариантные формфакторы W_i.

Ниже мы наметим общий подход к выводу этих соотношений. Рассмотрим величины $\phi_\mu(p,q)$, равные нулю вне области

$$\begin{aligned} &1.\; p^2 = M^2, \; p_0 > 0; \\ &2.\; q^2 < 0; \\ &3.\; p\cdot q > 0; \\ &4.\; q^2+2pq \geq 0; \end{aligned} \tag{2.11}$$

и удовлетворяющие условию $q_\mu \phi_\mu(p,q) = 0$.

Определим интеграл общего вида:

$$(\phi_2, W\phi_1) = \int \phi^*_{2\mu}(p_2,q_2) W_{\mu\nu}(P,Q,\Delta)\, \phi_{1\nu}(p_1,q_1) \times \\ \times (2\pi)^4 \delta(p_1+q_1-p_2-q_2)\, dp_1\, dp_2\, dq_1\, dq_2 . \tag{2.12}$$

Используя разложение по полному набору состояний в уравнении (2.I), нетрудно найти, что

$$(\phi_2, W\phi_1) = \frac{1}{4\pi}\sum_n \alpha_n^*(2)\,\alpha_n(1)\,, \tag{2.I3}$$

где

$$\alpha_n(i) = \int \phi_{i\mu}(p,q) \langle n | J_\mu(0) | p \rangle (2\pi)^4 \delta(q+p-P_n)\, dp\, dq\,. \tag{2.I4}$$

$i = 1,2.$

При $\phi_2 = \phi_1$ из (2.I3) следует условие положительной определенности

$$(\phi, W\phi) = \frac{1}{4\pi}\sum_n |\alpha_n|^2 > 0. \tag{2.I5}$$

Для $\phi_2 \neq \phi_1$, используя неравенство, находим

$$|(\phi_2, W\phi_1)|^2 \leq (\phi_2, W\phi_2)(\phi_1, W\phi_1)\,, \tag{2.I6}$$

откуда в случае, если носители функций ϕ_2 и ϕ_1 сосредоточены в непересекающихся множествах, следуют неравенства или ограничения сверху на недиагональные матричные элементы коммутатора токов.

Рассмотрим два примера:

1. $\phi_{i\mu} = \phi_\mu(p_i, q)\,\delta(p-p_i)\,; \quad i = 1,2\,,$

$$\left|\int \phi_\mu^*(p_2,q_2)\, W_{\mu\nu}(P,Q,\Delta)\, \phi_\nu(p_1,q_1)\, \delta(p_1+q_1-p_2-q_2)\, dq_1\, dq_2\right|^2 \leq \tag{2.I7}$$

$$\leq \int \phi_\mu^*(p_1,q)\, W_{\mu\nu}(p_1,q,0)\, \phi_\nu(p_1,q)\, dq \cdot \int \phi_\mu^*(p_2,q)\, W_{\mu\nu}(p_2,q,0)\, \phi_\nu(p_2,q)\, dq\,.$$

2. $\phi_{i\mu} = \phi_\mu(p_i, q_i)\,\delta(p-p_i)\,\delta(q-q_i)\;;\quad i=1,2\;;$

$$\left|\phi^*_\mu(p_2,q_2)\,W_{\mu\nu}(P,Q,\Delta)\,\phi_\nu(p_1,q_1)\right|^2 \leqslant \tag{2.18}$$

$$\leqslant\left(\phi^*_\mu(p_2,q_2)\,W_{\mu\nu}(p_2,q_2,0)\,\phi_\nu(p_2,q_2)\right)\left(\phi^*_\mu(p_1,q_1)\,W_{\mu\nu}(p_1,q_1,0)\,\phi_\nu(p_1,q_1)\right).$$

В обоих случаях в правых частях неравенств (2.17) и (2.18) появляются диагональные матричные элементы коммутатора токов, соответствующие процессу виртуального комптоновского рассеяния вперед, т.е. при $\Delta = 0$, которые и определяют верхние границы для недиагональных матричных элементов $W_{\mu\nu}(P,Q,\Delta)$.

Выраженные в терминах инвариантных форм-факторов, эти неравенства дают ограничения сверху для комбинаций величин $W_i(\nu, Q^2, t, \delta)$ через соответствующие комбинации величин $W_i(\nu_\pm, Q^2_\pm, 0, 0)$, где

$$\nu_\pm = 2\left(P \pm \frac{\Delta}{2}\right)\cdot\left(Q \mp \frac{\Delta}{2}\right) = \nu - \frac{t}{2} \pm \frac{\delta}{2}\;; \tag{2.19}$$

$$Q^2_\pm = \left(Q \mp \frac{\Delta}{2}\right)^2 = Q^2 + \frac{t}{4} \mp \frac{\delta}{2}\,,$$

причем $Q^2_\pm + \nu_\pm = Q^2 + \nu - \frac{t}{4} \geqslant 0$, что соответствует физической области комптоновского рассеяния вперед.

В дальнейшем, используя релятивистскую ковариантность, удобно перейти к брейтовской системе, где $\vec{P}_1+\vec{P}_2=0$, т.е.

B- система

$$P=(E_p,\vec{0})\ ;\ Q=(Q_0,\vec{Q})\ ;\ \Delta=(0,2\vec{p}), \tag{2.20}$$

где

$$E_p=\sqrt{M^2+\vec{p}^{\,2}}\ ;\quad \vec{p}=\vec{P}_1=-\vec{P}_2 .$$

Инвариантные переменные (2.4) в B- системе имеют вид:

$$\begin{aligned} \nu &= 2E_p\cdot Q_0\ ; \\ Q^2 &= Q_0^2-\vec{Q}^{\,2}\ ; \\ t &= -4\vec{p}^{\,2}\ ; \\ \delta &= -4\vec{Q}\cdot\vec{p}\ ; \end{aligned} \tag{2.21}$$

причем условия спектральности (2.9) принимают форму:

$$(Q_0+E_p)^2-\vec{Q}^{\,2}\geq M^2;\ Q_0^2-\vec{Q}^{\,2}\leq 0\ ;\ 0\leq\vec{p}^{\,2}<\infty . \tag{2.22}$$

