ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6593

Г.А.Керимов, Р.М.Мир-Касимов

КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

Р2 - 6593

Г.А.Керимов, Р.М.Мир-Касимов

КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в Известия АН Аз.ССР

§1. Введение

Представления, почерпнутые из обычной нерелятивистской теории потенциального рассеяния, играют большую роль в изучении процессов взаимодействия адронов при высоких энергиях. Достаточно упомянуть две такие важные модели, с успехом применяемые к описанию экспериментов при высоких энергиях, как теория полюсов Редже и эйкональное представление.

В работе /1/ было показано, что в квантовой теории поля задача рассеяния описывается при помощи уравнений, аналогичных уравнениям Шредингера и Липмана-Швингера с комплексным квазипотенциалом, зависящим от энергии.

Квазипотенциальный подход, сформулированный в /2/x/, привлекателен тем, что уравнения этого метода носят абсолютный характер по отношению к геометрии импульсного пространства. Они могут быть получены при помощи перехода в уравнениях Шредингера и Липпмана-Швингера от эвклидова p-пространства нерелятивистской квантовой механики к p-пространству Лобачевского, соответствующего релятивистскому случаю.

Важное следствие такой геометрической интерпретации состоит в том, что опираясь на аппарат фурье-анализа на группе движений пространства

---

x/ Подробное изложение квазипотенциального подхода и подробные списки литературы даны в обзорах /3-5/.

Лобачевского (преобразование Шапиро), можно построить релятивистское конфигурационное пространство [6]. Релятивистское уравнение Шредингера в конфигурационном пространстве оказывается дифференциально-разностным.

В настоящей работе изучается ряд задач, связанных с квазипотенциальным подходом в рамках двумерной скалярной модели квантовой теории поля (соответствующие квазипотенциальные уравнения одномерны). Двумерная модель привлекательна своей простотой и наглядностью, что особенно ценно в тех случаях, когда в более реалистических ситуациях возникают трудности математического порядка. Особенно важной из этих трудностей нам представляется проблема граничных условий и однозначного выделения решений разностного уравнения Шредингера. Напомним также, что в нерелятивистском случае одномерное уравнение Шредингера весьма часто используется с целью продемонстрировать в упрощенном виде различные результаты квантовой механики [7].

Массовая поверхность (гипербола) в двумерном пространстве векторов энергии-импульса (p_0, p) задается уравнением [x]

$$p_0^2 - p^2 = 1. \tag{1.1}$$

Одномерное квазипотенциальное уравнение для амплитуды рассеяния $a(p,q)$ в "нерелятивистской нормировке" (ср. [6]) имеет вид:

$$a(p,q) = -\frac{i}{2|q|} V(p,q;E_q) + \frac{1}{2\pi} \int \frac{V(p,k;E_q)\,d\Omega_k\, a(k,q)}{2E_q - 2E_k + i\epsilon}, \tag{1.2}$$

где

$$d\Omega_k = \frac{dk}{k_0}, \quad k_0 = \sqrt{1+k^2} \tag{1.3}$$

---

[x] Будем рассматривать для простоты случай частиц равных масс и выберем систему единиц, в которой $\hbar = c = m = 1$.

– инвариантный элемент интегрирования на гиперболе (1.1), $V(p,q;E_q)$ –квазипотенциал. Амплитуда рассеяния $a(p,q)$ связана с коэффициентами прохождения R и отражения D тем же отношением, что и в квантовой механике

$$R = |a(-q,q)|^2, \tag{1.4a}$$

$$D = |1 + a(q,q)|^2. \tag{1.4б}$$

Запишем уравнение (1.2) в операторной форме

$$a = -\frac{i}{2|q|} V + V \cdot G \cdot a. \tag{1.5}$$

Решение уравнения (1.5) может быть символически записано в виде

$$a = \frac{1}{2i|q|} (1 - VG)^{-1} V = \frac{1}{2i|q|} V(1 - GV)^{-1}. \tag{1.6}$$

