СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 6586

В.А.Алебастров, Г.В.Ефимов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УНИТАРНОСТИ S -МАТРИЦЫ В НЕЛОКАЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

P2 - 6586

В.А.Алебастров, Г.В.Ефимов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО УНИТАРНОСТИ S -МАТРИЦЫ В НЕЛОКАЛЬНОЙ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1. Постулат унитарности S-матрицы в квантовой теории поля является одним из основных требований, без выполнения которого теория не может рассматриваться само-согласованной и физически приемлемой. Поэтому доказательство унитарности имеет первостепенное значение при построении S-матрицы в различных моделях квантовой теории поля.

2. В настоящей работе будет доказана унитарность S- матрицы в нелокальной квантовой теории поля, предложенной одним из авторов /1/. Будем рассматривать теорию однокомпонентного скалярного поля $\varphi(x)$, для которого плотность лагранжиана записывается в виде:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + g\mathcal{L}_I(x)$$

$$\mathcal{L}_0(x) = \frac{1}{2} :\left[\partial_\mu \varphi(x) \partial_\mu \varphi(x) - m^2 \varphi^2(x)\right]:$$

$$g\mathcal{L}_I(x) = g :\left[\Phi(x)\right]^N:$$

Здесь N - некоторое целое число и

$$\phi(x) = \int dx' K(x-x')\varphi(x') = K(\ell^2\Box)\varphi(x),$$

где

$$K(x-x') = K(\ell^2\Box)\delta^{(4)}(x-x')$$

нелокальная обобщённая функция (см./I/). Параметр ℓ имеет смысл "элементарной длины".

Введение нелокальности в лагранжиан взаимодействия описанным выше способом приводит к тому, что в ряду теории возмущений для S- матрицы причинная функция скалярного поля изменяется так:

$$\frac{1}{m^2-k^2-i\varepsilon} \longrightarrow \frac{[K(\ell^2k^2)]^2}{m^2-k^2-i\varepsilon}.$$

Мы предполагаем, что функция $V(z) = [K(z)]^2$ имеет следующие свойства:

I) $V(z)$ - целая аналитическая функция в комплексной z- плоскости некоторого конечного порядка роста $\frac{1}{2} \leq \rho < \infty$,

2) $[V(z)]^* = V(z^*)$,

3) $V(\ell^2 m^2) = 1$,

4) $V(z) = O\left(\frac{1}{|z|^{1+\lambda}}\right)$ при $Re\, z \to -\infty$ и $0<\lambda<1$.

Например:

$$V_1(\ell^2 \kappa^2) = e^{-\ell^2(m^2-\kappa^2)} \quad ; \quad V_2(\ell^2\kappa^2) = \left[\frac{\sin \ell\sqrt{m^2-\kappa^2}}{\ell\sqrt{m^2-\kappa^2}}\right]^4 . \tag{I}$$

3. Пространство основных функций Z_a $(a \geqslant 1)$ состоит из всех тех целых функций $f(z_1,\dots,z_n)$ от n комплексных переменных $z_j = x_j + iy_j$ $(j=1,\dots,n)$, которые удовлетворяют условиям:

а) для каждой $f \in Z_a$ существуют такие $C>0$ и $A_j>0$ $(j=1,\dots,n)$, что

$$|f(z_1,\dots,z_n)| \leqslant C \exp\left\{\sum_{j=1}^{n} A_j |z_j|^a\right\},$$

б) $$\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int dx_1\dots dx_n |f(\dots,x_j+iy_j,\dots)| < \infty, \quad \forall y_j$$

Будем считать, что $\rho < \frac{a}{2(a-1)}$.

Пространство $\tilde{Z}_a$, являющееся пространством фурье-образов функций $f \in Z_a$, состоит из дифференцируемых функций $\tilde{f}(p_1,\dots,p_n)$, для которых справедлива оценка

$$|\tilde{f}(p_1,\dots,p_n)| \leqslant C \exp\left\{-\sum_{j=1}^{n} B_j |p_j|^\gamma\right\}$$

при некоторых $C>0$ и $B_j>0$ $(j=1,\dots,n)$; $\gamma = \frac{a}{a-1} > 1$ и $\rho < \frac{1}{2}\gamma$.