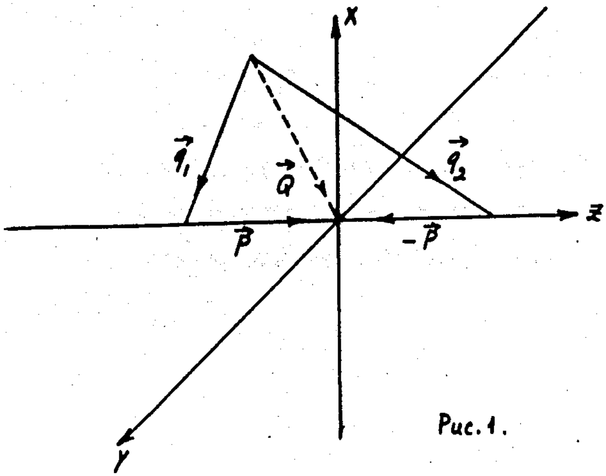

Рис.1.

Пространственная часть тензора $W_{\mu\nu}$ в брейтовской системе может быть представлена разложением

$$W_{ik}(Q,\vec{P}) = \delta_{ik}\cdot a_1 + P_i P_k\cdot a_2 + (P_i Q_k + P_k Q_i)\, a_3^{(+)} + \tag{2.23}$$
$$+ (P_i Q_k - P_k Q_i)\, a_3^{(-)} + Q_i Q_k\, a_4 ,$$

причем

$$W_{00}(Q,\vec{P}) = \frac{1}{Q_0^2}(Q+P)_i\cdot(Q+P)_k\cdot W_{ik}(Q,\vec{P}) ;$$
$$W_{i0}(Q,\vec{P}) = \frac{1}{Q_0}(Q-P)_k\cdot W_{ik}(Q,\vec{P}) ; \tag{2.24}$$
$$W_{0k}(Q,\vec{P}) = \frac{1}{Q_0}(Q+P)_i\cdot W_{ik}(Q,\vec{P}) .$$

Инвариантные функции a_i могут быть выражены через формфакторы W_i и имеют следующие свойства симметрии

$$Q\to -Q \; : \quad a_{1,2,4}\,;\; a_3^{(-)} - \text{нечетные}\,;\; a_3^{(+)} - \text{четная}\,; \tag{2.25}$$
$$\vec{P}\to-\vec{P} \; : \quad a_{1,2,4}\,;\; a_3^{(-)} - \text{четные}\,;\; a_3^{(+)} - \text{нечетная}.$$

Отличные от нуля компоненты тензора W_{ik} выражаются через функции a_i следующим образом:

$$W_{zz} = a_1 + p^2 \cdot a_2 + 2(\vec{p}\cdot\vec{Q})\, a_3^{(+)} + \frac{1}{p^2}(\vec{Q}\vec{p})^2 a_4 \;;$$

$$W_{xx} = a_1 + \frac{1}{p^2}\left(\vec{Q}^2\cdot\vec{p}^2 - (\vec{Q}\cdot\vec{p})^2\right)\cdot a_4 \;; \tag{2.26}$$

$$W_{yy} = a_1 \;;$$

$$W_{zx} = \sqrt{\vec{Q}^2\cdot\vec{p}^2 - (\vec{Q}\vec{p})^2}\cdot\left(a_3^{(+)} + a_3^{(-)}\right) \;;$$

$$W_{xz} = \sqrt{\vec{Q}^2\cdot\vec{p}^2 - (\vec{Q}\vec{p})^2}\cdot\left(a_3^{(+)} - a_3^{(-)}\right) \;;$$

при этом

$$W_{00} = \Big\{(\vec{Q}^2 - \vec{p}^2)a_1 + \left((\vec{Q}\vec{p})^2 - (\vec{p}^2)^2\right)a_2 +$$

$$+ 2(\vec{Q}\cdot\vec{p})(\vec{Q}^2 - \vec{p}^2)a_3^{(+)} + \left((\vec{Q}^2)^2 - (\vec{Q}\vec{p})^2\right)a_4\Big\}. \tag{2.27}$$

Вывод условия положительности и ограничений сверху на инвариантные функции в В-системе основывается на рассмотрении билинейной формы вида:

$$(\phi_2, W\phi_1)_{\vec{p}} = \int dQ\, \phi^*_{2i}(Q,-\vec{p})\, W_{ik}(Q,\vec{p})\, \phi_{1k}(Q,\vec{p}) \,, \tag{2.28}$$

где интегрирование распространяется на область, ограниченную условиями спектральности (2.22) при $Q_0 > 0$, а $\phi_{1i}(Q,\vec{p})$, $\phi_{2k}(Q,-\vec{p})$ – произвольные трехмерные векторы.

Выпишем в качестве примера наиболее простые ограничения на недиагональные элементы тензора (2.29):

$$|W_{ik}(Q,\vec{p})|^2 \le W_{ii}(Q_+,\vec{0})\cdot W_{kk}(Q_-,\vec{0}), \tag{2.29}$$

где

$$Q_\pm = (Q_0, \vec{Q} \pm \vec{P}),$$

причем в правой части соотношения (2.29) не подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

Ниже мы изучим асимптотическое поведение в глубоко-неупругой области (I.I) одной из функций

$$F = \{W_{xx}, W_{yy}, W_{zz}, W_{xz} \pm W_{zx}, W_{00}, \dots\},$$

каждая из которых обладает свойством "причинности", т.е. является Фурье-образом функции, обращающейся в нуль при $x^2 < 0$.

§3. Автомодельная асимптотика причинных формфакторов

Исследуем асимптотическое поведение функции

$$F(Q,P,\Delta) = \int \mathcal{F}(x;P,\Delta)\, e^{ixQ} dx \tag{3.I}$$

в области

$$-Q^2, \nu = 2P.Q \to +\infty; \quad \xi = -\frac{Q^2}{\nu} = const, \tag{3.2}$$

причем вектора P и Δ фиксированы, и

$$P^2 + \frac{\Delta^2}{4} = M^2; \quad P.\Delta = 0; \quad \Delta^2 \leq 0. \tag{3.3}$$

Величина $\mathcal{F}(x;P,\Delta)$ есть обобщенная функция медленного роста, удовлетворяющая условиям

1а. $\mathcal{F}(-x;P,\Delta) = -\mathcal{F}(x;P,\Delta)$;

1б. $\mathcal{F}(x;P,-\Delta) = -\mathcal{F}^*(x;P,\Delta)$;

2. $\mathcal{F}(x;P,\Delta) = 0$, если $x^2 < 0$;

3. $F(\Lambda Q, \Lambda P, \Lambda\Delta) = F(Q,P,\Delta)$;

$$\Lambda \in L_+^{\uparrow};$$

4. $F(Q,P,\Delta) = 0$, если $Q^2 + |\nu| \leq \frac{\Delta^2}{4} \leq 0$.

