СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 6564

Р.А.Асанов

СТАТИЧЕСКОЕ СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ И ПОВЕРХНОСТЬ "ГОРИЗОНТА"

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

Р2 - 6564

Р.А.Асанов

СТАТИЧЕСКОЕ СКАЛЯРНОЕ ПОЛЕ И ПОВЕРХНОСТЬ "ГОРИЗОНТА"

Асанов Р.А. P2 - 6564

Статическое скалярное поле и поверхность "горизонта"

Обращается внимание на то, что в рамках общей теории относительности слабое скалярное статическое поле может препятствовать образованию сингулярной поверхности Шварцшильда ("горизонта"). Использовано простейшее обобщение скалярного уравнения без массы.

Приведен пример статического сферически-симметричного тела, обладающего пространственными электрическим и скалярным зарядами размера меньшего ($R \sim 0{,}9 \frac{\kappa m}{c^2}$), чем обычно обсуждаемые размеры сингулярной поверхности. Решение не имеет никаких сингулярностей.

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1972

Asanov R.A. P2 - 6564

Static Scalar Field and "Event Horizon"

In the general relativity the weak static scalar field can exclude the creation of the event horizon. The simplest generalization of the massless scalar field equation is used.

An example of the electrically and scalar charged static body is given. The radius of the body ($R \sim 0.9 \frac{\kappa m}{c^2}$) is a little less than dimensions of the event horizon ordinary considered. No singularity occurs.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1972

В последнее время проявляется интерес к поведению различных полей в процессе гравитационного коллапса. Исторически наиболее изучено поведение электромагнитного поля /I/. В ряде работ рассматривается поведение нейтринного поля /2/. Прайс в своих работах /3/ рассматривает поведение скалярного поля. В частности, им доказывается теорема, что если в процессе коллапса образуется сингулярная поверхность Шварцшильда (так называемый "горизонт", или "горизонт событий"), то для статического скалярного поля не остается места. Математически это выражается в том, что скалярное поле должно обратиться в бесконечность. Это соображение легко проиллюстрировать, если вспомнить, что в сферически симметричном статическом случае с метрикой

$$ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\psi^2) + e^{\nu} dt^2, \qquad (I)$$
$$\lambda = \lambda(r), \quad \nu = \nu(r), \quad c = 1$$

и при использовании простейшего обобщения уравнения скалярного безмассового поля

$$\nabla_\sigma \nabla^\sigma V = -4\pi j, \qquad (2)$$

j – плотность источников поля, скалярное поле вне источников выражается в виде

$$V' = -\frac{G}{r^2} \exp \frac{\lambda - \nu}{2}. \qquad (3)$$

Здесь штрих означает $\frac{d}{dr}$, G – скалярный "заряд".

Под "горизонтом" обычно понимается поверхность, из-под которой внешний наблюдатель не может получить никакой информации. В статическом случае горизонт совпадает [4] с поверхностью бесконечного красного смещения, т.е. в метрике (I) он будет определяться значениями $e^{\lambda}=\infty$ либо $e^{\nu}=0$. Из формулы (3) очевидно, следует, что на горизонте производная скалярного поля становится бесконечной.

Хотелось бы, однако, обратить внимание на то, что ряд известных решений со статическим скалярным полем не приводит к образованию горизонта. Именно таково, например, решение задачи (I) - (2), приведенное Фишером [5]. В нем функции e^{λ} и e^{ν} от своих "шварцшильдовых" значений на пространственной бесконечности $\left(e^{\nu}\sim e^{-\lambda}\sim 1-\frac{2\varkappa m}{r}\right)$ гладко устремляются к нулю при $r\to 0$, нигде не обращаясь в нуль или бесконечность. Более того, в практически интересном случае малого скалярного заряда (и даже вплоть до $\varkappa G^2 \sim 1{,}8\, \varkappa^2 m^2$) функция e^{λ} остается большей единицы до расстояний, меньших, чем классический "радиус" поверхности Шварцшильда $r_g = 2\varkappa m$ и, кроме того, всюду $0\leqslant e^{\nu}<1$. (Условие $e^{\lambda}>1$ необходимо для получения статического решения без особенностей - см. Оппенгеймер и Снайдер [6]).

