ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6474

Л.Г.Заставенко

НЕОГРАНИЧЕННОСТЬ СНИЗУ ГАМИЛЬТОНИАНА В СКАЛЯРНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

P2 - 6474

Л.Г.Заставенко

НЕОГРАНИЧЕННОСТЬ СНИЗУ ГАМИЛЬТОНИАНА В СКАЛЯРНОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Направлено в ТМФ

1. Условие конечности матрицы рассеяния (условие а)) и условие ограниченности снизу гамильтониана (условие б)) играют фундаментальную роль в квантовой теории поля. Нарушение условия б), в частности, означает отсутствие в соответствующем варианте квантовой теории поля основного состояния. Такая ситуация имеет место в модели скалярного нейтрального поля с самодействием /1,2/

$$H' = g \int \phi^3 d^3x \ .$$

В настоящей работе рассматривается несколько более сложный случай, когда нарушение условия б) возникает при попытке обеспечить выполнение условия а).

2. Рассмотрим систему взаимодействующих электромагнитного и скалярного заряженного полей. Исключение продольной и скалярной составляющих электромагнитного поля приводит, в этом случае, гамильтониан к виду /3/

$$H = H_0 + H' \tag{1}$$

$$H_0 = \int d^3x \, [\, \pi^* \pi + \nabla \phi^* \nabla \phi + m \, \phi^* \phi \,]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{\substack{\lambda=2,3 \\ |\vec{k}| < \ell}} (p_{\vec{k}\lambda} \, p_{\vec{k}\lambda} + k^2 q_{\vec{k}\lambda} \, q_{\vec{k}\lambda}) , \tag{2}$$

где

$$H' = H_1' + H_2' + H_3' \tag{3}$$

$$H_1' = ie \int d^3x \, [\phi^* \nabla \phi - \nabla \phi^* \phi \,] \, A^T \tag{4}$$

$$H_2' = e^2 \int d^3x \, \phi^* \phi \, (A^T)^2 \tag{5}$$

$$H_3' = \frac{1}{2} \, \frac{e^2}{4\pi} \int \frac{\rho(x) \, \rho(y)}{|\vec{x} - \vec{y}\,|} \, d^3x \, d^3y \, . \tag{6}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \rho(x) &= i \, (\pi^* \phi^* - \phi \pi(x)) \\ \pi(x) &= -i \, \delta / \delta \phi(x) \end{aligned} \tag{7}$$

ℓ –параметр обрезания,

$$\phi(x) = \sum_{|\vec{k}| < \ell} \frac{1}{\sqrt{V}} \, q_{\vec{k}} \, e^{i\vec{k}\vec{x}} \tag{8}$$

A^T –поперечная составляющая электромагнитного поля

$$\vec{A}^{\,T}(x) = \sum_{\substack{\lambda=2,3 \\ |\vec{k}| < \ell}} \frac{1}{\sqrt{V}} \vec{e}_{\vec{k}\lambda}\, q_{\vec{k}\lambda}\, e^{i\vec{k}\vec{x}} \tag{9}$$

$\vec{e}_{\vec{k}\lambda}$, $\lambda = 2,3$ – два единичных вектора, ортогональных друг другу и ортогональных к вектору $\vec{k}$,

$$p_{k\lambda} = -i\,\partial / \partial q_{k\lambda} .$$

Интегрирование в (2)–(6) ведется по объему V, суммирование по $\vec{k}$ в (8), (9) – по узлам части $|\vec{k}| < \ell$ кубической решетки с ребром $2\pi / V^{1/3}$. Выражения $(A^T)^2$, $\phi^*\phi$ можно представить в виде

$$\phi^*\phi = :\phi^*\phi: + K(m,\ell)$$

$$(A^T)^2 = :(A^T)^2: + 2K(0,\ell) ,$$

где нормальные произведения берутся по отношению к свободному гамильтониану (2),

$$K(s,\ell) = \sum_{|\vec{k}| < \ell} \frac{1}{2V\sqrt{k^2 + s^2}} \tag{10}$$

соответственно, H_2' принимает вид

$$H_2' = e^2 \int d^3x :(A^T)^2: :\phi^*\phi: + e^2 \int d^3x :(A^T)^2: K(m,\ell)$$
$$+ 2e^2 K(0,\ell) \int d^3x :\phi^*\phi: + 2e^2 K(m,\ell)\, K(0,\ell). \tag{11}$$