В силу лоренцовской инвариантности (свойство 3) достаточно рассмотреть задачу в B-системе, где $\vec{P} = 0$.

В этой системе функции

$\mathcal{F}(x;\vec{P}) \equiv \mathcal{F}(x;P,\Delta)$;

$F(Q,\vec{P}) \equiv F(Q,P,\Delta)$;

зависят от четырех переменных каждая, т.е.

$$x_0;\ |\vec{x}|;\ \vec{x}\cdot\vec{p};\ |\vec{p}|;$$

$$Q_0;\ |\vec{Q}|;\ \vec{Q}\cdot\vec{p};\ |\vec{p}|;$$

и удовлетворяют условиям

$1'a.\quad \mathcal{F}(x;\vec{p}) = -\mathcal{F}(-x;\vec{p})$;

$$F(Q,\vec{p}) = -F(-Q,\vec{p}) \, ;$$

$1'б.\quad \mathcal{F}(x;-\vec{p}) = -\mathcal{F}^{*}(x,\vec{p})$;

$$F(Q;-\vec{p}) = F^{*}(Q,\vec{p}) \, ;$$

$2'.\quad \mathcal{F}(x;\vec{p}) = 0$, если $x^2 < 0$;

$3'.\quad F(Q,\vec{p}) = 0$, если

$$-E_p - \sqrt{M^2+\vec{Q}^2} < Q_0 < -E_p + \sqrt{M^2+\vec{Q}^2} \, ; \quad E_p = \sqrt{M^2+\vec{p}^2} \, .$$

Асимптотическая область принимает вид

$$Q_0 \to +\infty \, ; \; Q^2 \to -\infty \, ; \; |\vec{Q}| \sim Q_0 \, ; \tag{3.4}$$

$$q = -\frac{Q^2}{2E_p Q_0} = const.,$$

$\vec{p}^{\,2}$; $\vec{p}\cdot\vec{n}$ – фиксированы, где $\vec{n} = \dfrac{\vec{Q}}{|\vec{Q}|}$.

Воспользуемся для функции $F(Q,\vec{p})$ представлением Йоста-Лемана-Дайсона (симметричный случай) [12,13]

$$F(Q,\vec{p})=\int \epsilon(Q_0)\,\delta\left[Q_0^2-(\vec{Q}-\vec{u})^2-\lambda^2\right]\psi(\vec{u},\vec{p};\lambda^2)\,d\vec{u}\,d\lambda^2, \tag{3.5}$$

где весовая функция $\psi(\vec{u},\vec{p};\lambda^2)$ – некоторая обобщенная функция медленного роста, носитель которой содержится во множестве:

$$\left[(\vec{u},\lambda^2)_p :\ |\vec{u}|\le E_p :\ \lambda^2\ge\left(E_p-\sqrt{E_p^2-\vec{u}^2}\right)^2\right]. \tag{3.6}$$

Из вывода интегрального представления следует, что весовая функция $\psi(\vec{u},\vec{p};\lambda^2)$ зависит лишь от переменных $|\vec{u}|, |\vec{p}|, \vec{u}\cdot\vec{p};\ \lambda^2$, причем ψ четна при подстановках $\vec{u}\to-\vec{u}$ или $\vec{p}\to-\vec{p}$.

Представление принимает вид:

$$F(\nu,q,\vec{n},\vec{p})=\frac{E_p^3}{\nu}\int_0^\infty d\lambda^2\int_{|\vec{r}|\le 1} d\vec{r}\,\psi(E_p\vec{r};\vec{p};\lambda^2)\,\delta\left(q-\vec{n}\cdot\vec{r}+\frac{\lambda^2}{\nu}+\frac{\chi}{\nu}\right), \tag{3.7}$$

где

$\vec{u}=E_p\cdot\vec{r}$;

$$\chi=\chi(\nu,q,\vec{n},E_p;\vec{r})=E_p^2r^2-(\vec{r}\cdot\vec{n})\,\nu\left(\sqrt{1+\frac{4E_p^2q}{\nu}}-1\right). \tag{3.8}$$

При достаточно больших ν функция χ разлагается в ряд по степеням $1/\nu$:

$$\chi = E_p^2 \left(r^2 - 2l_1 \vec{r}\cdot\vec{n} \right) + O\left(\frac{1}{\nu}\right), \tag{3.9}$$

равномерно сходящийся со всеми производными по всем аргументам в каждой ограниченной области их изменения.

Отметим, что

$$F(\nu, l, \vec{n}, \vec{p}) = 0 \quad , \quad \text{при} \quad |l_1| > 1 + \frac{\vec{p}^2}{\nu}; \quad Q^2 < 0. \tag{3.10}$$

Пусть $\psi(\vec{u}, \vec{p}; \lambda^2)$ принадлежит классу таких обобщенных функций, для которых существует "слабый" предел:

$$\lim_{\lambda^2 \to +\infty} \lambda^{-2k} \psi(E_p \vec{r}, \vec{p}; \lambda^2) = \frac{1}{E_p^3} \psi_0(\vec{r}, \vec{p}); \quad k > -1, \tag{3.11}$$

т.е. для любой основной функции $\varphi \in S$

$$\frac{1}{\lambda^{2k}} \int \psi(\vec{u}, \vec{p}; \lambda^2) \varphi(\vec{r}) d\vec{u} \underset{\lambda^2 \to +\infty}{\longrightarrow} \int \psi_0(\vec{r}, \vec{p}) \varphi(\vec{r}) d\vec{r}. \tag{3.12}$$

