6454

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 6454

М.И.Широков

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ: "ОДЕВАНИЕ" ПРОТИВ РАСХОДИМОСТЕЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

Широков М.И. P2 - 6454

Квантовая теория поля: "одевание" против расходимостей

Рассматривается теория $\Psi^{+}\Psi\,\phi$ -взаимодействующие заряженное и и нейтральное скалярные поля. Вместо голых операторов рождения-уничтожения частиц вводятся такие операторы, чтобы их вакуумный вектор и одночастичные состояния были стабильными. Из этого требования следует, в частности, что полный гамильтониан не должен содержать членов, трилинейных по новым операторам (но взамен содержит четырех-, пятиоператорные и т.д.). Приравнивая нулю сумму трилинейных членов, получаем основное уравнение работы. Если его решать по обычной теории возмущений, то появляются обычные расходимости. Обсуждается необходимое условие существования решения, дающего конечные поправки к массам частиц.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1972

Shirokov M.I. P2 - 6454

Quantum Field Theory: "Dressing" Contra Divergencies

See the Summary on the reverse side of the title-page.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1972

P2 - 6454

М.И.Широков

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ ПОЛЯ: "ОДЕВАНИЕ" ПРОТИВ РАСХОДИМОСТЕЙ

Направлено в ТМФ

Summary

Relativistic theory of charged ψ and neutral φ scalar fields is considered. The interaction $\lambda\psi^{+}\psi\varphi$ is local, space-time is four-dimensional. Instead of "bare" creation-destruction operators the "dressed" ones are introduced. They have the following main property: "dressed" vacuum and one-particle states must be stable. This property requires in particular that the total hamiltonian as a function of "dressed" operators must not contain trilinear terms, i.e. terms similar to the interaction ones (terms involving four, five... operators enter instead). The main equation of the paper is obtained by equating to zero the sum of all trilinear terms. A reason is presented in favour of the assertion: the equation solutions (if they exist) cannot entail the self-energy divergencies. A necessary condition of existence of the other solutions is obtained. It claims that some integrals involved in the equation must converge nonuniformly and must have some asymptotic property. It is shown that this property can be realized indeed.

Введение

Исходная идея "одевания" состоит в том, что корпускулярная интерпретация теории со взаимодействием не должна заимствоваться из свободной теории ("голые" частицы), но должна быть построена заново. Эта задача должна предшествовать решению конкретных проблем типа рассеяния. Новая корпускулярная интерпретация должна удовлетворять следующему основному требованию: вакуумный вектор новых операторов рождения-уничтожения и новые одночастичные состояния должны быть собственными векторами полного гамильтониана.

Такая программа первоначально была осуществлена в простых моделях теории поля (см., например,/I/ и /2/, глава I2). "Одевающие" преобразования вводились во многих последующих работах, посвященных главным образом математическим вопросам теории поля (см., например,/3/-/7/)[x/]. В частности, в/3/ была указана формальная процедура построения "одевающего" преобразования, годная для обычной релятивистской локальной теории. Она основана на теории возмущений обычного типа, ведет к появлению известных расходимостей и требует перенормировок.

В настоящей работе предлагается другой подход. Он позволяет привести ряд доводов в пользу возможности получить конечные собственно-энергетические поправки к массам частиц. Только эти поправки расходятся в рассматриваемой теории взаимодействующих заряженного и нейтрального скалярных полей (вершинный график Фейнмана

---

x/ Что же касается унитарных преобразований гамильтониана, сходных с рассматриваемым в этой работе, то они использовались уже в монографии Вентцеля/8/, см. конец § 7. См. также/9/-/I0/ и доказательства так называемых теорем эквивалентности (/2/,гл.I0).