Из (1.5) вытекает следующее соотношение

$$2\,Re\,a = \frac{1}{|q|} Im\,V + VGa + a^* G^* V^*. \tag{1.7}$$

В случае вещественного потенциала $(Im\,V = 0)$ с учетом (1.6) соотношение (1.7) записывается в виде

$$Re\,a = -i|q|\,a^*(G - G^*)a. \tag{1.8}$$

Принимая во внимание, что

$$G_q(k) - G^*_q(k) = i\frac{k_0}{|k|}(\delta(q-k) + \delta(q+k)), \tag{1.9}$$

получаем из (1.8) условие унитарности для амплитуды a на энергетической поверхности

$$Re\, a(q,q) = -\frac{1}{2}\{|a(q,q)|^2 + |a(-q,q)|^2\}. \qquad (1.10)$$

Коэффициенты отражения $R(q)$ и прохождения $D(q)$ связаны с амплитудой a формулами

$$R(q) = |a(-q,q)|^2,$$
$$D(q) = |1 + a(q,q)|^2. \qquad (1.11a)$$

В терминах R и D условие (1.10) совпадает с известным из нерелятивистской квантовой механики соотношением

$$R + D = 1. \qquad (1.12)$$

Волновая функция $\psi_q(p)$ связана с амплитудой $a(p,q)$ следующим образом:

$$\psi_q(p) = 2\pi\sqrt{1+p^2}\,\delta(p-q) + \frac{2i|q|\,a(p,q)}{2E_q - 2E_p + i\epsilon}. \qquad (1.13)$$

Уравнение для $\psi_q(p)$ имеет вид:

$$\psi_q(p) = 2\pi\sqrt{1+p^2}\,\delta(p-q) + \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{2E_q - 2E_p + i\epsilon}\int d\Omega_k V(\vec{p},k,E_q)\psi_q(k).$$

§ 2. Нерелятивистский случай

Мы приведем здесь важнейшие формулы одномерной квантовой механики, так как сопоставление с ними соответствующих релятивистских формул оказывается поучительным.

Уравнение Шредингера:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+2E_q\right)\psi_q(x)=V(x)\psi_q(x). \tag{2.1}$$

(2.1) может быть заменено на интегральное уравнение

$$\psi_q(x)=e^{iqx}+\int G_q^{(+)}(x,x')V(x')\psi_q(x')dx', \tag{2.2}$$

где

$$G_q^{(+)}(x,x')=\frac{1}{2\pi}\int e^{ikx}\frac{dk}{2E_q-2E_k+i\epsilon}e^{-ikx'}=$$

$$=\frac{1}{2i|q|}e^{i|q(x-x')|}, \tag{2.3}$$

есть функция Грина, соответствующая случаю рассеяния и удовлетворяющая уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+2E_q\right)G_q^{(+)}(x,x')=\delta(x-x'). \tag{2.4}$$

Волновая функция $\psi_q(x)$ имеет следующее асимптотическое поведение

$$\psi_q(x)\cdot e^{iqx}+\sigma(-q,q)e^{-iqx} \qquad x\to-\infty, \tag{2.5a}$$

$$\psi_q(x) = (1 + a(q, q))e^{iqx}, \tag{2.5б}$$

где амплитуда рассеяния $a(p,q)$ вне энергетической поверхности $p^2 = q^2$ задается формулой

$$a(p,q) = -\frac{i}{2|q|}\int e^{-ipx} V(x)\psi_q(x)dx. \tag{2.6}$$

Волновая функция в импульсном представлении

$$\psi_q(p) = \int e^{-ipx}\psi_q(x)dx \tag{2.7}$$

связана с амплитудой рассеяния $a(p,q)$ соотношением

$$\psi_q(p) = 2\pi\delta(p-q) + \frac{2i|q|\,a(p,q)}{2E_q - 2E_p + i\epsilon}. \tag{2.8}$$

Уравнение Шредингера в импульсном представлении имеет вид

$$\psi_q(p) = 2\pi\delta(p-q) + \frac{1}{2\pi}\,\frac{1}{2E_q - 2E_p + i\epsilon}\int V(p-k)\psi_q(k)dk. \tag{2.9}$$

Подставляя (2.8) в (2.9), получаем уравнение Липмана-Швингера

$$a(p,q) = -\frac{i}{2|q|}V(p-q) + \frac{1}{2\pi}\int dk\,\frac{V(p-k)a(k,q)}{2E_q - 2E_k + i\epsilon}. \tag{2.10}$$