Перепишем это условие в виде:

$$\psi(E_p \vec{r}, \vec{p}; \lambda^2) = \frac{1}{E_p^3} \theta(\lambda^2) \lambda^{2k} \psi_0(\vec{r}, \vec{p}) + \psi_1, \tag{3.13}$$

причем

$$\mathcal{E}(\vec{r},\vec{p};\lambda^2)=\frac{1}{\lambda^{2k}}\,\psi_1(\vec{r},\vec{p};\lambda^2)\to 0\ :\ \lambda^2\to+\infty . \tag{3.14}$$

Определим линейный функционал (обобщенную функцию)

$$(F,f)_{\nu,p}=\int F(\nu,\ell,\vec{n},\vec{p})\,f(\ell,\vec{n})\,d\ell\, d\Omega_{\vec{n}}\ ;\quad \nu>0, \tag{3.15}$$

для каждой функции $f(\ell,\vec{n})$ бесконечно-дифференцируемой и финитной на множестве

$$\left[(\ell,\vec{n}):\ |\vec{n}|=1\ ;\ 0<\ell<\infty\right] . \tag{3.16}$$

Запишем

$$(F,f)_{\nu,p}=J_0(\nu,p)+J_1(\nu,p) : \tag{3.17}$$

где

$$J_0(\nu,p)=\frac{1}{\nu}\int_0^\infty d\lambda^2\int_{|\vec{r}|\le 1} d\vec{r}\,\psi_0(\vec{r},\vec{p})\,\lambda^{2k}\int d\ell\, d\Omega_{\vec{n}}\, f(\ell,\vec{n})\times \tag{3.18}$$

$$\times\,\delta\!\left(\ell-\vec{n}\cdot\vec{r}+\frac{\lambda^2}{\nu}+\frac{\chi}{\nu}\right) .$$

При фиксированных ℓ и $\nu>0$ интегрирование по λ^2 производится фактически по конечному интервалу, определяемому условием

$$\ell=\vec{n}\cdot\vec{r}-\frac{\lambda^2}{\nu}-\frac{\chi}{\nu}\geqslant 0\ ,\quad \text{или} \tag{3.19}$$

$$0\le\lambda^2\le\nu+\alpha ,$$

где

$$\alpha = \sup_{\substack{|\vec{n}|=1 \\ |\vec{r}|\le 1}} (-\chi) = \frac{\nu^2}{4E_p^2}\left(\sqrt{1+\frac{4E_p^2 \ell}{\nu}} - 1\right)^2 = E_p^2 \ell^2 + O\left(\frac{1}{\nu}\right). \tag{3.20}$$

Из свойств функции χ следует, что при достаточно больших ν имеет место соотношение

$$\int_0^\infty d\tau \cdot \tau^{2k} \int d\ell \, d\Omega_{\vec{n}} \, f(\ell,\vec{n}) \, \delta\left(\ell - \vec{n}\cdot\vec{r} + \tau + \frac{\chi}{\nu}\right) \to \tag{3.28}$$

$$\to \int_{\ell>0} d\ell \, d\Omega_{\vec{n}} \, f(\ell,\vec{n}) (\vec{n}\cdot\vec{r} - \ell)_+^k \; ; \quad \text{при } \nu \to +\infty$$

равномерно со всеми производными по $\vec{r}$ на каждом конечном интервале, где $(\vec{n}\cdot\vec{r}-\ell)_+^k$ есть обобщенная функция

$$(\vec{n}\cdot\vec{r}-\ell)_+^k = \begin{cases} (\vec{n}\cdot\vec{r}-\ell)^k ; & \ell \le \vec{n}\cdot\vec{r} \\ 0 \; ; & \ell > \vec{n}\cdot\vec{r} . \end{cases} \tag{3.22}$$

Произведя в интеграле J_0 замену переменной $\tau = \lambda^2/\nu$, и используя соотношение (3.2I), найдем

$$\nu^{-k} J_0(\nu,p) \underset{\nu\to+\infty}{\to} \int d\ell \, d\Omega_{\vec{n}} \, f(\ell,\vec{n}) \int_{|\vec{r}|\le 1} d\vec{r} \, \psi_0(\vec{r},\vec{p}) (\vec{n}\cdot\vec{r}-\ell)_+^k . \tag{3.23}$$

Рассмотрим теперь величину $\bar{\nu}^{k} J_1$, для которой имеем

$$\bar{\nu}^{k} J_1(\nu, p) = \int_0^{1+\delta} d\tau \cdot \tau^k \int_{|\vec{r}| \le 1} d\vec{r}\, \mathcal{E}(\vec{r}, \vec{p}, \nu\tau) \int d\ell\, d\Omega_{\vec{n}} \times$$

$$\times E_p^3 f(\ell, \vec{n})\, \delta\left(\ell - \vec{n}\cdot\vec{r} + \tau + \frac{\chi}{\nu}\right) = \tag{3.24}$$

$$= \int_0^{1+\delta} d\tau \cdot \tau^k \int_{|\vec{r}| \le 1} d\vec{r}\, \mathcal{E}(\vec{r}, \vec{p}; \nu\tau)\, g(\vec{r}, \tau / \tfrac{\chi}{\nu}),$$

где

$$\delta = \alpha/\nu \ ;$$

$$g(\vec{r}, \tau / \tfrac{\chi}{\nu}) = E_p^3 \int d\Omega_{\vec{n}}\, f(\vec{n}\vec{r} - \tau - \tfrac{\chi}{\nu}; \vec{n}) \frac{1}{\left|1 + \frac{1}{\nu}\frac{\partial\chi}{\partial\ell}\right|_{\ell = \vec{n}\cdot\vec{r} - \tau - \frac{\chi}{\nu}}} . \tag{3.25}$$

Имея ввиду, что $g(\vec{r}, \tau / \chi/\nu)$ равномерно сходится при достаточно больших ν к функции $g(\vec{r}, \tau) = g(\vec{r}, \tau / 0)$ на каждом конечном интервале изменения переменных τ, $\vec{r}$, и учитывая, что при всех $\tau \ne 0$ и положительных

$$\int_{|\vec{r}| \le 1} d\vec{r}\, \mathcal{E}(\vec{r}, \vec{p}, \nu\tau)\, g(\vec{r}, \tau) \to 0 \ ; \quad \nu \to +\infty, \tag{3.26}$$