сходится). Эта теория похожа на квантовую электродинамику, но гораздо проще. Вместо нейтрального векторного поля имеем скалярное, нет никаких дополнительных условий[II] и т.д.[x]

I. Формулировка теории и обозначения

Принимается лагранжева формулировка теории. Гамильтониан, полный заряд, полный импульс и прочие величины должны быть выражены через квантованные поля $\psi(x)$ и $\varphi(x)$. Будет использоваться большей частью шредингеровская картина. В таком виде теория свободных скалярных полей изложена, например, в книге Вентцеля[8], см. § 6 и 8. Плотность полного гамильтониана равна

$$\frac{1}{2}\left[\pi_\varphi^2(x)+(\vec{\nabla}\varphi)^2+\mu_0^2\varphi^2\right]+\left[\pi_\psi^+\pi_\psi+(\vec{\nabla}\psi^+\vec{\nabla}\psi)+m_0^2\psi^+\psi\right]+ \\ +\lambda(4\pi)^{3/2}\psi^+\psi\varphi. \tag{I}$$

Нам будет удобно ввести разложения $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ по плоским волнам:

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}}\int\frac{d^3p}{\varepsilon(p)}e^{ixp}\left[a_p+b_{-p}^+\right];\quad xp\equiv xp_x+yp_y+zp_z;$$

$$[a_p,a_q^+]=\varepsilon(p)\delta(p-q);\quad [b_p,b_q^+]=\varepsilon(p)\delta(p-q); \tag{2}$$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}}\int\frac{d^3k}{\omega(k)}e^{ixk}\left[g_k+g_{-k}^+\right];\quad [g_k,g_{k'}^+]=\omega(k)\delta(k-k')$$

---

[x] Заметим, что гамильтониан теории не является положительно определенным, см.[I2] и § 9 в[I3] (чтобы привести взаимодействие $\psi^+\psi\varphi$ к одному из видов, рассмотренных в[I2], достаточно вместо ψ^+ и ψ ввести действительные поля). Этот недостаток не помешает выполнению программы одевания.

В отличие от (7.270) в[2], a описывает отрицательно заряженные частицы, b – положительно заряженные. В разложениях (2) $\mathcal{E}(p)$ и $\omega(k)$ означают соответственно $\sqrt{p^2+m^2}$ и $\sqrt{K^2+\mu^2}$, где m и μ – неизвестные еще массы будущих "одетых" частиц. Употребление таких разложений эквивалентно обычному приему введения "перенормированных" масс: $\mu_0^2\varphi^2 = \mu^2\varphi^2 + (\mu_0^2-\mu^2)\varphi^2$ (аналогично для поля $\psi(x)$). Для простоты будем считать, что в исходный гамильтониан, выраженный через поля $\psi(x)$ и $\varphi(x)$, добавлены такие c – числовые члены и члены линейные по $\varphi(x)$, что в терминах a, b, g гамильтониан имеет вид, нормально упорядоченный по a, b, g x/ :

$$H = H^3 + H^H + H^I \tag{3}$$

$$H^3 = \int \frac{d^3p}{\mathcal{E}(p)} \left\{ \left[\mathcal{E}(p) + \frac{m_0^2-m^2}{2\mathcal{E}(p)}\right]\left[a_p^+a_p + b_p^+ b_p\right] + \frac{m_0^2-m^2}{2\mathcal{E}(p)}\left[a_p^+ b_{-p}^+ + b_{-p} a_p\right]\right\} \tag{4}$$

$$H^H = \int \frac{d^3k}{\omega(k)} \left\{ \left[\omega(k) + \frac{\mu_0^2-\mu^2}{2\omega(k)}\right] g_k^+ g_k + \frac{\mu_0^2-\mu^2}{2\omega(k)}\left[g_k g_{-k} + g_k^+ g_{-k}^+\right]\right\} \tag{5}$$

$$H^I = \int_p \int_q \int_k \lambda\, \delta(-p+q+k)\left[a_p^+ a_q + a_p^+ b_{-q}^+ + b_{-p} a_q + b_{-q}^+ b_{-p}\right]\left[g_k + g_{-k}^+\right] \tag{6}$$

В (6) $\int_p$ обозначает $\int d^3p/\mathcal{E}(p)$, а $\int_k \equiv \int d^3k/\omega(k)$. Всюду считаем, что $h = 1$ и $c = 1$.

---

x/ Заметим, что в квантовой электродинамике взаимодействие с самого начала является нормально упорядоченным, если взят антисимметризованный ток[II], § I4.4.

2. Введение "одетых" операторов

Введем вместо a, b, g новые величины α, β, γ так, что a, например, будет некоторой функцией α, β, γ. Последние будут пониматься как операторы в фоковском пространстве с вакуумным вектором Ω таким, что $\alpha\Omega = \beta\Omega = \gamma\Omega = 0$.