При вещественном потенциале из уравнения (2.1) следует уравнение непрерывности

$$\frac{d}{dx}j(x) = 0, \tag{2.11}$$

причем ток $j(x)$ выражается через волновую функцию $\psi\ (x)$ следующим образом:

$$j(x)=-i(\psi_q^* \frac{d}{dx}\psi_q - \psi_q \frac{d}{dx}\psi_q^*) = \tag{2.12}$$

$$=\psi_q^* \hat{p}\,\psi - \psi_q\,\hat{p}\,\psi_q^*\ ;$$

$$\hat{p} = -i\,\frac{d}{dx}.$$

Условие унитарности (1.10) является следствием уравнения непрерывности (2.11).

§ 3. Релятивистское конфигурационное представление

Однопараметрическая группа движений одномерного пространства Лобачевского, реализующегося на гиперболе (1.1), является совокупностью преобразований вида

$$p\,' = p(+)k = p + p(\sqrt{1+p^2} + \frac{pk}{1+\sqrt{1+k^2}}). \tag{3.1}$$

Введем одномерное "преобразование Шапиро" (ср. /8/) как разложение по полной системе матричных элементов неприводимых унитарных представлений группы преобразований (3.1). Эти матричные элементы имеют вид:

$$\xi\ (p,x) = (p_0 - p)^{-ix}, \tag{3.2}$$

где x есть собственное значение оператора Казимира данной группы

$$-\ \infty < x < \infty\ . \tag{3.3}$$

В нерелятивистском пределе $\xi(p,x) \to e^{ipx}$. Как и обычные плоские волны e^{ipx}, величины $\xi(p,x)$ образуют полную ортогональную систему

$$\frac{1}{2\pi}\int \xi(p,x)\xi^*(p,x')d\Omega = \delta(x-x'), \tag{3.4а}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int \xi(p,x)\xi^*(p',x)dx = \delta(p(-)p') = \sqrt{1+p^2}\;\delta(p-p'). \tag{3.4б}$$

В "полярной" системе координат

$$p = sh\chi_p \quad , \quad p_0 = ch\chi_p \tag{3.5}$$

функции ξ приобретают вид

$$\xi(p,x) = e^{i\chi_p \cdot x}, \tag{3.6}$$

а преобразование (3.1) сводится к сложению гиперболических аргументов

$$\chi_{p'} = \chi_p + \chi_k \,. \tag{3.7}$$

Совершая преобразование Шапиро[x/]

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int \xi(p,x)\psi(p)d\Omega \quad , \tag{3.8}$$

$$V(p(-)k) = \int \xi^*(p,x)V(x)\xi(k,x)\,dx =$$

$$= \int \xi^*(p(-)k,x)\,V(x)dx, \tag{3.9}$$

[x/] Формула (3.9) соответствует случаю локальных потенциалов $V(p;k) = V(p(-)k)$. Мы в данной работе рассматриваем только локальные потенциалы.

получим вместо (1.14) уравнение

$$\psi_q(x)=\xi(q,x)+\int G_q^{(+)}(x,x')V(x')\psi_q(x')dx', \tag{3.10}$$

где $G_q^{(+)}$ – релятивистская одномерная функция Грина:

$$G_q^{(+)}(x,x')=\frac{1}{2\pi}\int\xi(k,x)\frac{1}{2E_q-2E_k+i\epsilon}\xi^*(k,x')d\Omega_k=$$

$$=\frac{1}{2i|q|}\left\{\frac{e^{i|\chi_q(x-x')|}}{1-e^{-2\pi|x-x'|}}+\frac{e^{-i|\chi_q(x-x')|}}{1-e^{2\pi|x-x'|}}\right\}. \tag{3.11}$$