найдем

$$\bar{\nu}^{k} J_1(\nu, p) \sim O\left(\frac{1}{\nu^{k+1}}\right) . \tag{3.27}$$

Таким образом, мы пришли к следующему асимптотическому поведению формфактора $F(Q,\vec{p})$ в области (3.4)

$$F(Q,\vec{p}) \underset{\gamma\to+\infty}{\sim} \gamma^{k}\cdot\Gamma(k+1)\,\Phi_{k+2}(l,\vec{n},\vec{p}) \,, \tag{3.28}$$

где

$$\Phi_k(l,\vec{n},\vec{p}) = \frac{1}{\Gamma(k-1)}\int\limits_{|\vec{r}|\le 1} d\vec{r}\,\psi_0(\vec{r},\vec{p})\,(\vec{n}\cdot\vec{r}-l)_+^{k-2} . \tag{3.29}$$

Отметим, что при $\vec{p}=0$, если $\psi_0(r)\equiv\psi_0(\vec{r},\vec{0})$, величина (3.29) принимает известный из работы [5] вид:

$$\Phi_k(l) = \frac{2\pi}{\Gamma(k-1)}\int\limits_0^1 r^2 dr\,\psi_0(r)\int\limits_{l/r}^{1} d\cos\theta\,(r\cos\theta-l)^{k-2} = \tag{3.30}$$

$$= \frac{2\pi}{\Gamma(k)}\int\limits_l^1 r\,dr\,\psi_0(r)\,(r-l)^{k-1} ,$$

и является k-ой первообразной обобщенной функции $r\,\psi_0(r)$, обращающейся в нуль при $l>1$.

Подчеркнем, что величина Φ_k является целой аналитической функцией параметра k, однако формула (3.28) имеет смысл лишь при $k>-1$.

Учитывая соотношение

$$\lim_{\substack{k\to 1-l\\ l=0,1,2,\dots}} \frac{(\vec{n}\cdot\vec{r}-l)_+^{k-2}}{\Gamma(k-1)} = \delta^{(l)}(\vec{n}\cdot\vec{r}-l) , \tag{3.31}$$

найдем

$$\lim_{\substack{k\to 1-l \\ l=0,1,2,\dots}} \Phi_k(l,\vec{n},\vec{p}) = \left(-\frac{\partial}{\partial l}\right)^l \int\limits_{|\vec{r}_\perp|\le\sqrt{1-l^2}} d^2 r_\perp \, \Psi_0(\vec{n}l+\vec{r}_\perp;\vec{p}) \,; \tag{3.32}$$

где использовано обозначение

$$\vec{r} = \vec{n}\cdot\alpha + \vec{r}_\perp \,;\quad \vec{n}\cdot\vec{r}_\perp = 0 \,;\quad \vec{n}\cdot\vec{r} = \alpha \,;\quad \alpha^2 + \vec{r}_\perp^{\,2} \le 1. \tag{3.33}$$

Используя формулу (3.32), нетрудно получить теперь выражение для коэффициентной функции $\Phi_k(l,\vec{n},\vec{p})$ в асимптотике (3.28) в следующем виде:

$$\Phi_k(l,\vec{n},\vec{p}) = \frac{1}{\Gamma(k)} \int\limits_l^1 d\alpha\,(\alpha-l)^{k-1}\, \Phi_0(\alpha,\vec{n},\vec{p}) \,. \tag{3.34}$$

$k \ge 1$.

Таким образом, величина $\Phi_k(l,\vec{n},\vec{p})$ есть мера, определенная при $l>0$, которую можно понимать как k-ую первообразную обобщенной функции $\Phi_0(l,\vec{n},\vec{p})$, обращающуюся в нуль при $l>1$.

Отметим, что функции $\Phi_k(l,\vec{n},\vec{p})$ не изменяются при подстановках $\vec{n}\to-\vec{n}$ или $\vec{p}\to-\vec{p}$, причем для $k\le 1$ и целых функции $\Phi_k(l,\vec{n},\vec{p})$ имеют определенные свойства симметрии при замене знака l, т.е.

$$\Phi_{1-\ell}(\ell,\vec{n},\vec{p}) = (-)^{\ell}\,\Phi_{1-\ell}(-\ell,\vec{n},\vec{p}), \tag{3.35}$$

$\ell = 0,1,2,\ldots$

и, следовательно, обращаются в нуль при $|\ell| > 1$ [*].
Кроме того, отсюда следует, что

$$\int_{-1}^{1} d\alpha\, \Phi_0(\alpha,\vec{n},\vec{p}) = -\,\Phi_1(\ell,\vec{n},\vec{p})\Big|_{\ell=-1}^{\ell=1} .$$

В общем случае, однако, $\Phi_k(\ell,\vec{n},\vec{p})$ отличны от нуля при $\ell < -1$, при этом, как следует из формулы (3.34), для $k \geq 2$ и целых $\Phi_k(\ell,\vec{n},\vec{p})$ является в области $\ell < -1$ полиномом по ℓ степени $(k-1)$ [1].

Рассмотрим теперь класс весовых функций $\Psi(\vec{u},\vec{p};\lambda^2)$ таких, что для любой основной функции $\varphi(\vec{u})$

$$\int_0^{\infty} d\lambda^2 \left| \int d\vec{u}\, \Psi(\vec{u},\vec{p};\lambda^2)\,\varphi(\vec{u}) \right| < \infty ,$$

причем интеграл

$$E_p^3 \int_0^{\infty} d\lambda^2\, \Psi(E_p\vec{r},\vec{p};\lambda^2) = \Psi_0(\vec{r},\vec{p}) \tag{3.36}$$

---

[*] Заметим, что отрицательные значения ℓ соответствуют продолжению в область $Q^2 > 0$, $\nu > 0$, в которой отличны от нуля вклады в спектральную функцию от так называемых Z-диаграммы.

определяет обобщенную функцию медленного роста ψ_0.