Должно выполняться упомянутое во введении первое требование: I) Ω, $\alpha^+\Omega$, $\beta^+\Omega$ и $\gamma^+\Omega$ должны быть стабильными состояниями. Потребуем далее, чтобы 2) α, β, γ удовлетворяли тем же каноническим перестановочным соотношениям, что и a, b, g, например, $[\alpha_p, \alpha_q^+] = \sqrt{p^2+m^2}\,\delta(p-q)$. Это требование будет выполнено, если α, β, γ связаны с a, b, g при помощи формально унитарного преобразования

$$a_p = e^S \alpha_p e^{-S}; \quad b_p = e^S \beta_p e^{-S}; \quad g_k = e^S \gamma_k e^{-S}; \quad S^+ = -S. \qquad (7)$$

Тогда из α, β, γ можно построить обычный оператор числа частиц и дать обычным образом корпускулярную интерпретацию теории[x/]. S можно представлять себе как некоторую функцию от α, $\alpha^+, \beta, \ldots$. Например, S может иметь вид: линейная форма самого общего вида от всех новых операторов плюс квадратичная форма, плюс форма вида (9), см. ниже, и т.д.

Выполнение требования I) обеспечивается следующим образом. Выражаем H через α, β, γ . Подчеркнем, что речь идет о представлении того же оператора H через новые операторы. Эту

---

x/ Возможно, что корпускулярная интерпретация может быть дана и необычным способом. Эту возможность обсуждать не будем.

процедуру иллюстрируем на примере H^I:

$$H^I = \lambda \int_p \int_q \frac{1}{\omega(p-q)} [a_p^+ a_q g_{p-q} + \ldots] =$$

$$= \int_p \int_q \frac{\lambda}{\omega} [e^S \alpha_p^+ e^{-S} e^S \alpha_q e^{-S} e^S \gamma_{p-q} e^{-S} + \ldots] =$$

$$= e^S \int_p \int_q \frac{\lambda}{\omega} [\alpha_p^+ \alpha_q \gamma_{p-q} + \ldots] e^{-S}.$$

Далее пользуемся известной формулой:

$$e^S H^I e^{-S} = H^I + [S, H^I] + \frac{1}{2} [S, [S, H^I]] + \ldots \tag{8}$$

В результате H будет иметь, вообще говоря, вид бесконечного ряда $H + [S, H] + \ldots$. Далее каждый член этого ряда представляем в виде суммы слагаемых, нормально упорядоченных по новым операторам. После этого $H + [S, H] + \ldots$ будет изображаться таким рядом: C – число + линейная форма от новых операторов + члены, содержащие произведения двух операторов (квадратичная форма) + нормально упорядоченные трехоператорные члены + ... Назовем такое выражение H_{NS} . Чтобы Ω было собственным вектором H , надо подобрать S так, чтобы в H_{NS} не было членов, содержащих произведения одних только операторов рождения. В противном случае $H\Omega$ будет суперпозицией взаимно ортогональных векторов Ω, $\gamma^+\Omega$, $\alpha^+\beta^+\Omega$, ... Аналогично, для того, чтобы векторы $\alpha_p^+\Omega$, $\beta_q^+\Omega$, $\gamma_k^+\Omega$ были стабильными, в H_{NS} должны отсутствовать члены, содержащие только один оператор уничтожения (допускаются только члены вида $\alpha_p^+\alpha_p$, $\beta_p^+\beta_p$ и $\gamma_k^+\gamma_k$). Разумеется, в эрмитовом операторе H_{NS} одновременно должны отсутствовать члены, эрмитово сопряженные к перечисленным. Ввиду этого в H_{NS}, в частности, должны отсутствовать все трехоператорные члены.

Чтобы продемонстрировать, как "одевание" может предотвращать расходимость собственно-энергетических поправок, достаточно рассмотреть такую ограниченную задачу: какой вид должно иметь S, чтобы в H_{NS} не было однооператорных, "плохих" двухоператорных и трехоператорных членов. Не исключено, что уже после такого неполного "одевания" расходимостей в рассматриваемой теории не будет.