2.1. Оператор H' (3), очевидно, не дает собственной энергии фотона первого порядка по e. Подсчитаем собственную энергию фотона Z_2 во втором порядке по e. Согласно (4), (5), (3), (11), Z_2 состоит из части, линейной по H_2', Z_{22}, и части, квадратичной по H_1', Z_{21}:

$$Z_2 = Z_{22} + Z_{21} \,. \tag{12}$$

Из (11) следует

$$Z_{22} = 2e^2 K\,(m,\ell)\,\frac{1}{2k} \,. \tag{13}$$

Величина Z_{21} может быть найдена по формуле

$$Z_{21} = \sum_r \frac{H_1'(0,r)\; H_1'(r,0)}{E_0 - E_r}$$

нековариантной теории возмущений; расчет дает:

$$Z_{21} = -\frac{e^2}{2k\,(2\pi)^3} \int d^3p_1\, d^3p_2\, \delta\,(\vec{p}_1 + \vec{p}_2 - \vec{k}\,)$$

$$\frac{\vec{e}\,(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\; \vec{e}(\vec{p}_1 - \vec{p}_2)\; 2\,[\,\omega(p_1) + \omega\,(p_2)\,]}{2\omega\,(p_1)\; 2\omega\,(p_2)\;[\,[\,\omega\,(p_1) + \omega\,(p_2)]^2 - k^2\,]} \,. \tag{14}$$

Здесь $\vec{e}$ –поляризация фотона; область интегрирования определена условиями $|\vec{p}_1| < \ell$, $|\vec{p}_2| < \ell$, что, как и в (8),(9), соответствует обрезанию импульсов, больших чем ℓ; $\omega\,(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$. Выделяя квадратично расходящиеся при $\ell \to \infty$ части Z_{21} и Z_{22}, находим, согласно (10)-(14),

$$Z_2 = \frac{B}{k(2\pi)^3} \quad , \tag{15}$$

$$B = \frac{e^2}{2} \int \frac{d^3p}{p} \left[1 - \frac{(\vec{e}\vec{p})^2}{p^2} \right] = \frac{4\pi}{6} e^2 \ell^2 . \tag{16}$$

Таким образом, матричный элемент собственной энергии, определяемый оператором H', стремится к $+\infty$ при $\ell \to \infty$. Чтобы сделать собственную энергию конечной при $\ell \to \infty$, необходимо заменить гамильтониан (1) на

$$H = H_0 + H' + H'' \quad , \tag{17}$$

где

$$H'' = -B \int (A^T)^2 d^3x \quad . \tag{18}$$

2.2. Но тогда гамильтониан H оказывается неограниченным снизу. Чтобы доказать это, рассмотрим гамильтониан (17) на поверхности $\phi(x) = \phi^*(x) = 0$. Имеем:

$$H = \frac{1}{2} \int \pi^* \pi(x)\, d^3x + \frac{1}{2} \sum_{\substack{|k|<\ell \\ \lambda=2,3}} p_{k\lambda}\, p_{k\lambda} \; ,$$

$$+ \sum_{\substack{|k|<\ell \\ \lambda=2,3}} q_{k\lambda}\, q_{-k\lambda} \, (k^2 - B) \; .$$

Согласно (16), для части значений k выполняется неравенство
$k^2 - B < 0.$
Отсюда и следует неограниченность снизу гамильтониана (17).

2.3. Следует оговориться, что поправка (18) к гамильтониану обеспечивает конечность собственной энергии лишь во втором порядке по e ; требование конечности собственной энергии в более высоких порядках по e приводит к замене H'' (18) на более сложное выражение

$$H'' = -(B + a_4 e^4 + \dots) \int (A^T)^2 dx$$

$$= -C(e) \int (A^T)^2 dx . \qquad (18')$$

Здесь константы a_i не являются обязательно положительными; но ввиду положительности B есть число e_1^2 такое, что при $0 < e^2 < e_1^2$ выполнено неравенство

$$-C(e) < 0. \qquad (19)$$

Отсюда следует неограниченность снизу оператора энергии при $e^2 < e_1^2$. Полученный результат означает противоречие, ибо при построении теории возмущений, дающей выражение $C(e)$, предполагается ограниченность снизу оператора энергии (иначе собственные функции оператора H , которые определяет теория возмущений, не существуют).