В этом случае, используя свойство равномерной сходимости

$$\int d\Omega_{\vec{n}}\, f\left(\vec{n}\cdot\vec{r}-\frac{\lambda^2}{\nu}\frac{\chi}{\nu},\ \vec{n}\right)\frac{1}{\left|1+\frac{1}{\nu}\frac{\partial\chi}{\partial\ell}\right|_{\ell=\vec{n}\vec{r}-\frac{\lambda^2}{\nu}\chi/\nu}} \underset{\nu\to+\infty}{\longrightarrow} \tag{3.37}$$

$$\to \int d\Omega_{\vec{n}}\, f(\vec{n}\cdot\vec{r},\vec{n}) = \int d\Omega_{\vec{n}}\, d\ell\, f(\ell,\vec{n})\,\delta(\vec{n}\cdot\vec{r}-\ell),$$

и описанный выше метод доказательства, найдем

$$F(a,\vec{P}) \underset{\nu\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\nu}\int\limits_{|\vec{r}|\le 1} d\vec{r}\,\psi_0(\vec{r},\vec{P})\,\delta(\vec{n}\cdot\vec{r}-\ell) = \tag{3.38}$$

$$= \frac{1}{\nu}\,\Phi_1(\ell,\vec{n},\vec{P}).$$

Рассмотрим, наконец, класс весовых функций

$$\psi(\vec{u},\vec{P};\lambda^2) = \left(\frac{\partial}{\partial\lambda^2}\right)^s \tilde{\psi}(\vec{u},\vec{P};\lambda^2), \quad s>0 \tag{3.39}$$

где функция $\tilde{\psi}(\vec{u},\vec{P};\lambda^2)$ абсолютно интегрируема по λ^2, причем интеграл

$$E_P^3\int_0^\infty d\lambda^2\,\tilde{\psi}(\vec{u},\vec{P};\lambda^2) = \psi_0(\vec{r},\vec{P}) \tag{3.40}$$

существует и определяет обобщенную функцию медленного роста.

В этом случае имеем

$$(F,f)_{\nu,p} = \tag{3.41}$$

$$= \int d\vec{u}\, d\lambda^2\, \tilde{\psi}(\vec{x},\vec{p};\lambda^2)\left(-\frac{\partial}{\partial\lambda^2}\right)^s \int dl\, d\Omega_{\vec{n}}\, f(l,\vec{n})\frac{1}{\nu}\delta\left(l-\vec{n}\vec{r}+\frac{\lambda^2}{\nu}+\frac{\chi}{\nu}\right).$$

Используем теперь факт, что последовательность функций

$$\left(-\nu\frac{\partial}{\partial\lambda^2}\right)^s \int d\Omega_{\vec{n}}\, f\left(\vec{n}\vec{r}-\frac{\lambda^2}{\nu}-\frac{\chi}{\nu},\vec{n}\right)\frac{1}{\left|1+\frac{1}{\nu}\frac{\partial\chi}{\partial l}\right|_{l=\vec{n}\vec{r}-\frac{\lambda^2}{\nu}-\frac{\chi}{\nu}}} \tag{3.42}$$

$\nu\to+\infty$

ограничена по $(\vec{r},\lambda^2)$ и стремится к функции

$$\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^s \int d\Omega_{\vec{n}}\, f(l,\vec{n})\Big|_{l=\vec{n}\cdot\vec{r}} \tag{3.43}$$

равномерно в каждой конечной области вместе со всеми производными по всем аргументам. Это позволяет перейти к пределу $\nu\to+\infty$ под знаком интеграла в (3.41), и мы получаем

$$\nu^{s+1}\cdot(F,f)_{\nu,p} \to \int_{|\vec{r}|\le 1} d\vec{r}\cdot \psi_0(\vec{r},\vec{p})\left[\left(\frac{\partial}{\partial l}\right)^s f(l,\vec{n})\right]_{l=\vec{n}\cdot\vec{r}}\cdot d\Omega_{\vec{n}}, \tag{3.44}$$

откуда следует

$$F(Q,\vec{p}) \sim \frac{1}{y^{s+1}}\left(-\frac{\partial}{\partial l}\right)^s \Phi_1(l,\vec{n},\vec{p}) =$$

$$= \frac{1}{y^{s+1}}\,\Phi_{1-s}(l,\vec{n},\vec{p}), \tag{3.45}$$

причем, как было указано выше, коэффициентная функция $\Phi_{1-s}(l,\vec{n},\vec{p})$ при $s \geqslant 0$ и целых обращается в нуль для $|l| > 1$.

§4. Поведение вблизи светового конуса

Изучим теперь асимптотическое поведение функции $\mathcal{F}(x,\vec{p})$ вблизи светового конуса, $x^2 < 0$.

В B-системе, применяя обратное Фурье- преобразование к представлению (3.5), получим:

$$\mathcal{F}(x;\vec{p}) = \frac{1}{2\pi i}\cdot\int_0^\infty d\lambda^2\, \mathcal{D}(x;\lambda^2)\,\Delta(\vec{x},\vec{p};\lambda^2), \tag{4.1}$$

где

$$\mathcal{D}(x;\lambda^2) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{-iqx}\epsilon(q_0)\,\delta(q^2-\lambda^2)\,dq =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\epsilon(x_0)\cdot\frac{\partial}{\partial x^2}\left[\theta(x^2)J_0(\lambda\sqrt{x^2})\right] \tag{4.2}$$

есть известная перестановочная функция скалярного поля с массой λ;

$$\Delta(\vec{x},\vec{p};\lambda^2) = \int d\vec{u}\, e^{i\vec{u}\cdot\vec{x}} \cdot \psi(\vec{u},\vec{p};\lambda^2) =$$
$$= E_p^{\,3} \int\limits_{|\vec{r}|\leq 1} d\vec{r}\, e^{iE_p(\vec{r}\cdot\vec{x})}\, \psi(E_p\vec{r},\vec{p};\lambda^2). \tag{4.3}$$

Так как интегрирование в формуле (4.3) распространяется лишь на конечную область, величина $\Delta(\vec{x},\vec{p};\lambda^2)$ есть целая голоморфная функция вектора $\vec{x}$.

Рассмотрим вначале случай, когда весовая функция ψ представима в виде (3.13).