4. Стандартные методы квантовой теории поля /2/ приводят к тому, что S-матрица формально представляется в виде:

$$S[g]=T\exp\left\{i\int dx\, g(x)\mathcal{L}_I(x)\right\}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{i^n}{n!}\int dx_1\ldots\int dx_n\, g(x_1)\ldots g(x_n)\, S_n(x_1,\ldots,x_n).$$

Здесь $g(x)$ - функция включения взаимодействия. $S_n(x_1,\ldots,x_n)$- -оператор, который можно представить в виде разложения по нормальным произведениям поля $\varphi(x)$:

$$S_n(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{m_1,\ldots,m_n}K^{(n)}_{m_1\ldots m_n}(x_1,\ldots,x_n):\frac{\varphi^{m_1}(x_1)}{m_1!}\ldots\frac{\varphi^{m_n}(x_n)}{m_n!}:$$

Коэффициентные функции $K^{(n)}_{m_1\ldots m_n}$ выражаются через произведения нелокальных пропагаторов поля

$$D(x_i-x_j)=\frac{1}{(2\pi)^4 i}\int\frac{d^4k\, V(\ell^2k^2)e^{-ik(x_i-x_j)}}{m^2-k^2-i\varepsilon}.$$

Поскольку функция $D(x)$ сингулярна при $x=0$, произведение причинных функций $D(x)$ математически не определено. Определение конструкций вида

$$K^{(n)}_{m_1\ldots m_n}(x_1,\ldots,x_n) \sim \prod_{i,j} D(x_i - x_j)$$

является основной проблемой при построении конечной S-матрицы.

Обычным приёмом при решении этой проблемы является использование некоторой промежуточной регуляризации, придающей математический смысл элементам S-матрицы.

Коэффициентные функции $K^{(n)}_{m_1\ldots m_n}(x_1,\ldots,x_n)$ должны быть заданы как обобщённые функции на некотором пространстве основных функций. Они строятся как предел локально интегрируемых функций $K^{(n)\delta}_{m_1\ldots m_n}(x_1,\ldots,x_n)$ при помощи регуляризации, задаваемой параметром δ, таким образом, что в несобственном смысле существует предел

$$\lim_{\delta\to 0} K^{(n)\delta}_{m_1\ldots m_n}(x_1,\ldots,x_n) = K^{(n)}_{m_1\ldots m_n}(x_1,\ldots,x_n)$$

или, иначе,

$$S[g] = \lim_{\delta\to 0} S^{\delta}[g].$$

Совершенно не очевидно, что S-матрица, построенная таким способом, удовлетворяет исходным аксиомам и, в частности, условию унитарности

$$S[g]S^{+}[g]=S^{+}[g]S[g]=1.$$

5. Мы построим наше доказательство следующим образом. Пусть существует такая регуляризационная процедура, которая обладает следующими свойствами:

(I). Регуляризованные функции $K^{(n)\delta}_{m_1\ldots m_n}$ непрерывны и ограничены и

$$\lim_{\delta\to 0} K^{(n)\delta}_{m_1\ldots m_n}(x_1,\ldots,x_n)=K^{(n)}_{m_1\ldots m_n}(x_1,\ldots,x_n)\in Z'_a,$$

т.е. определена регуляризованная $S^{\delta}[g]$ -матрица и существует несобственный предел:

$$\lim_{\delta\to 0} S^{\delta}[g]=S[g].$$

(2). Положительно-частотные функции Грина, определяющие операцию произведения в

$$S[g]\,S^{+}[g]\overset{}{\underset{Df.}{=\!=}} S[g]\otimes S^{+}[g],$$

т.е. соответствующие переходу к нормальному произведению, согласно теореме Вика, также регуляризуются и существует предел

$$\lim_{\delta\to 0} D^{\delta}_{(-)}(x-y)=\Delta_{(-)}(x-y)$$

или, символически , $\lim\limits_{\delta\to 0} \otimes^{\delta} = \otimes$.