Поэтому на первый взгляд казалось бы, что на основе решения Фишера как "внешнего" можно построить внутреннее статическое решение без особенностей, в котором вещество сосредоточено в области, меньшей $r_g = 2\varkappa m$. Однако нами было показано [7], что по меньшей мере без привлечения "сторонних сил" или "натяжений" это сделать невозможно ввиду неизбежности особенности в центре ($e^{\lambda} \to 0$ при $r \to 0$). Известно [8], что при исчезающем скалярном заряде $(G \to 0)$ решение Фишера не переходит непрерывно в решение Шварцшильда, вблизи центра имеется существенная особенность по G. Это обстоятельство не представляется нам обескураживающим.

Рассмотрим еще одно решение со статическим скалярным безмассовым полем, не приводящее к образованию горизонта. Введем дополнительно электростатическое поле, подчиняющееся уравнениям Максвелла

$$\nabla_\mu F^{\sigma\mu} = 4\pi J^\sigma . \tag{4}$$

Мы не будем предполагать наличия каких-либо сторонних сил. Если ввести величину

$$z = r e^{\frac{\nu-\lambda}{2}} , \tag{5}$$

то уравнения Эйнштейна и поля вне масс и зарядов приводят к уравнению

$$z^2\left[\left(r - \frac{\varkappa\varepsilon^2}{r}\right)z'' - \frac{2\varkappa\varepsilon^2}{r^2}z'\right] = \varkappa G^2\left(1 - \frac{\varkappa\varepsilon^2}{r^2}\right)z', \tag{6}$$

асимптотика решений которого, подчиняющаяся условиям соответствия ньютоновскому приближению $\left(e^{-\lambda} \sim e^{\nu} \sim 1 - \frac{2\varkappa m}{r};\ r \to \infty\right)$, найдена в [7]. Все величины (вне масс и зарядов) просто выражаются через z :

$$e^{\lambda}=\frac{rz'}{z\left(1-\frac{\varkappa\varepsilon^2}{r^2}\right)}\,;\ e^{\nu}=\frac{zz'}{r-\frac{\varkappa\varepsilon^2}{r}}\,;\ V'=-\frac{G}{rz}\,;\ \varphi'=-\frac{\varepsilon z'}{r^2-\varkappa\varepsilon^2}. \quad (7)$$

Здесь $-\varphi'$ - электрическое поле, ε - электрический заряд. Первый интеграл уравнения (6) имеет вид

$$4D=z^2\left\{\left[1+\frac{\varkappa G^2}{z^2}+e^{\lambda}\left(1-\frac{\varkappa\varepsilon^2}{r^2}\right)\right]^2-4e^{\lambda}\right\}, \text{ или}$$

$$4D=z^2\left\{\left[1+\frac{\varkappa G^2}{z^2}+\frac{rz'}{z}\right]^2-\frac{4rz'}{z\left(1-\frac{\varkappa\varepsilon^2}{r^2}\right)}\right\}. \quad (8)$$

Здесь D - постоянная интегрирования. Этот интеграл остается справедливым и внутри вещества (без натяжений) и зарядов. Он является точным решением уравнений тяготения и поля и содержит только функции, которые должны быть непрерывными. Запишем (8) еще в одной форме

$$e^{\lambda}=\frac{\left(1+\frac{r\nu'}{2}\right)^2}{1+\frac{D}{r^2e^{\nu}}}, \quad (8')$$

из которой видно, что для необращения e^{λ} в нуль в центре $(r\to 0)$ следует положить $D=0$. Из рассмотрения асимптотики решений было получено /7/, что

$$D=\varkappa^2m^2+\varkappa G^2-\varkappa\varepsilon^2. \quad (9)$$

Не имея точного аналитического решения уравнения (6), мы решили его численно для значений

$$\varkappa \varepsilon^2 = 1{,}1\, \varkappa^2 m^2 \,; \quad \varkappa \sigma^2 = 0{,}1\, \varkappa^2 m^2 . \tag{I0}$$

Функция e^{λ} нигде не обращается в бесконечность, достигает максимума ($e^{\lambda} \sim 3{,}8$) при $r \sim$ I,4 $\varkappa m$, она больше единицы при $r \gtrsim$ 0,85 $\varkappa m$ и стремится к нулю при $r \to 0$. Функция e^{ν} нигде не обращается в нуль, достигает минимума ($e^{\nu} \sim$ 0,09) при $r \sim$ 0,85 $\varkappa m$, стремится к бесконечности при $r \to 0$ и меньше единицы, во всяком случае, в области, где $e^{\lambda} >$ I.