Имеем

$$\Delta(\vec{x},\vec{p};\lambda^2) = \theta(\lambda^2)\,\lambda^{2k}\int d\vec{r}\, e^{iE_p(\vec{r}\cdot\vec{x})} \cdot \psi_0(\vec{r},\vec{p}) + \Delta_1(\vec{x},\vec{p};\lambda^2), \tag{4.4}$$

причем имеет место слабый предел

$$\frac{1}{\lambda^{2k}}\left|\Delta_1(\vec{x},\vec{p},\lambda^2)\right| \to 0 \;:\quad \lambda^2 \to +\infty \tag{4.5}$$

равномерно вместе со всеми производными по $\vec{x}$.

Запишем

$$\mathcal{F}(x;\vec{p}) = I_0(x;\vec{p}) + I_1(x;\vec{p}), \tag{4.6}$$

где

$$I_0(x;\vec{p}) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty d\lambda^2 \lambda^{2k} \mathcal{D}(x;\lambda^2) \cdot \int_{|\vec{r}|\le 1} d\vec{r}\, e^{iE_p(\vec{r}\cdot\vec{x})} \cdot \psi_0(\vec{r},\vec{p}), \tag{4.7}$$

$$I_1(x;\vec{p}) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty d\lambda^2 \mathcal{D}(x;\lambda^2)\, \Delta_1(\vec{x},\vec{p};\lambda^2). \tag{4.8}$$

Используя формулу *

$$\int_0^\infty d\lambda^2 \lambda^{2k} \mathcal{D}(x;\lambda^2) = -4(-\Box)^k \cdot \left[\frac{\mathcal{D}(x;0)}{x^2}\right] \tag{4.9}$$

найдем, что вблизи светового конуса

$$I_0(x;\vec{p}) \underset{x^2\sim 0}{\sim} \frac{2i}{\pi} G(\vec{x},\vec{p})(-\Box)^k \cdot \left[\frac{\mathcal{D}(x;0)}{x^2}\right], \tag{4.10}$$

где величина $G(\vec{x},\vec{p})$ определяется выражением

---

* Обобщенная функция $\mathcal{D}(x;0)/x^2$ может быть определена своим Фурье-представлением:

$$\frac{2i}{\pi}\cdot\left[\frac{\mathcal{D}(x;0)}{x^2}\right] = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dq\, e^{-iqx}\,\theta(q^2)\,\epsilon(q_0)$$

$$G(\vec{x},\vec{p}) = \int\limits_{|\vec{r}|\le 1} d\vec{r}\, e^{iE_p(\vec{r}\vec{x})}\, \Psi_0(\vec{r},\vec{p}) \tag{4.11}$$

и является целой функцией вектора $\vec{x}$.

Покажем теперь, что $I_1(x,\vec{p})$ имеет более слабую особенность на световом конусе, чем $I_0(x;\vec{p})$.

Имеем, очевидно,

$$I_1(x;\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int dq\, e^{-iqx}\,\epsilon(q_0)\,\theta(q^2)\,\Delta_1(\vec{x},\vec{p};q^2) . \tag{4.12}$$

введем теперь псевдодифференциальный оператор $\Delta_1(\vec{x},\vec{p};-\Box)$, определив его действие на основные функции $\varphi(x)$ из S по правилу

$$\Delta_1(\vec{x},\vec{p};-\Box)\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int \Delta_1(\vec{x},\vec{p};q^2)\,\tilde{\varphi}(q)\, e^{-iqx}\, dq , \tag{4.13}$$

где $\tilde{\varphi}(q)$ Фурье-образ функции $\varphi(x)$.

Расширив по известному способу оператор $\Delta_1(\vec{x},\vec{p};-\Box)$ на обобщенные функций, представим асимптотическое соотношение (4.12) в виде:

$$I_1(x,\vec{p}) \underset{x^2\sim 0}{\sim} \frac{2i}{\pi}\,\Delta_1(\vec{x},\vec{p};-\Box)\left[\frac{\mathcal{D}(x;0)}{x^2}\right], \tag{4.14}$$

откуда, учитывая (4.5), следует, что величина I_1 имеет более слабую сингулярность при $x^2\sim 0$, чем I_0.

Таким образом, в окрестности $x^2 \sim 0$ имеем следующее асимптотическое поведение функции $\mathcal{F}(x;\vec{p})$:

$$\mathcal{F}(x;\vec{p}) \underset{x^2\sim 0}{\sim} \frac{2}{\pi} G(\vec{x},\vec{p}) (-\Box)^k \left[\frac{\mathcal{D}(x;0)}{x^2} \right] . \tag{4.15}$$

Рассмотрим теперь случай, когда весовая функция ψ абсолютно интегрируема по λ^2, причем имеет место равенство (3.36). В этом случае функция $\Delta(\vec{x},\vec{p};\lambda^2)$ также абсолютно интегрируема по λ^2, причем

$$\int_0^\infty d\lambda^2 \Delta(\vec{x},\vec{p};\lambda^2) = \int_{|\vec{r}|\le 1} d\vec{r}\, e^{iE_p(\vec{r}\cdot\vec{x})} \psi_0(\vec{r},\vec{p}) = G(\vec{x},\vec{p}) . \tag{4.16}$$

Так как главная особенность функции $\mathcal{D}(x;\lambda^2)$ в окрестности $x^2=0$ есть $\mathcal{D}(x;0)=\frac{1}{2\pi}\epsilon(x_0)\delta(x^2)$, получим следующее асимптотическое поведение величины $\mathcal{F}(x;\vec{p})$ вблизи светового конуса:

$$\mathcal{F}(x;\vec{p}) \underset{x^2\sim 0}{\sim} \frac{1}{2\pi i} G(\vec{x},\vec{p}) \mathcal{D}(x;0) . \tag{4.17}$$

Аналогичным образом можно определить поведение величины $\mathcal{F}(x;\vec{p})$ вблизи светового конуса для случая, когда выполняются условия (3.39) и (3.40), т.е. когда s-ая первообразная веоовой функции ψ интегрируема по λ^2. В этом случае s – ая первообразная спектральной функции $\Delta(\vec{x},\vec{p};\lambda^2)$ также интегрируема по λ^2.