Нетрудно показать, что простые S в виде линейной S_1 или квадратичной S_2 формы от $\alpha, \alpha^+, \beta, \ldots \gamma^+$ не позволяют обратить в нуль коэффициенты при трехоператорных членах в H_{NS}. Это можно сделать только, если S содержит еще трехоператорные члены, в частности, члены той же структуры, что и H^I :

$$S_3 = \int_p \int_q \int_k \Big[(Z_{11})^k_{pq}\, \alpha^+_p \alpha_q + (Z_{12})^k_{pq}\, \alpha^+_p \beta^+_{-q} + (Z_{21})^k_{pq}\, \beta_{-p} \alpha_q + (Z_{22})^k_{pq}\, \beta^+_{-q} \beta_{-p} \Big] \gamma_k - \text{э.с.} \tag{9}$$

Условие отсутствия трехоператорных членов в H_{NS} приведет к уравнению для функций Z .

Оказывается, что если произвести только преобразование $\exp S_3$, то в H_{NS_3} появятся члены, содержащие один оператор γ_k с $\vec{k}=0$ (других однооператорных членов не возникает) и трехоператорные члены нового вида, кубичные по γ (см. приложение 2). Кроме того, в дополнение к первоначальным двухоператорным членам (см. (4) и (5)) появятся новые. Чтобы иметь возможность убрать все "плохие" члены, надо произвести преобразование (7) с $S = S_3 + S_{3\gamma} + S_2 + S_1$, где $S_{3\gamma}$ обозначает трехоператорную форму, кубичную по γ (и только после такого преобразования произвести нормальное упорядочение $H + [S, H] + \ldots$ по новым операторам). Преобразование $\exp S_2$ уже фактически было произведено. Именно таким преобразованием связаны "голые" операторы с "голыми" массами и введенные в разделе I "голые" операторы с "одетыми" массами. Чтобы не загромождать изложения, не будем здесь делать преобразования $\exp S_1$, удаляющего однооператорные члены с $\gamma_{k=0}$, а также $\exp S_{3\gamma}$, удаляющего члены, кубичные по γ. Как оказывается, эти преобразования не вносят вклада в те члены уравнения для Z, которые мы явно выпишем[x]. Первые члены выражения H через новые операторы после преобразования $\exp S_3$ будут выписаны в разделе 4. Настоящий раздел мы закончим несколькими замечаниями по поводу программы "одевания".

Одной из целей программы является построение подходящего гильбертова пространства (своего для каждого значения константы связи λ), в котором должны ставиться и решаться физические задачи теории. Вначале не вводится никакого пространства векторов, на которые могли бы действовать ψ, φ, a, b, g. Поэтому их следует рассматривать не как операторы, но как алгебраические величины, для которых определены обычные алгебраические операции, включая операцию $+$ (сопряжение или инволюция)/I4/, и заданы перестановочные соотношения. Преобразование (9) является алгебраическим, и цель его тоже можно сформулировать алгебраически: в H_{NS} не должно быть "плохих" членов определенного типа. В этом смысле преобразование $\exp S_3$ существует, если существует решение уравнения для Z. Пространство векторов состояний вводится после нахождения нужных α, β, γ как фоковское пространство, натяну-

[x] Заметим, что в квантовой электродинамике таких преобразований делать не нужно, потому что в H_{NS} не может быть членов, содержащих произведения одних фотонных операторов, если их число нечетное (эти члены зарядово-неинвариантны, ср. "теорему Фарри" /II/).

тое на векторы $\Omega,\ \alpha_p^+\Omega,\ \alpha_p^+\alpha_q^+\Omega$ и т.д. Для решения задачи рассеяния нам не нужны первоначальные величины ψ, φ, a, b, g, а также $\exp S$, и, в частности, не нужно знать, являются ли они операторами в построенном гильбертовом пространстве.

После выполнения программы "одевания" можно выразить поля ψ и φ через "одетые" операторы рождения-уничтожения и изгнать из теории "голые", фигурирующие у нас только как вспомогательные величины. При этом нейтральное поле φ в шредингеровской картине выражается не только через новые операторы γ нейтральных частиц, но и через новые операторы заряженных частиц. Чтобы в этом убедиться, подставим в разложение (2) выражение g через новые операторы, получаемое, например, из (7) с помощью (8) и (9)

$$g_k = \gamma_k - \int_p \int_q \left[(Z_{11})^k_{qp}\, \alpha_p^+ \alpha_q + \ldots \right] + \ldots$$

Аналогично, заряженное поле ψ выражается и через операторы нейтральных частиц. В связи с этим неуместно интерпретировать выражение вида $\langle \Omega | T\varphi(x_1,t_1)\varphi(x_2,t_2) | \Omega \rangle$ как функцию распространения "одетой" нейтральной частицы (ср. /2/, глава 17, § 1).