(3). В соотношении

$$J[g]=\lim_{\delta_1\to 0}\lim_{\delta_2\to 0}\lim_{\delta_3\to 0} S^{\delta_1}[g]\otimes^{\delta_2} S^{\delta_3 +}[g]$$

предел не зависит от порядка предельных переходов к точке $\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$, т.е. оператор $J(\delta_1,\delta_2,\delta_3)=S^{\delta_1}\otimes^{\delta_2}S^{\delta_3+}$ непрерывен в точке $\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$.

(4). Регуляризация подобрана таким образом, что

$$S^{\delta}[g]\otimes^{\delta} S^{\delta+}[g]\equiv 1 \qquad (\delta>0).$$

Тогда справедлива цепочка равенств:

$$J[g]=S[g]\,S^{+}[g]=S[g]\otimes S^{+}[g]=$$
$$=\lim_{\delta_1\to 0}\lim_{\delta_2\to 0}\lim_{\delta_3\to 0} S^{\delta_1}[g]\otimes^{\delta_2} S^{\delta_3+}[g]=$$
$$=\lim_{\delta\to 0} S^{\delta}[g]\otimes^{\delta} S^{\delta+}[g]=\lim_{\delta\to 0} 1 = 1 .$$

Это означает, что S-матрица унитарна. Покажем, что существует регуляризация, удовлетворяющая всем перечисленным выше условиям.

6. Опишем нашу регуляризационную процедуру. Для нело-

кального формфактора $V(\ell^2\kappa^2)$ в области $\kappa^2<m^2$ справедливо представление Меллина:

$$V(\ell^2\kappa^2)=\frac{1}{2i}\int\limits_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty}\frac{d\zeta\, v(\zeta)}{\sin\pi\zeta}(m^2-\kappa^2-i\varepsilon)^{\zeta}, \tag{2}$$

где $1<\beta<2$. Функция $v(\zeta)$:

I) регулярна в полуплоскости $Re\zeta>-2$ и в этой области

$$|v(x+iy)|\leqslant C\frac{e^{\tau|y|}}{(1+|y|)^M\,\Gamma\left(\frac{|x|}{\rho}\right)}$$

при любых $M>0$ и некотором $C>0$;

2) в точке $\zeta=-1$ имеет нуль, по крайней мере, первого порядка;

3) $v(0)=1$;

4) $[v(\zeta)]^*=v(\zeta^*)$.

Для функций $V_1(\ell^2\kappa^2)$ и $V_2(\ell^2\kappa^2)$ в (I), в частности, имеем

$$v_1(\zeta)=\frac{\ell^{2\zeta}}{\Gamma(1+\zeta)}\ ;\quad v_2(\zeta)=\frac{\ell^{2\zeta}[2^{4\zeta+5}-2^{2\zeta+3}]}{\Gamma(5+2\zeta)}.$$

Представление (2) справедливо при $\kappa^2<m^2$. Для пе-

рехода в область $k^2 > m^2$ необходимо перейти от интегрирования в ζ- плоскости от контура L_0 к контуру L_θ $\left(0<\theta\leq\frac{\pi}{2}\right)$, где

$$L_\theta = \left[\zeta :\ \zeta=(-1-\lambda)+a e^{\pm i\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)},\ 0<\lambda<1,\ \forall a\geq 0,\ 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}\right],$$

как показано на рис. I :

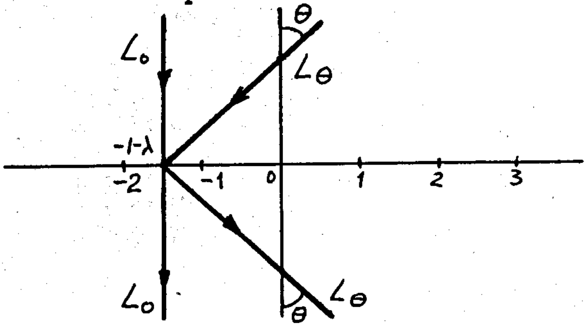

Рис. I.