Таким образом, в этом решении горизонт отсутствует. Не имеется также особенностей (при $r > 0$) в поведении скалярного и электрического полей. Функция z при $r \to 0$ ведет себя следующим образом:

$$z \cong \frac{0{,}27}{r} - 0{,}21 + 0{,}06\, r - 0{,}10\, r^2 + \ldots \tag{II}$$

(здесь положено $\varkappa m = 1$).

Те факты, что $e^{\lambda} > 1$ при $r \gtrsim$ 0,85 $\varkappa m$ и что D =0 (в отличие от решения Фишера), позволят нам построить внутреннее решение без особенностей "размера" $R \sim$ 0,9 $\varkappa m$ с помощью введения "пылевидного" заряженного вещества без сторонних сил. В самом деле, на границе имеем (непрерывные) величины (здесь полагаем $\varkappa m = 1$)

$$e^{\lambda}=1{,}25\,;\; e^{\nu}=0{,}091\,;\; \nu'=0{,}266\,;\; z=0{,}243. \tag{I2}$$

Выберем функцию $\nu(r)$ в виде

$$\nu(r)=A\,r^{15}+B. \tag{I3}$$

Тогда условия непрерывности ν и ν' дают $(R=0{,}9)$

$$\begin{gathered} \exp\left(AR^{15}+B\right)=0{,}091\,, \\ 15\,AR^{14}=0{,}266\,. \end{gathered} \tag{I4}$$

Отсюда определяются $A\cong$ 0,078; $B\cong$ -2,4I. Кроме того, выберем (непрерывную на границе) величину $\varkappa(V')^2$ в форме

$$\varkappa(V')^2=118\,A\,r^{14}. \tag{I5}$$

Тогда электрическое поле будет сшито автоматически в силу уравнения Эйнштейна

$$\varkappa e^{-\nu}(\varphi')^2=\varkappa(V')^2-\frac{\nu'}{r}-\frac{1-e^{\lambda}}{r^2}\,,$$

откуда, ввиду (8′)

$$\varkappa e^{-\nu}(\varphi')^2=\varkappa(V')^2+\frac{1}{4}(\nu')^2\,.$$

Положительность плотности массы установим с помощью уравнения Эйнштейна

$$\left(8\pi\varkappa e^{\lambda}\right)\rho=\frac{\lambda'+\nu'}{r}-2\varkappa(V')^2,$$

или, в силу ($8'$) , так как $\lambda' = (\nu' + r\nu'')e^{-\frac{\lambda}{2}}$,

$$8\pi\varkappa e^{\lambda}\rho = \frac{\nu' + r\nu''}{re^{\lambda/2}} + \frac{\nu'}{r} - 2\varkappa(V')^2.$$

Подставляя выражения величин, получим

$$8\pi\varkappa e^{\lambda}\rho = 15Ar^{13}(15e^{-\frac{\lambda}{2}} + 1 - 15{,}7r) \geqslant 0$$

всюду внутри (т.к. $1 \leqslant e^{\frac{\lambda}{2}} \leqslant 1{,}12$), что и требовалось. Плотности электрического и скалярного зарядов ведут себя (приближенно) $\sim r^6$ и знакопостоянны внутри вещества. Поведение e^{λ} очевидно – она меняется от I,25 до I (в центре). Функция e^{ν} меняется очень слабо, она убывает к центру на величину $\sim$ 0,002 (т.к. $AR^{15} =$ 0,0I6). Тем самым построение модели без особенностей завершено. Нетрудно вычислить истинный радиус шара:

$$L = \int_0^R e^{\lambda/2} dr \cong 0{,}907\ \text{км},$$

который, конечно, весьма близок к характерному "размеру" $R =$ 0,9 км .

