СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 6496

А.А.Атанасов, В.Р.Гарсеванишвили

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА МЕТОДОМ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

1972

P2 - 6496

А.А.Атанасов, В.Р.Гарсеванишвили

РЕШЕНИЕ
УРАВНЕНИЯ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА МЕТОДОМ НЕОПРЕДЕЛЕННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

1. Введение

Квазипотенциальный подход в квантовой теории поля, предложенный первоначально Логуновым и Тавхелидзе [1], впоследствии был успешно применен при исследовании связанных состояний и задач рассеяния в системе двух частиц (см., например, обзоры [2-5]).

В ряде работ на основе квазипотенциального уравнения были исследованы аналитические свойства амплитуды рассеяния и, в частности, изучены траектории Редже для случая суперпозиции юкавских квазипотенциалов [6-8].

В настояшей работе изучается метод приближенного решения квазипотенциального уравнения для двух бесспиновых частиц в случае, когда ядро резольвентного уравнения не является квадратично интегрируемым, а лишь ограниченным. Решение представляется в виде суммы двух членов, один из которых представляет собой отношение двух полиномов по константе связи, а второй называется остатком [9,10]. В частном случае квадратично интегрируемых ядер получается решение Фредгольма. В некоторых случаях возможно добиться ситуации, когда остаток "достаточно мал" и решение принимает вид Паде-дроби.

Некоторые методы решения квазипотенциальных уравнений можно найти в работах [11-14]. Подробное же изложение теории интегральных уравнений, см., например, в [15].

2. Метод неопределенных коэффициентов

Рассмотрим квазипотенциальное уравнение [1] для амплитуды рассеяния:

$$T(\vec{p}, \vec{k}) = V(E; \vec{p}, \vec{k}) + \int \frac{d\vec{q}}{\sqrt{m^2 + \vec{q}^{\,2}}} \frac{V(E; \vec{p}, \vec{q})\, T(\vec{q}, \vec{k})}{\vec{q}^{\,2} - m^2 + E^2 - i0} . \quad (2.1)$$

Здесь $\vec{p}$, $\vec{k}$ – относительные импульсы двух частиц в начальном и конечном состояниях, соответственно $E = \frac{\sqrt{s}}{2}$, где s – квадрат полной энергии системы двух частиц в с.ц.м., на поверхности энергии $s = 4E^2 = 4(m^2 + \vec{p}^{\,2}) = 4(m^2 + \vec{k}^{\,2})$.

Отметим здесь же, что основные результаты, полученные в этой работе, легко могут быть перенесены на случаи, когда исходным пунктом является уравнение Кадышевского [16] для амплитуды рассеяния, или рассматривается вариант квазипотенциального подхода, предложенный Тодоровым [17].

В дальнейшем будем работать с парциальными величинами. Определим для этого парциальное разложение, например, для амплитуды рассеяния следующим образом:

$$T(\vec{p}, \vec{k}) = \frac{1}{2pk} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell + 1)\, T_\ell(p, k)\, P_\ell\left(\frac{\vec{p}\,\vec{k}}{pk}\right) . \quad (2.2)$$

Введем величину

$$R_\ell(p, k) = \phi(p)\, T_\ell(p, k)\, \phi(k) , \quad (2.3)$$

где:

$$\phi(p) = \sqrt{2\pi}\, \left[\sqrt{p^2 + m^2}\,(E^2 - m^2 - p^2)\right]^{-1/2} . \quad (2.4)$$

Легко видеть, что $R_\ell(p,k)$ удовлетворяет уравнению

$$R_\ell(p,k) = K_\ell(E;p,k) + \int\limits_0^\infty dq\, K_\ell(E;p,q)\, R_\ell(q,k). \qquad (2.5)$$

$R_\ell(p,k)$ можно рассматривать как резольвенту интегрального уравнения с ядром:

$$K_\ell(E;p,k) = \frac{2\pi}{\sqrt{E^2-m^2-p^2}}\,\frac{V_\ell(E;p,k)}{[(m^2+p^2)(m^2+k^2)]^{1/4}}\,\frac{1}{\sqrt{E^2-m^2-k^2}}\,. \qquad (2.6)$$