3. Дополнительные требования к "одетым" операторам

К основным требованиям 1) и 2) к "одетым" операторам, сформулированным в предыдущем разделе, мы добавим ряд новых естественных требований. Ограничения на возможный общий вид S, вытекающие из этих дополнительных требований, значительно упрощают вычисление H_{NS} и запись результатов.

3). Оператор α^+ должен рождать одну единицу отрицательного заряда (как и a^+), β^+ – положительный заряд. Другими словами, полный заряд Q должен выражаться через α и β обычным образом $Q = e\int_p [\beta_p^+\beta_p - \alpha_p^+\alpha_p]$. Из этого требования вытекает, что заряженные операторы могут входить в S только через посредство квадратичных комбинаций, сохраняющих заряд: $\alpha^+\alpha, \beta^+\beta, \alpha^+\beta^+, \beta\alpha$. Таким образом,(9) является наиболее общей трехоператорной формой, содержащей заряженные операторы.

4). Потребуем, чтобы $\alpha_p^+\Omega$ было собственным состоянием оператора полного импульса $P_j = -i\int d^3x\, T_{4j}(x)$ с собственным значением p_j : $P_j\alpha_p^+\Omega = p_j\alpha_p^+\Omega$, $j = x, y, z$, $p \equiv (p_x, p_y, p_z)$. Далее, состояние $\alpha_p^+\alpha_q^+\Omega$ и все прочие многочастичные состояния тоже должны обладать определенным полным импульсом. Это эквивалентно требованию $[P_j, \alpha_p^+] = p_j\alpha_p^+$. Оно будет выполнено, если P_j имеет тот же вид в новых операторах α, β, γ, что и в "голых", т.е. если $\exp S\; P_j \exp(-S) = P_j$. Отсюда следует, что $[S, P_j] = 0$. Подставляем в эту коммутацию выражение (9) для S и используем коммутации вида $[P_j, \alpha_p] = -p_j\alpha_p$. Получим, что все функции Z_{pq}^k должны удовлетворять соотношению $Z_{pq}^k(p_j - q_j - k_j) = 0$ при любых p_j, q_j, k_j. Это возможно только, если $Z_{pq}^k \sim \delta(\vec{p} - \vec{q} - \vec{k})$. Примем, что

$$(Z_{mn})_{pq}^k = \delta(\vec{k} - \vec{p} + \vec{q})\, Z_{mn}(\vec{p}, \vec{q}) \quad ; \quad m, n = 1, 2. \tag{10}$$

5). Требуем, чтобы $\alpha_p^+\Omega$ вело себя при трехмерных вращениях как состояние, нумеруемое трехмерным вектором p (другими словами, совокупность индексов p_x, p_y, p_z должна преобразовываться при вращениях как трехмерный вектор). Аналогичное требование предъявляется к остальным одночастичным состояниям $\beta_p^+\Omega$, $\gamma_k^+\Omega$ и ко всем многочастичным. В приложении I показано, как отсюда следует, что $Z_{mn}(p,q)$ из (I0) должны зависеть только от p^2, q^2 и $(\vec{p}\vec{q})$.

6). Что касается поведения "одетых" частиц при пространственном отражении P, то естественно принять, что они должны иметь определенную четность, причем такую же, что и при выключенном взаимодействии, т.е. как у "голых". В приложении I показано, что из этого требования не вытекает новых ограничений на Z_{pq}.