Введём регуляризованную функцию

$$\tilde{D}^\delta(k^2)=\frac{1}{2i}\int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty}\frac{d\zeta\, v(\zeta)\, e^{\delta\zeta^2}}{\sin\pi\zeta}\left(m^2-k^2-i\varepsilon\right)^{\zeta-1}.$$

Функция $\tilde{D}^\delta(k^2)$ при $\delta>0$:

5) определена во всей комплексной k^2- плоскости и регулярна везде, кроме разреза вдоль луча $[m^2, +\infty)$,

6) $\tilde{D}^\delta(k^2) = O\left(\frac{1}{|k^2|^{2+\lambda}}\right)$ при $|k^2|\to\infty$

7) $$\lim_{\delta\to 0} \tilde{D}^{\delta}(k^2) = \tilde{D}(k^2)$$

Для функции $\tilde{D}^{\delta}(k^2)$ существует фурье-образ

$$D^{\delta}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4k\, e^{-ikx} \tilde{D}^{\delta}(k^2) =$$

$$= \frac{1}{2i} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} \frac{d\zeta\, v(\zeta)\, e^{\delta\zeta^2}}{\sin\pi\zeta} D(x,\zeta), \tag{3}$$

где

$$D(x,\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4k\, e^{-ikx} (m^2 - k^2 - i\varepsilon)^{\zeta-1} =$$

$$= i\, \frac{2^{\zeta} m^{1+\zeta} e^{-i\pi\zeta}}{8\pi\Gamma(1-\zeta)} \cdot \frac{H^{(2)}_{1+\zeta}\left(m\sqrt{x^2 - i\varepsilon}\right)}{\left(\sqrt{x^2 - i\varepsilon}\right)^{1+\zeta}}. \tag{3a}$$

Здесь $H^{(2)}_{\nu}(z)$ – функция Ганкеля.

Легко видеть, что функция $D^{\delta}(x)$ ограничена в точке $x = 0$. В смысле обобщённых функций

$$\lim_{\delta\to 0} D^{\delta}(x) = D(x).$$

Таким образом, при $\delta > 0$ $D^{\delta}(x)$ является локально интегрируемой, и произведение типа $\prod_{i,j} D^{\delta}(x_i - x_j)$ также локально интегрируемо.

Регуляризованная S-матрица записывается в форме:

$$S^{\delta}[g] = 1 + \sum_{n\geq 1} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \ldots \int dx_n\, g(x_1)\ldots g(x_n)\, S^{\delta}_n(x_1, \ldots, x_n).$$

7. Для снятия регуляризации в матричных элементах S-матрицы достаточно перейти к евклидовой метрике по всем внутренним импульсам в интегралах, соответствующих любым связным диаграммам Фейнмана, поскольку $\tilde{\mathcal{D}}^{\delta}(k^2)$ регулярна в полуплоскости $\operatorname{Im} k^2 \geqslant 0$. После этого можно перейти к пределу $\delta \to 0$, поскольку функции $\tilde{D}(k^2)$ убывают при $k^2 \to -\infty$ (подробнее см/I/). Итак, существует предел в нелокальной теории

$$\lim_{\delta \to 0} S^{\delta}[g] = S[g].$$

8. Положительно и отрицательно частотные функции Грина регуляризуем следующим образом. Справедливы тождества

$$\Delta_{(\pm)}(k) = 2\pi\, \theta(\mp k_0)\, \delta(k^2 - m^2) =$$

$$= 2\pi\, \theta(\mp k_0)\, V(\ell^2 k^2)\, \delta(k^2 - m^2) =$$

$$= \frac{1}{i}\left[\frac{V(\ell^2 k^2)}{m^2 - k^2 - i\varepsilon} - \frac{V(\ell^2 k^2)}{m^2 - k^2 \mp i\varepsilon k_0}\right] =$$

$$= \frac{1}{2i}\int\limits_{L_\theta} \frac{d\zeta\, v(\zeta)}{\sin \pi\zeta} \cdot \frac{1}{i}\left[(m^2 - k^2 - i\varepsilon)^{\zeta - 1} - (m^2 - k^2 \mp i\varepsilon k_0)^{\zeta - 1}\right].$$