В дальнейшем будем рассматривать суперпозиции квазипотенциалов юкавского типа. В этом случае:

$$V_\ell(E;p,k) = \int\limits_{\mu^2}^\infty d\nu\, \sigma(E;\nu)\, Q_\ell\left(\frac{p^2+k^2+\nu}{2pk}\right). \qquad (2.7)$$

Предполагается, что спектральная функция $\sigma(E;\nu)$ такова, что ядро интегрального уравнения (2.5) ограничено. Такая ситуация может иметь место, например, для квазипотенциалов, возникающих в низших порядках по константе связи в теории поля с лагранжианом взаимодействия $g\phi^4$.

Мы опустим временно индекс ℓ в уравнении (2.5) и запишем его в операторной форме:

$$R = K + \lambda K R, \qquad (2.8)$$

где λ - вещественный параметр (уравнение (2.5) получается из (2.8) в случае $\lambda = 1$).

Представим приближенное решение уравнения (2.8) в виде отношения двух конечных рядов:

$$R = \frac{\sum\limits_{k=0}^{N} \lambda^k P_{k+1}}{Q(\lambda)}, \quad Q(\lambda) = \sum_{k=0}^{N} \lambda^k C_k, \qquad (2.9)$$

где P_k – неизвестные операторы, C_k – произвольные постоянные. Подставляя (2.9) в уравнение (2.5), получим

$$P_{k+1} = C_k K + K P_k \ , \tag{2.10}$$

причем

$$P_1 = K \ .$$

Так как ядро $K_\ell (E; p, k)$ ограничено, то k-ое итерированное ядро

$$K_\ell^{(k)} (E; k, p) = \int\limits_0^\infty dq_1 \dots dq_{k-1} K_\ell (E; p, q_1) K_\ell (E; q_1, q_2) \dots K_\ell (E; q_{k-1}, k). \tag{2.11}$$

непрерывно.

Представим оператор P_{k+1} в виде:

$$P_{k+1} = \sum_{n=0}^{N_1} C_{k+1, n+1} K^{(n+1)}, \tag{2.12}$$

где C_{kn} – неизвестные коэффициенты. Используя (2.10), получим следующее рекуррентное соотношение:

$$C_{k+1, n+1} = C_k \delta_{no} + C_{kn} \ , \tag{2.13}$$

причем:

$$C_{io} = C_{oi} = 0 \ .$$

Таким образом, $C = C[Q]$ – треугольная матрица.

Уравнение (2.12) можно записать в матричной форме

$$P = C[Q] K \ , \tag{2.14}$$

где K – столбец с элементами $K^{(k)}$, P – столбец с элементами $P_k (p, k)$.

Интересно отметить, что матрицы

$$C[Q, Q'] = C[Q] C^{-1} [Q'] \tag{2.15}$$

образуют полугруппу

$$C[Q,Q'] = C[Q,Q'']\,C[Q'',Q'], \qquad (2.16)$$

являющуюся полугруппой подстановок для числителя

$$P[Q] = C[Q,X]\,P[X]. \qquad (2.17)$$

Изложенный метод решения квазипотенциального уравнения можно связать с известным методом суммирования расходящихся рядов. Действительно, введем парциальные суммы

$$S_p[K] = \sum_{k=0}^{p} \lambda^k K^{(k)} \qquad (2.18)$$

и коэффициенты

$$A_{N,k} = \frac{\lambda^k C_k}{\sum\limits_{k=0}^{N} \lambda^k C_k}. \qquad (2.19)$$

Нетрудно показать, что

$$R^{[N,N]} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{N} \lambda^k P_{k+1}}{\sum\limits_{k=0}^{N} \lambda^k C_k} = \sum_{k=0}^{N} A_{N,N-k}\, S_k[K]. \qquad (2.20)$$

Выражение (2.20) представляет собой сумму Ньорлунда. Таким образом, если суммы Ньорлунда для решения (2.9) существуют, то они дают конечное решение для резольвентного оператора /18/.