Рассмотренная задача наводит на соображение, что в определенных случаях даже весьма малое скалярное поле могло бы приводить к отсутствию "поверхности горизонта". Правда, в рассмотренном примере при исчезновении скалярного поля ($G \to 0$) нордстрем-райснеровский горизонт еще не должен бы появиться, т.к. $r_+ = \varkappa m + \sqrt{\varkappa^2 m^2 - \varkappa \varepsilon^2}$ – его "радиус"–при $\varkappa \varepsilon^2 = 1{,}1\, \varkappa^2 m^2$ еще мнимый. Это случай так называемой "голой сингулярности", не находящейся под горизонтом. Не считая такую картину сколь-нибудь последовательной, все же из-за того, что она иногда обсуждается /3,II/, заметим, что в рассмотренной здесь задаче можно было бы отвлечься от условия статического равновесия $D=0$ и полагать затем соотношения между m, ε и G другими. Анализ уравнения (6) при соблюдении условия соответствия с ньютоновским приближением показывает, что и в этом случае поверхность горизонта нигде не образуется (функция Z или функция $e^{\nu-\lambda}$, обращение которой в нуль свидетельствовало бы о наличии горизонта, нигде в нуль не обращается).

Нужно заметить, что при анализе более сложного обобщения уравнения Клейна-Гордона -(уравнения в форме Пенроуза /9/) было найдено /I0/ одно частное решение, обладающее горизонтом. Но это решение относится к строгому соотношению $\varkappa^2 m^2 = \frac{1}{3} \varkappa G^2$ и вряд ли имеет место при других соотношениях. Вообще же известные свойства этого уравнения в классическом случае сильно похожи на свойства простейшего уравнения (2). (В частности, сингулярность в центре).

Второе соображение носит более модельный характер, поскольку оно связано с конкретным полученным решением без особенностей и без горизонта. Дело в том, что "радиус" тела $\sim 0{,}9$ км меньше всех обычно обсуждаемых возможных размеров поверхности горизонта, простирающихся от $r_g = 2$ км до км. В связи с этим Пенроуз, например, пишет /II/, что " если ... интенсивные поиски в ближайшие годы не приведут к открытию темных "объектов" с массой больше $3M_\odot$, это будет крайне "неудобным" для существующей теории" (массе $3M_\odot$ соответствует $r_g \sim 9$ км, т.е. порядка радиуса нейтронных звезд). Полученное здесь решение имеет размер меньше км. Это означало бы, что даже объекты с массой $\sim 6M_\odot$ могли быть такого же размера и все же еще не "темными". Это может быть вполне "удобным" и для теории. Правда, в рассмотренном примере объект нес бы довольно большой электрический заряд - в размере одного заряда электрона на 10^{-6} грамма полной массы.

Приношу благодарность проф.М.А.Маркову за предложенную тему и постоянное внимание.

Литература:

1. J.C.Graves, D.R.Brill. Phys.Rev. 120, 1507 (1960).
   М.А.Марков, В.П.Фролов. ТМФ 3, №1(1970).
2. J.B.Hartle. Can a Schwarzschild Black Hole Exert Long Range Neutrino Forces, preprint (1971), Phys.Rev. D3, N.12, 2938 (1971).
3. R.Price, Ph.D.thesis, Cal Tech . 1970.
   K.S.Thorne, CalTech preprint OAP-236, Jan.1971.
4. B.Carter, Journ.Math.Phys. 10, 70 (1969).
   C.V.Vishveshwara. Journ.Math.Phys. 9, 1319 (1968).
5. И.З.Фишер. ЖЭТФ 18, 636 (1948).
6. J.R.Oppenheimer, H.Snyder. Phys.Rev. 56, 455 (1939).
   См.также Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория поля. "Наука", 1967.
7. Р.А.Асанов. ЖЭТФ 53, 673 (1967).
8. S.Deser, J.Higbie. Phys.Rev.Lett. 23, 1184 (1969).
   R.A.Asanov, JINR preprint E2-5005, Dubna (1970).
9. Р.Пенроуз. Лекции в Лез-уш, 1963. В сб. "Гравитация и топология", "Мир", 1966.
10. Н.М.Бочарова, К.А.Бронников, В.Н.Мельников. Вестник МГУ, сер.Ш, 11 , 706 (1970).
11. R.Penrose. Nature 236, N.5347, 377 (1972).

Рукопись поступила в издательский отдел
30 июня 1972 г.