7), 8). Требуем, чтобы новые операторы при операции отражения времени T и зарядового сопряжения C преобразовывались точно так же, как "голые". Тогда реакции с участием "одетых" частиц будут T и C - инвариантны в обычном смысле. Отсюда соответственно вытекает (см. приложение I), что $Z_{mn}(p,q)$ должны быть действительными функциями и что должны иметь место соотношения

$$Z_{11}(p,q)=Z_{22}(q,p)\ ;\quad Z_{12}(p,q)=Z_{12}(q,p)\ ;\quad Z_{21}(p,q)=Z_{21}(q,p). \tag{II}$$

9). Лоренцевские преобразования U_Λ существенно отличаются от преобразований, рассмотренных до сих пор: они включают в себя динамику. Можно осуществить сдвиг во времени, пользуясь U_Λ и пространственными сдвигами. Это следует из известного коммутационного соотношения $[L_x, P_x]=iH$ для генератора лоренцевского преобразования L_x и пространственного сдвига P_x. Неудивительно, что $U_\Lambda g_k U_\Lambda^{-1}$ выражается не только через $g(\Lambda^{-1}k)$, но и через другие, заряженные, операторы, аналогично $\exp iHt\, g_k \exp(-iHt)$.

Вследствие этого "голое" одночастичное состояние $g_k^+\Omega_0$

в другой лоренцевской системе выглядит как суперпозиция состояний: одна нейтральная частица, пара заряженных частиц и т.д. (см. приложение 4). Потребуем, чтобы "одетый" вакуум Ω был лоренцевски инвариантным, а "одетые" одночастичные состояния при лоренцевских преобразованиях оставались одночастичными состояниями (с соответственно преобразованным импульсом). В приложении 4 показано, как это требование ведет к условию отсутствия трилинейных членов в генераторах L_j лоренцевских преобразований, выраженных через новые операторы. Приближенное следствие этого условия мы сформулируем и используем в разделе 6 (см. также далее примечание 6).

4. Собственно-энергетические поправки и уравнение для Z

Выпишем первые члены выражений H^3, $H^н$ и H^I через новые операторы, вводимые по формуле (7) с S в форме (9). Введем обозначения

$$A_p=\begin{pmatrix}\alpha_p\\ \beta^+_{-p}\end{pmatrix}\;;\quad E_{pq}=\mathcal{E}_p\,\delta(p-q)\begin{pmatrix}\mathcal{E}_p+(m_0^2-m^2)/2\mathcal{E}_p & (m_0^2-m^2)/2\mathcal{E}_p\\ (m_0^2-m^2)/2\mathcal{E}_p & \mathcal{E}_p+(m_0^2-m^2)/2\mathcal{E}_p\end{pmatrix} \tag{I2}$$

$$A_p^+=(\alpha_p^+,\beta_{-p})\;;\quad \mathcal{U}^k_{pq}=\lambda\,\delta(-p+q+k)\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix};\quad Z=\begin{pmatrix}Z_{11}&Z_{12}\\ Z_{21}&Z_{22}\end{pmatrix}$$

$$\left([Z,\mathcal{U}]_{\mathcal{D}}\right)_{pq}\equiv\int_{p'}\left(Z_{pp'}\mathcal{D}\,\mathcal{U}_{p'q}-\mathcal{U}_{pp'}\mathcal{D}\,Z_{p'q}\right)\;;\quad \mathcal{D}\equiv\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}. \tag{I3}$$

Далее выражение NA^+EA будет обозначать $\int_p\int_q NA_p^+E_{pq}A_q$ (символ N обозначает нормальное упорядочение).

$$H^3=NA^+EA+\int_k A^+[Z^k,E]_{\mathcal{D}}A\gamma_k+\text{э.с.}+\ldots \tag{I4}$$

$$H^н=\int_k\left[\left(\omega_k+\frac{\mu_0^2-\mu^2}{2\omega_k}\right)\gamma_k^+\gamma_k+\frac{\mu_0^2-\mu^2}{4\omega_k}\left(\gamma_k\gamma_{-k}+\gamma_k^+\gamma_{-k}^+\right)\right]+ \tag{I5}$$

$$+\int_k NA^+\left[Z^k\left(\omega_k+\frac{\mu_0^2-\mu^2}{2\omega_k}\right)+(Z^{-k})^+\frac{\mu_0^2-\mu^2}{2\omega_k}\right]A\gamma_k+\text{э.с.}+\ldots$$

$$H^{\Gamma}=NA^+U^kA\gamma_k+\text{э.с.}+ \tag{I6}$$

$$+A^+[Z^k;U^n]_{\mathcal{D}}A\gamma_k\gamma_n-A^+[Z^{k+};U^n]_{\mathcal{D}}A\gamma_k^+\gamma_n+NA^+U^kA\cdot NA^+Z^{k+}A+\text{э.с.}+\ldots$$