3. Определение коэффициентов C_k.

Неопределенные коэффициенты C_k, введенные в (2.9), могут быть подобраны таким образом, чтобы получались простые и удобные решения.

Например, если

$$C_0 = 1 \ , \quad C_1 = \ldots = C_N = 0 \ , \tag{3.1}$$

то получается борновский ряд

$$R = \sum_k \lambda^k K^{(k+1)} . \tag{3.2}$$

В случае, когда шпур оператора K существует и конечен, для знаменателя в (2.9) можно выбрать следующее выражение:

$$Q(\lambda) = det \mid 1 - \lambda K \mid = exp\, Sp\ell n \mid 1 - \lambda K \mid . \tag{3.3}$$

В этом случае выражение (2.9) совпадает с известным решением Фредгольма.

Определим теперь величину

$$R'(p,k) = R(p,k) - R^{[N,N]}(p,k) . \tag{3.4}$$

Выберем коэффициенты C_k таким образом, чтобы $|R'(p,k)|$ был минимальным. Нетрудно показать, что R' удовлетворяет уравнению

$$R' = \frac{\lambda^{N+1} \sum\limits_{k=0}^{N} C_k K^{(N+2-k)}}{\sum\limits_{k=0}^{N} \lambda^k C_k} + \lambda K R' \tag{3.5}$$

Разность R' будет минимальной, если минимально выражение[9,10]

$$\lambda^{N+1} \frac{\| \sum\limits_{k=0}^{N} C_k K^{(N+2-k)} \|^2}{| \sum\limits_{k=0}^{N} \lambda^k C_k |^2} , \tag{3.6}$$

где

$$\| K \|^2 = \int\limits_0^\infty K^* (E;p,q) K(E;q,p) dq . \tag{3.7}$$

При доказательстве последнего утверждения существенна ограниченность ядра K .

Дифференцируя (3.6) по C_k и используя условие $\sum_k \lambda^k C_k \neq 0$, получаем две системы уравнений, одна из которых выглядит следующим образом:

$$\sum_{k=0}^{N} \sum_{k'=0}^{N} C_k C^*_{k'} \{ \lambda^k \int_0^\infty (K^{(N+2-k')}(E;p,q))^* K^{(N+2-a)}(E;q,p)\,dq -$$

$$\lambda^a \int_0^\infty (K^{(N+2-k')}(E;p,q))^* K^{(N+2-k)}(E;q,p)\,dq \} = 0 . \tag{3.8}$$

Вторая система уравнений отличается от (3.8) операцией сопряжения.

Например, при специальном выборе величин N , a , k , k'

$$N = 1; \quad a = 1 ; \quad k = 0,1 ; \quad k' = 0,1; \tag{3.9}$$

получаем:

$$C_1 = - \frac{\int_0^\infty [K^{(2)}(E;p,q) - \lambda K^{(3)}(E;p,q)]^* K^{(3)}(E;q,p)\,dq}{\int_0^\infty [K^{(2)}(E;p,q) - \lambda K^{(3)}(E;p,q)]^* K^{(2)}(E;q,p)\,dq} \tag{3.10}$$

Применяя к (3.10) теорему о среднем и переходя на поверхность энергии, получаем:

$$C_1 = - \frac{K^{(3)}(E)}{K^{(2)}(E)} . \tag{3.11}$$

Таким образом, решение (2.9) можно представить в виде Паде-дроби:

$$R_\ell^{[1,1]}(p,k) = \frac{(1+\lambda C_1) K_\ell (E;p,k) + \lambda K_\ell^{(2)}(E;p,k)}{1 + \lambda C_1} . \tag{3.12}$$

Подставляя K_ℓ в (2.9), с учетом (2.6) получим:

$$T_\ell^{[2,1]}(p,k) = \frac{(1+C_1)V_\ell(E;p,k)+\int_0^\infty V_\ell(E;p,q)V_\ell(E;q,k)dq\,\phi^2(q)}{1+C_1}, \quad (3.13)$$