Введём регуляризованные функции

$$\tilde{D}^{\delta}_{(\pm)}(k)=\frac{1}{2i}\int\limits_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty}\frac{d\zeta\, v(\zeta)e^{\delta\zeta^2}}{\sin\pi\zeta}\frac{1}{i}\left[(m^2-k^2-i\varepsilon)^{\zeta-1}-(m^2-k^2\mp i\varepsilon k_0)^{\zeta-1}\right]$$

$$=\frac{1}{2i}\int\limits_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty}\frac{d\zeta\, v(\zeta)e^{\delta\zeta^2}}{\sin\pi\zeta}2\sin\pi\zeta\,\theta(\mp k_0)\theta(k^2-m^2)(k^2-m^2)^{\zeta-1}.$$

Существенно, что $D^{\delta}_{(\pm)}(k)\sim\theta(\mp k_0)\theta(k^2-m^2)$.

В X - пространстве получим

$$D^{\delta}_{(\pm)}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4 i}\int d^4k\, e^{-ikx}\tilde{D}^{\delta}_{(\pm)}(k)=$$

$$=\frac{1}{2i}\int\limits_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty}\frac{d\zeta\, v(\zeta)e^{\delta\zeta^2}}{\sin\pi\zeta}D_{(\pm)}(x,\zeta),\tag{4}$$

где $D_{(\pm)}(x,\zeta)=\frac{1}{(2\pi)^4 i}\int d^4k\, e^{-ikx}\frac{1}{i}\left[(m^2-k^2-i\varepsilon)^{\zeta-1}-(m^2-k^2\mp i\varepsilon k_0)^{\zeta-1}\right]=$

$$=i\frac{2^{\zeta}\cdot m^{1+\zeta}}{8\pi\Gamma(1-\zeta)}\left\{\frac{e^{-i\pi\zeta}H^{(2)}_{1+\zeta}(m\sqrt{x^2-i\varepsilon})}{(\sqrt{x^2-i\varepsilon})^{1+\zeta}}+2\theta(\pm x_0)\theta(x^2)\frac{J_{-(1+\zeta)}(m^2\sqrt{x^2})}{(\sqrt{x^2})^{1+\zeta}}\right\}.\tag{4a}$$

9. Точно повторяя рассуждения Боголюбова и Ширкова /2/, можно показать, что для выбранной регуляризации справедливо утверждение:

Если $K_1^{\delta}(x_1,\dots,x_n)$ и $K_2^{\delta}(y_1,\dots,y_m)$ трансляционно-инвариантные коэффициентные функции и в несобственном смысле

$$\lim_{\delta\to 0} K_1^{\delta}(x_1,\dots,x_n) = K_1(x_1,\dots,x_n),$$

$$\lim_{\delta\to 0} K_2^{\delta}(y_1,\dots,y_m) = K_2(y_1,\dots,y_m),$$

где $K_1(x_1,\dots,x_n)$ и $K_2(y_1,\dots,y_m)$ – обобщённые функции из пространства Z_a', и аргументы $x_1, \dots, x_n$ и $y_1, \dots, y_m$ независимы, то предел

$$\lim_{\delta_1\to 0}\lim_{\delta_2\to 0}\lim_{\delta_3\to 0} K_1^{\delta_1}(x_1,\dots,x_n)\prod D_{(-)}^{\delta_2}(x_s-y_t)K_2^{\delta_3}(y_1,\dots,y_m) =$$

$$= K_1(x_1,\dots,x_n)\prod \Delta_{(-)}(x_s-y_t)K_2(y_1,\dots,y_m)$$

существует как обобщённая функция из Z_a' и не зависит от способа перехода к пределу $\delta_1=\delta_2=\delta_3=0$.