Записывая

$$\mathcal{F}(x;\vec{p}) = \int_0^\infty d\lambda^2 \cdot \tilde{\Delta}(\vec{x},\vec{p};\lambda^2)\left(-\frac{\partial}{\partial\lambda^2}\right)^s \mathcal{D}(x;\lambda^2), \tag{4.18}$$

где

$$\tilde{\Delta}(\vec{x},\vec{p};\lambda^2) = \int d\vec{u}\, e^{i\vec{u}\cdot\vec{x}} \cdot \tilde{\varphi}(\vec{u},\vec{p};\lambda^2), \tag{4.19}$$

и используя формулу [1]

$$\left(-\frac{\partial}{\partial\lambda^2}\right)^s \mathcal{D}(x;\lambda^2) \underset{x^2\sim 0}{\sim} \frac{1}{2\pi\Gamma(s)} \cdot \frac{1}{4^s}\epsilon(x_0)\theta(x^2)\, x^{2(s-1)}; \quad s \geq 1, \tag{4.20}$$

находим при $s \geq 1$:

$$\mathcal{F}(x;\vec{p}) \underset{x^2\sim 0}{\sim} \frac{1}{2\pi\Gamma(s)} \cdot \frac{1}{4^s}\epsilon(x_0)\theta(x^2)\, x^{2(s-1)} \cdot G(\vec{x},\vec{p}). \tag{4.21}$$

Обсудим теперь вопрос о связи между характером сингулярностей величины $\mathcal{F}(x;\vec{p})$ на световом конусе с асимптотическим поведением функции $F(0;\vec{p})$ в области (3.4).

Считая поведение на световом конусе заданным, можно найти весовую функцию $\psi_0(\vec{r},\vec{p})$ обратным Фурье-преобразованием

$$\psi_0(\vec{r},\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{x}\, e^{-iE_p(\vec{x}\vec{r})}\, G(\vec{x},\vec{p}). \tag{4.22}$$

Определив величину

$$\mathcal{E}_{k+2}(\vec{x},\vec{n},l) = \frac{1}{\Gamma(k+1)}\int\limits_{|\vec{r}|\le 1} d\vec{r}\, e^{-iE_p(\vec{r}\vec{x})}\,(\vec{n}\cdot\vec{r}-l)_+^k, \tag{4.23}$$

найдем явное выражение коэффициентной функции Φ_{k+2}, определяющей автомодельное асимптотическое поведение (3.28), через функцию $G(\vec{x},\vec{p})$, задающей поведение $\mathcal{F}(x;\vec{p})$ на световом конусе:

$$\Phi_{k+2}(l,\vec{n},\vec{p}) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{x}\, G(\vec{x},\vec{p})\,\mathcal{E}_{k+2}(\vec{x},\vec{n},l). \tag{4.24}$$

Обратная связь, вообще говоря, не существует.

Лишь в частном случае, когда направление вектора $\vec{x}$ совпадает с $\vec{n}$, находим прямую связь величины G с коэффициентной функцией Φ_1

$$G(\vec{n}|\vec{x}|,\vec{p}) = \int\limits_{-1}^{1} dl\, e^{iE_p l|\vec{x}|}\cdot \Phi_1(l,\vec{n},\vec{p}) \tag{4.25}$$

аналогично случаю , изученному в работах [1] .

Отметим в заключение, что все результаты, полученные выше в B-системе, непосредственным образом обобщаются на случай произвольной системы отсчета.

При этом следует лишь сделать следующую подстановку переменных:

$$\vec{x}^{\,2} \to -x^2 + \frac{(xP)^2}{P^2} \sim \frac{(xP)^2}{E_P^2}; \quad x^2 \sim 0 \,.$$

$$\vec{x}\cdot\vec{P} \to -x\cdot\Delta/2 \,; \tag{4.26}$$

$$\vec{P}^{\,2} \to -\Delta^2/4 \,.$$

Автор искренне благодарен Н.Н.Боголюбову, В.С.Владимирову, А.Н.Тавхелидзе, Д.В.Ширкову за стимулирующие дискуссии и ценные замечания, П.Н.Боголюбову, Р.М.Мурадяну за интересные обсуждения.

Литература:

1. Н.Н.Боголюбов, В.С.Владимиров, А.Н.Тавхелидзе, ОИЯИ, Р2-6342, Дубна (1972); ТМФ, 1972.

2. М.А.Марков, ОИЯИ Д-1269, Дубна (1963). М.А.Марков. Нейтрино, М., "Наука", 1964.

3. В.А.Матвеев, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе, ОИЯИ
Р2-5443, Р2-4578, Р2-4824, Дубна (1969).
Проблемы физики элементарных частиц и атомного ядра, ЭЧАЯ, т.2, вып.I, (1970), стр.I-32.

4. A.Tavkhelidze, Deep inelastic lepton-hadron interaction,Proceedings of the Coral Gables Conf.Miami,197o.

5. Bjorken J.D. Lecture in Varenna School, Course 41, Varenna, Italy, 1967.

6. H. Leutwyler, J. Stern, Nucl.Phys., B2o, 77 (197o)

7. R.A. Brandt, Phys.Rev., D1, 28o8 (197o)

8. R.Jackiw, R.van Reyen and G.B. West., Phys.Rev., D2, 2473 (1971)

9. D.J. Gross, Phys.Rev., D4, 113o (1971).

I0. В.А.Матвеев, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе, ОИЯИ, Е2-5962, Дубна(I97I),

II. А.А.Логунов, М.А.Мествиришвили, О.А.Хрусталев, ТМФ 9, I53 (I97I).
В.В.Ежела, А.А.Логунов, М.А.Мествиришвили, ИФВЭ, стр.7I-99, Серпухов (I97I).

I2. R.Jost and H. Lehmann, Nuovo Cim.,5, 1598 (1957)
F.J. Dyson, Phys.Rev., 11o, 579 (1958).

I3. В.С.Владимиров, Методы теории функций многих комплексных переменных, М., "Наука", I964.

I4. В.С.Владимиров, Уравнения математической физики, II издание, М., "Наука", I97I.

I5. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков, Введение в теорию квантованных полей, М., ГТТИ, I957.

Рукопись поступила в издательский отдел
3I июля I972 г.