где

$$C_1 = \frac{-\int_0^\infty V_\ell(E;p,q_1)\phi^2(q_1)V_\ell(E;q_1,q_2)\phi^2(q_2)V_\ell(E;q_2,p)\,dq_1\,dq_2}{\int_0^\infty V_\ell(E;p,q)V_\ell(E;q,p)dq\,\phi^2(q)}. \quad (3.14)$$

Для случая вещественных квазипотенциалов парциальная амплитуда $T_\ell^{[1,1]}$ удовлетворяет следующему двухчастичному условию унитарности

$$\frac{T_\ell^{[1,1]}(E) - T_\ell^{[1,1]^*}(E)}{2i} = -\frac{\pi^2}{p\sqrt{m^2+p^2}}\,T_\ell^{[1,1]}(E)\,T_\ell^{[1,1]^*}(E). \quad (3.15)$$

При $s < 4m^2$ нули знаменателя в (3.13) определяются как связанные состояния системы, и условие

$$Z_\ell^{[2,1]}(E,\lambda) = \int_0^\infty V_\ell^2(E;p,q)\,dq\,\phi^2(q) -$$

$$-\int_0^\infty V_\ell(E;p,q_1)\phi^2(q_1)V_\ell(E;q_1,q_2)\phi^2(q_2)V_\ell(E;q_2,p)\,dq_1dq_2 = 0$$

можно рассматривать как условие, аналогичное условию исчезновения константы перенормировки.

Заключение

Изложенный здесь метод неопределенных коэффициентов позволяет решать уравнение квазипотенциального типа в случае, когда ядро резольвентного оператора является ограниченным. Когда же система (3.8) имеет решение, показана возможность представить его в виде Паде-дроби.

Решение квазипотенциального уравнения этим способом может оказаться полезным, например, при анализе связанных состояний, траекторий Редже и некоторых других характеристик двухчастичной системы.

Авторы выражают глубокую благодарность А.В. Ефремову, В.А. Матвееву, Л.А.Слепченко, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодорову, А.Т.Филиппову за обсуждение затронутых здесь вопросов.

Литература

1. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cim. 29, 380 (1963).
2. A.N.Tavkhelidze. Lectures on the Quasipotential Method in Field Theory. Bombay, 1963.
3. В.Г. Кадышевский, А.Н. Тавхелидзе. В сб., посвященном 60-летию Н.Н. Боголюбова, Наука, Москва, 1969.
4. В.Р. Гарсеванишвили, В.А. Матвеев, Л.А. Слепченко. ЭЧАЯ, т. 1, вып. 1, стр. 91. Атомиздат, Москва (1970).
5. Р.Н. Фаустов. ЭЧАЯ, т. 3, вып. 1, стр. 238. Атомиздат, Москва, 1972.
6. Б.А. Арбузов, А.А. Логунов, А.Т. Филиппов, О.А. Хрусталев. ЖЭТФ, 46, 1266 (1964).
7. О.И. Завьялов, М.К. Поливанов, С.С. Хоружий. ЖЭТФ, 45, 1654 (1963).
8. А.А. Хелашвили. Сообщения АН Гр.ССР, 42, 555 (1966).
9. A.Visconti. J.Phys.Rad., 16, 1 (1954).
10. A.Visconti, H.Umezava. Nucl.Phys., 1, 335 (1956).
11. A.T.Filippov. Phys.Lett., 9, 78 (1964).
12. А.А. Атанасов. ОИЯИ, Р2-5765, Дубна (1971).
13. В.Н. Первушин. ОИЯИ Р2-6134, Дубна (1971).
14. С.П. Кулешов, В.А. Матвеев, А.Н. Сисакян, М.А. Смондырев. ОИЯИ, Е2-5833, Дубна (1971).
15. Н.И. Мусхелишвили. Сингулярные интегральные уравнения. Наука, Москва, 1968.
16. V.G.Kadyshevsky. Nucl.Phys., B6, 125 (1968).

17. I.T.Todorov. Phys.Rev., D3, 2351 (1971).

18. Г. Харди. Расходящиеся ряды. ИЛ, Москва, 1951.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 июня 1972 года.