Плоские волны $\xi(q,x)$ удовлетворяют уравнению

$$[2E_q-H_0]\xi(q,x)=0, \tag{3.12}$$

где свободный гамильтониан H_0 есть оператор вида

$$H_0=2\,chi\frac{d}{dx}, \tag{3.13}$$

соответственно функция Грина (3.11) удовлетворяет уравнению

$$[2E_q-H_0]G_q^{+}(x,x')=\delta(x-x'). \tag{3.14}$$

Действуя оператором $(2E_q-H_0)$ на обе части (3.10), приходим к разностному уравнению Шредингера

$$[2E_q-H_0+V(x)]\psi_q(x)=0. \tag{3.15}$$

Соотношение (2.6) обобщается на релятивистский случай следующим образом:

$$a(p,q) = -\frac{i}{2|q|}\frac{1}{2\pi}\int V(p(-)k)\psi_q(k)d\Omega_k =$$

$$= -\frac{i}{2|q|}\int \xi^*(p,x)V(x)\psi_q(x)dx. \tag{3.16}$$

При вещественном потенциале $V(x)$ из (3.15) следует уравнение непрерывности

$$\Delta J(x) = 0, \tag{3.17}$$

где

$$J(x) = \psi_q(x)\, sh\, i\frac{d}{dx}\psi_q^*(x) - \psi_q^*(x)\, sh\, i\frac{d}{dx}\psi_q(x) =$$

$$= -[\psi_q(x)\hat{p}\,\psi_q^*(x) - \psi_q^*(x)\hat{p}\,\psi_q(x)]. \tag{3.18}$$

В нерелятивистском пределе разностный оператор импульса переходит в дифференциальный

$$\hat{p} = sh\, i\frac{d}{dx} \longrightarrow i\frac{d}{dx}, \tag{3.19}$$

а соотношения (3.17) и (3.18) в (2.11) и (2.12) соответственно.

При $x \to \pm\infty$ волновая функция $\psi_q(x)$ имеет следующие асимптотики

$$\psi_q(x) = e^{i\chi_q x} + b(q)e^{-i\chi_q x} \qquad x \to -\infty \tag{3.20a}$$

$$\psi_q(x) = c(q)e^{i\chi_q x} \qquad x \to +\infty, \tag{3.20б}$$

где

$$b(q) = -\frac{i}{2|q|}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\chi_q x} V(x)\psi_q(x)\,dx = a(-q,q), \tag{3.21а}$$

$$c(q) = 1 - \frac{i}{2|q|}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\chi_q x} V(x)\psi_q(x)\,dx = 1 + a(q,q). \tag{3.21б}$$

Легко теперь видеть, что условие унитарности (1.12) является следствием уравнения непрерывности (3.17).

§ 4. Точно решаемые задачи

Простейшие потенциалы, для которых конечно-разностное уравнение (3.15) решается точно, это потенциалы, которые имеют разные постоянные значения в отдельных областях пространства и переходят скачком от одного значения к другому в точках, разделяющих такие области. Из уравнения неразрывности следует, что величины $\psi_q(x)\, sh\, i\frac{d}{dx}\psi_q(x)$ должны быть непрерывны в точках, где $V(x)$ претерпевает разрыв.

П о т е н ц и а л ь н ы й   я щ и к

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le a \\ \infty & x < 0,\ x > a. \end{cases} \tag{4.1}$$

Волновая функция имеет вид:

$$\psi_q(x) = \begin{cases} 0 & x < 0,\ x > a \\ A \sin \chi_q x & 0 \le x \le a. \end{cases} \tag{4.2}$$

Из условия

$$\psi(a) = 0 \tag{4.3}$$

следует соотношение для дискретных уровней энергии (в обычной системе единиц)

$$E_q = mc^2 \, ch \frac{\pi n h}{amc} \quad (n = 1,2,\ldots). \tag{4.4}$$

Потенциальная яма

$$V(x) = \begin{cases} -V_0 & |x| \le b \\ 0 & |x| > b \end{cases} \tag{4.5}$$

Квазипотенциал и оператор свободной энергии инвариантны относительно преобразования инверсии $x \to -x$. Все стационарные состояния относятся либо к состояниям с положительной чётностью, либо к состояниям с отрицательной четностью, поэтому достаточно найти решение лишь в области $x > 0$. Волновая функция имеет вид

$$\psi_q(x) = \begin{cases} A^+ \cos a x & \\ A^- \sin a x & 0 \le x < b \\ B\, e^{-\chi_q x} & x > b, \end{cases} \tag{4.6}$$

где

$$E_q = \cos \chi_q, \quad ch\, a = \cos \chi_q + \frac{V_0}{2}. \tag{4.7}$$

Дискретные уровни энергии получаются из соотношения

$$E_q = \cos \chi_n , \tag{4.8}$$

где χ_n - решения уравнений

$$tg\, a b = \frac{\sin \chi}{sh\, a} \tag{4.9а}$$

для состояний с положительной четностью,

$$ctg\, a b = -\frac{\sin \chi}{sh\, a} \tag{4.9б}$$

-для состояний с отрицательной четностью соответственно.