Выражения вида $[Z,E]_{\mathcal{D}}$ происходят от коммутации $[A^+ZA, A^+EA]$, которая оказывается равной $A^+[Z,E]_{\mathcal{D}}A$. Э.с. значит "эрмитово-сопряженное выражение". В частности, в первой строке (I6) э.с. обозначает $NA^+U^{k+}A\gamma_k^+$ (заметим, что $(U^+)^k_{pq}=$ $=U^k_{qp}=U^{-k}_{pq}$). Во второй строке (I6) подразумевается интегрирование по $k=(k_x,k_y,k_z)$ и по $n=(n_x,n_y,n_z)$ с весами $\omega^{-1}(k)$ и $\omega^{-1}(n)$ соответственно.

Нормально упорядочивая вторую строку в(I6), получим новые двухоператорные члены в дополнение к первоначальным (4) и (5). Коэффициенты при них вычислены в приложении 3. Если мы ограничимся только этими простейшими новыми членами, то сумма всех "плохих" двухоператорных членов (содержащих $\gamma^+\gamma^+$ и $\alpha^+\beta^+$) исчезнет, если

$$\frac{\mu_0^2-\mu^2}{4}+t(k)=0 \;\; ^{x/}; \qquad \frac{m_0^2-m^2}{4}+d(p)=0. \tag{I7}$$

---

x/ Это соотношение означает, что сумма всех поправок к "голой" массе (начинающаяся со слагаемого $t(k)$),не должна зависеть от k : $\mu^2=\mu_0^2-4t(k)+\ldots$ Это является следствием требования, которое подразумевалось уже в разделе I: энергия $\omega(k)$ "одетой" частицы должна быть релятивистски связана с её импульсом k с помощью некоторого постоянного параметра μ: $\omega(k)=\sqrt{k^2+\mu^2}$.

$$t(k)=\lambda\int\frac{d^3n}{\mathcal{E}(n)\,\mathcal{E}(n+k)}\left[Z_{21}(n+k,n)-Z_{12}(n+k,n)\right] \qquad (18)$$

$$d(p)=\lambda\int\frac{d^3t}{\mathcal{E}(t)\,\omega(t-p)}\left[Z_{11}(p,t)+Z_{21}(p,t)\right]. \qquad (19)$$

После этого сумма всех двухоператорных членов будет иметь привычный вид свободного гамильтониана, но с "перенормированными" энергиями

$$\int\frac{d^3p}{\mathcal{E}(p)}\ \mathcal{E}(p)\left[\alpha_p^+\alpha_p+\beta_p^+\beta_p\right]+\int\frac{d^3k}{\omega(k)}\ \omega(k)\,\gamma_k^+\gamma_k. \qquad (20)$$

Уравнение для функций Z из (9) получается при приравнивании нулю суммы всех трехоператорных членов. Коэффициенты при этих членах являются бесконечными суммами. Мы выпишем только коэффициенты при трехоператорных членах, явно фигурирующих в (14)-(16), и квадратичные по Z коэффициенты при трехоператорных членах, возникающих при нормальном упорядочении выражения $\frac{1}{2}[S,[S,H^I]]$ (не выписанного явно в (16)). Будут опущены коэффициенты, кубичные по Z, происходящие от $[S,[S,[S,H^3+H^4]]]$, и все прочие. Результат громоздких вычислений, описанных в приложении 2, удобно выписать в виде матричного уравнения для новых неизвестных функций $\hat{Z}_{mn}$

$$\hat{Z}_{11}(p,q)=-\frac{1}{\lambda}\left[\omega(p-q)-\mathcal{E}(p)+\mathcal{E}(q)\right]Z_{11}(p,q);\quad \hat{Z}_{12}(p,q)=-\frac{1}{\lambda}\left[\omega-\mathcal{E}(p)-\mathcal{E}(q)\right]Z_{12}(p,q)$$

$$\hat{Z}_{21}(p,q)=-\frac{1}{\lambda}\left[\omega+\mathcal{E}(p)+\mathcal{E}(q)\right]Z_{21}(p,q);\quad \hat{Z}_{22}(p,q)=-\frac{1}{\lambda}\left[\omega+\mathcal{E}(p)-\mathcal{E}(q)\right]Z_{22}(p,q). \qquad (21)$$