Доказательство основано на том простом факте, что из ограниченности суммы отрицательных частот вытекает и ограниченность каждой отдельной частоты.

10. Разложим $S^{\delta}[g]\otimes^{\delta} S^{\delta+}[g]$ в ряд по теории возмущений, n- ый член ряда будет иметь вид

$$\int dx_1 \ldots \int dx_n\, g(x_1)\ldots g(x_n) \sum_{p=0}^{n} (-)^p \mathcal{P}\left(\frac{x_1,\ldots,x_p}{x_{p+1},\ldots,x_n}\right) S_p^{\delta}(x_1,\ldots,x_p) \otimes^{\delta} S_{n-p}^{\delta+}(x_{p+1},\ldots,x_n), \tag{5}$$

где $\mathcal{P}\left(\frac{x_1,\ldots,x_p}{x_{p+1},\ldots,x_n}\right)$ – оператор симметризации [2]. Операторное выражение $S_p^{\delta} \otimes^{\delta} S_{n-p}^{\delta+}$ строится согласно теореме Вика из регуляризованных функций $\mathcal{D}^{\delta}(x)$, $\mathcal{D}_{(-)}^{\delta}(x)$ и $\mathcal{D}^{\delta+}(x)$. Между этими функциями существуют соотношения, как следует из формул (3) и (4):

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{\delta}(x) &= \theta(x_0)\mathcal{D}_{(-)}^{\delta}(x) + \theta(-x_0)\mathcal{D}_{(+)}^{\delta}(x) \\
\mathcal{D}^{\delta+}(x) &= \theta(-x_0)\mathcal{D}_{(-)}^{\delta}(x) + \theta(x_0)\mathcal{D}_{(+)}^{\delta}(x) \\
\mathcal{D}_{(-)}^{\delta}(x) &= \theta(x_0)\mathcal{D}^{\delta}(x) + \theta(-x_0)\mathcal{D}^{\delta+}(x) \\
\mathcal{D}_{(+)}^{\delta}(x) &= \theta(-x_0)\mathcal{D}^{\delta}(x) + \theta(x_0)\mathcal{D}^{\delta+}(x).
\end{aligned} \tag{6}$$

Поэтому (см. [3]), если, например, из n аргументов $x_{10}, \ldots, x_{n0}$ – первый аргумент наименьший, т.е. $x_{10} < x_{j0}$ $(j=2,\ldots,n)$, то

$$S_p^{\delta}(x_1,\ldots,x_p) \otimes^{\delta} S_{n-p}^{\delta+}(x_{p+1},\ldots,x_n) =$$

$$= S_{p-1}^{\delta}(x_2,\ldots,x_p) \otimes^{\delta} S_{n-p+1}^{\delta+}(x_1, x_{p+1},\ldots,x_n).$$

Поскольку в (5) стоит симметризованное произведение $S_p^{\delta} \otimes^{\delta} S_{n-p}^{\delta +}$, то любой аргумент x_j может быть выбран наименьшим, и все члены суммы в (5) попарно сокращаются. Следовательно,

$$S^{\delta}[g] \otimes^{\delta} S^{\delta +}[g] \equiv 1. \qquad (\delta > 0)$$

Существенно, что $\delta > 0$, поскольку только в этом случае справедливы соотношения (6).

Это завершает доказательство унитарности S-матрицы в нелокальной теории.

Литература:

1. Г.В. Ефимов. Commun Math.Phys.,**5**,42, 1967; **7**, 138, 1968;
   Препринт ИТФ-52,54,Киев, 1968;
   Проблемы физики ЭЧАЯ, том. I, вып. I, 256 ,1970.
   Сб. ОИЯИ, 2-5400, Дубна, 1970.
2. Н.Н. Боголюбов. Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, М., 1957.
3. M.Veltman.Physica, **29**,186,1963.

Рукопись поступила в издательский отдел
II июля 1972 г.