В случае сплошного спектра $(E = ch\chi \geq 1)$ получается следующее выражение для коэффициента прохождения:

$$D = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}\left(\frac{sh\chi_q}{sh a} - \frac{sh\, a}{sh\chi_q}\right)\sin^2 a a} , \tag{4.10}$$

где $a = 2b$ - ширина потенциальной ямы.

Отметим следующее существенное обстоятельство. Оно непосредственно связано с общей зависимостью между дискретными уровнями энергии и поведением амплитуды рассеяния в комплексной χ плоскости. Коэффициенты D и R имеют полюсы при чисто мнимых значениях χ ,соответствующих дискретным уровням энергии.

В частном случае потенциальной ямы условие обращения D и R в бесконечность

$$1+\frac{1}{4}\left(\frac{sh\chi}{sh\,a}-\frac{sh\,a}{sh\,\chi}\right)\sin^2 a a=0 \qquad (4.11)$$

эквивалентно уравнениям (4.9) для дискретных уровней энергии.

§5. Дифференциальное квазипотенциальное уравнение

Если ограничиться требованием, чтобы уравнение (1.5) задавало лишь правильную физическую амплитуду на массовой поверхности, то можно выбрать функцию Грина в виде

$$G_q^{(+)}(x,x')=\frac{1}{2\pi}\int e^{i\chi_k x}\frac{d\chi_k}{\chi_q^2-\chi_k^2+i\epsilon}e^{-i\chi_k x'}. \qquad ((5.1)$$

Соответствующее уравнение для волновой функции будет дифференциальным

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}+\chi_q^2-V(x,\chi_q)\right)\psi_q(x)=0. \qquad (5.2)$$

Рассмотрим несколько потенциалов, для которых уравнение (5.2) имеет точное решение.

I. $V(x)=\dfrac{\omega^2 x^2}{2}$. (5.3)

Волновые функции имеют вид

$$\psi_n(x)=[\sqrt{\pi}\cdot n!2^n]^{-1/2}e^{-\frac{\omega^2 x^2}{2}}H_n\left(x\sqrt{\frac{\omega}{2}}\right), \qquad (5.4)$$

где H_n –полиномы Эрмита. Энергетические уровни определяются из формулы

$$E_n = mc^2\, ch(\sqrt{\omega(n+1/2)}). \tag{5.5}$$

II.

$$V(x) = -\frac{V_0}{ch^2\frac{x}{a}}. \tag{5.6}$$

Волновые функции:

$$\psi(x) = (ch\frac{x}{a})^{-2\lambda}\; {}_2F_1(-\lambda+\kappa,\, -\lambda-\kappa;\, \frac{1}{2};\, -sh^2\frac{x}{a}), \tag{5.7}$$

где

$$\lambda = \frac{1}{4}(\sqrt{4V_0a^2+1} - 1), \quad \kappa = \frac{a|\chi|}{2}. \tag{5.8}$$

Уровни энергии имеют вид:

$$E_n = \cos\{\frac{1}{a}[\frac{1}{2}\sqrt{4V_0a^2+1} - (n+1/2)]\} \tag{5.9}$$

$$n = 0,1,2\ldots$$

III.

$$V(x) = V_0(\frac{a}{x} - \frac{x}{a})^2. \tag{5.10}$$

Волновые функции:

$$\psi_n \simeq x^{\nu} e^{-\sqrt{\frac{V_0}{4a^2}}\,x^2} {}_2F_1\left(-n,\ \nu+1/2;\ \sqrt{\frac{V_0}{a^2}}\,x^2\right), \tag{5.11}$$

где

$$\nu = \frac{1}{2}\left(\sqrt{4V_0a^2+1}-1\right), \quad n=0,1,2,\ldots \tag{5.12}$$