2.4. Итак, ряды теории возмущений при $e^2 < e_1^2$ не могут быть сходящимися или суммируемыми, ибо сумма их дает собственные функции оператора H , которые не существуют.

2.5. Пусть теперь в области

$$e_1^2 < e^2 < e_2^2 \qquad (20)$$

неравенство (19) имеет обратный знак. Возникает искушение утверждать, что в области (20) гамильтониан ограничен снизу, основное состояние существует и может быть получено суммированием ряда теории возмущений по степеням e . В действительности такое утверждение является, вероятно, неверным. Из суммируемости ряда (18) при некотором значении $e = e_0$ следует суммируемость[x/] этого ряда для всех e на луче $0 < e^2 < e_0^2$ и, в частности, при $0 < e^2 < e_1^2$, что противоречит п. 24.

2.6. Полученное противоречие показывает, что даже если, быть может, оператор $H = H_0 + H' + H''$ для некоторых значений e^2 и приводит к конечной матрице рассеяния и является ограниченным снизу, то все равно собственные функции уравнения Шредингера и матрица рассеяния не могут быть представлены рядами теории возмущений по степеням e.

2.7. Для спинорной электродинамики коэффициент B в (15) отрицателен и по абсолютной величине вдвое больше, чем (16). Поэтому в системе, состоящей из n_1 скалярных заряженных полей и n_2 спинорных полей, взаимодействующих с электромагнитным полем, требование совместимости условий а) и б), указанных в аннотации, приводит к неравенству

$$2n_2 > n_1 . \tag{21}$$

В действительности наличие сильных взаимодействий может привести к нарушению неравенства (21).

[x/] Такая теорема доказана (/4/, теорема 132) лишь для одной разновидности метода Бореля.

2.8. Основной результат настоящей работы – неограниченность снизу гамильтониана при малых значениях константы связи – определяется использованным нами способом регуляризации выражений (9), (10), (14); при другом способе регуляризации наш результат может и не иметь места; так, в частности, если воспользоваться калибровочно-инвариантным методом регуляризации по Паули–Вилларсу, контрчлен вида (18) вообще не появится ([6], § 30.). Избранный нами способ регуляризации определяется целью, которую мы преследуем: мы хотим получить поправку к гамильтониану (1), определенному с помощью нековариантного обрезания $|\vec{k}| < \ell$. Относительно использования не лоренц-инвариантной предварительной регуляризации при построении матрицы рассеяния см. [7,8].

2.9. Поскольку величина $A^T(x)$ является градиентно инвариантной, наш способ рассмотрения не противоречит градиентной инвариантности.

2.10. Отметим, что добавление к гамильтониану члена

$$H''' = \Lambda \int d^3x \, \Big[\sum_{a=1}^{3} (A_a^T)^2 \Big]^2 \qquad (22)$$

с $\Lambda > 0$ делает гамильтониан ограниченным снизу и обеспечивает существование основного состояния. Однако ввиду отсутствия расходимости в диаграмме рассеяния света на свете [5] необходимости во включении в H члена (22) не возникает.

Автор благодарен академику М.А. Маркову и М.И. Широкову за интерес к работе, а также Г.В. Ефимову и Р.Н. Фаустову за обсуждение.

Литература

1. M.Fierz. Proc.of the Fifth Ann.Roch.Conf. on High Energy.- Phys.Interscie Publishers. The New York 1955. G.Baym. Phys.Rev., 117, 886 (1960).

2. D.I.Blokhintsev. Proc. of the 10th International Conf. On High Energy Nuclear Phys., Rochester 1960, page 867.

3. Г. Вентцель. Введение в квантовую теорию волновых полей. М., Гостехиздат, 1947.

4. Г. Харди. Расходящиеся ряды, ИИЛ, Москва, 1951.

5. A.Rohrlich. Ph.Rev., 80, 666 (1950).

6. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1957.

7. Б.М. Степанов. ДАН СССР, 108, 1045 (1956).

Рукопись поступила в издательский отдел
23 мая 1972 года.