Уровни энергии

$$E_n = ch\left\{\frac{2}{a}\sqrt{4V_0}\left[n+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(\sqrt{4V_0a^2+1}-\sqrt{4V_0a^2}\right)\right]\right\}. \tag{5.13}$$

IV.

$$V = V_0\ ctg^2\frac{\pi}{a}x. \tag{5.14}$$

Волновая функция

$$\psi_n(x) = \begin{cases} c_n\left(\sin\frac{\pi x}{a}\right)^{-2\lambda} F\left(-\frac{n}{2}-2\lambda,\ \frac{n}{2};\ \frac{1}{2}\ ;\ \cos^2\frac{\pi x}{a}\right) & n=1,3,5 \\ c_n\left(\sin\frac{\pi x}{a}\right)^{-2\lambda}\cos\frac{\pi x}{a}\ F\left(-\frac{n}{2}-2\lambda+\frac{1}{2};\ \frac{n}{2}+\frac{1}{2};\ \frac{3}{2}\ ;\ \cos\frac{2\pi x}{a}\right) & n=2,4,6, \end{cases} \tag{5.15}$$

где

$$\lambda = \frac{1}{4}\left(\sqrt{\frac{4V_0 a^2}{\pi^2} + 1} - 1\right); \qquad (5.16)$$

Уровни энергии

$$E_n = ch\,\frac{\pi}{a}\sqrt{n^2 + 4n\lambda - 2\lambda}, \quad n = 1,2,3,4\ldots \qquad (5.17)$$

Основываясь на уровнении (5.2), можно изучить аналитические свойства амплитуды рассеяния. Мы приведем здесь лишь результат – дисперсионное отношение для амплитуды прохождения $c(q)$. Оно имеет вид:

$$Re\,c(E) = 1 + \frac{1}{\pi}\,P\int_{\infty}^{-1}\frac{Im\,c(E')}{E'-E}\,dE' +$$

$$+\frac{1}{\pi}\,P\int_{1}^{\infty}\frac{Im\,c(E')}{E'-E}\,dE' + \sum_{j}\frac{res[c(E),E_j]}{E-E_j}, \qquad (5.18)$$

причем

$$res[c(E),E_j] = \frac{\sqrt{1-E_j^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f_1(E_j,x) f_2(E_j;x)}; \qquad (5.19)$$

где $f_{1,2}(E,x)$ – решения Йоста, удовлетворяющие следующим граничным условиям:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-i\chi x} f_1(E,x)=1$$

,

$$\lim e^{i\chi x} f_2(E,x)=1$$

$$\chi = \ln\,(E+\sqrt{E^2-1}). \tag{5.20}$$

В заключение авторы приносят благодарность В.Р.Гарсеванишвили, А.Д.Донкову, В.Г.Кадышевскому, М.Д. Матееву, Н.Б.Скачкову и А.Н.Тавхелидзе за полезные обсуждения.

Литература

1. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cimento 29, 380 (1963).
2. V.G.Kadyshevsky. Nucl.Phys., B6, 125 (1968). V.G.Kadyshevsky, M.D.Mateev. Nuovo Cim., 55A, 275 (1968).
3. A.N.Tavkhelidze. Lectures on Quasipotential Method in Field Theory, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay (1964).
4. В.Р.Гарсеванишвили, В.А.Матвеев, Л.А.Слепченко. Проблемы физики элементарных частиц и атомного ядра том. 1, вып. 1, Москва, Атомиздат 1970 год.
5. В.Г.Кадышевский, Р.М.Мир-Касимов, Н.Б.Скачков. "Трехмерная формулировка релятивистской проблемы двух тел "Проблемы физики элементарных частиц и атомного ядра" том. 2, вып. 3, Москва, Атомиздат 1972 (В обзорах /3-5/ имеют подробные списки литературы).
6. V.G.Kadyshevsky, R.M.Mir-Kasimov, N.B.Skachkov. Nuovo Cimento 55A, 233 (1968).

7. П.Н.Гольдман,В.Д.Кривченков.Сборник задач по квантовой механике. Гостехиздат, Москва, 1957 г.

8. И.С.Шапиро. ДАН СССР, 106, 647 (1956); ЖЭТФ, 43, 1727 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
11 июля 1972 г.