Первоначальные функции Z_{11}, Z_{12} и т.д. в дальнейшем просто обозначают выражения $-\lambda\hat{Z}_{11}[\omega-\mathcal{E}(p)+\mathcal{E}(q)]^{-1}$ и т.д. Можно показать, что все выражения $\omega(p-q)\pm\mathcal{E}(p)\pm\mathcal{E}(q)$ при условии $\mu<2m$ в нуль не обращаются. Уравнение для $\hat{Z}$ имеет вид

$$-\hat{Z}_{pq}+\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}-\frac{t(p-q)}{2\lambda\,\omega(p-q)}\left(Z_{pq}+Z^t_{qp}\right)-\frac{Z_{pq}}{2\lambda\,\mathcal{E}(q)}\mathcal{D}\begin{pmatrix}d_q&d_q\\d_q&d_q\end{pmatrix}+$$

$$+\frac{1}{2\lambda\mathcal{E}(p)}\begin{pmatrix}d_p&d_p\\d_p&d_p\end{pmatrix}\mathcal{D}Z_{pq}-\frac{1}{2}\left[\frac{\tau(p-q)}{\omega(p-q)}+\frac{\nu(p)}{\mathcal{E}(p)}+\frac{\nu(q)}{\mathcal{E}(q)}\right]\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+ \tag{22}$$

$$+\frac{1}{2}\int d^3t\begin{pmatrix}W_{11}&W_{12}\\W_{21}&W_{22}\end{pmatrix}+\ldots=0.$$

В (18) и (19) выписаны t и d. Остальные обозначения

$$Z^t_{qp}=\begin{pmatrix}Z_{11}(q,p)&Z_{21}(q,p)\\Z_{12}(q,p)&Z_{22}(q,p)\end{pmatrix} \tag{23}$$

$$\tau(\kappa)=\lambda^2\int\frac{d^3t}{\mathcal{E}(t)\,\mathcal{E}(t+\kappa)}\left\{\left[\frac{\hat{Z}_{12}(t+\kappa,t)}{\omega_\kappa-\mathcal{E}(t+\kappa)+\mathcal{E}(t)}\right]^2-\left[\frac{\hat{Z}_{21}(t+\kappa,t)}{\omega_\kappa+\mathcal{E}(t+\kappa)+\mathcal{E}(t)}\right]^2\right\} \tag{24}$$

$$\nu(p)=\lambda^2\int\frac{d^3t}{\mathcal{E}(t)\,\omega(t-p)}\left\{\left[\frac{\hat{Z}_{11}(p,t)}{\omega(p-t)-\mathcal{E}(p)+\mathcal{E}(t)}\right]^2-\left[\frac{\hat{Z}_{21}(p,t)}{\omega(p-t)+\mathcal{E}(p)+\mathcal{E}(t)}\right]^2\right\} \tag{25}$$

$$W_{mn}(p,t,q)=\left[V_{mn}(p,t,q)+\Gamma_{mn}(p,t,q)\right]\left[\mathcal{E}(p+t)\,\omega(t)\,\mathcal{E}(q+t)\right]^{-1}. \tag{26}$$

Выражения для V_{mn} и Γ_{11} выписаны в приложении 2. При изложении следствий из (22) мы дадим необходимые сведения об интегралах от W_{mn}.

Присутствие в (22) собственно-энергетических поправок t и d важно для дальнейшего. Они входят в уравнение и непосредственно и через посредство энергий $\omega(k)=\sqrt{k^2+\mu^2}$ и $\mathcal{E}(p)=\sqrt{p^2+m^2}$, в которых μ и m выражаются через "голые" массы и через t, d, см. (I7). Можно указать один общий путь, по которому в(22) попадают все возможные собственно-энергетические поправки. Возьмем любую n-ую повторную коммутацию $[S,[S,\dots[S,H]\dots]$. Нормальным упорядочением из нее можно выделить двухоператорные члены, содержащие собственно-энергетические поправки. При вычислении следующей, $n+1$, повторной коммутации, эти члены при коммутации с S дадут явно трехоператорные члены, включающие те же поправки. Отметим, что пока не найдено $\hat{Z}$, нельзя говорить о возможности взаимного уничтожения в уравнении вычисленных поправок t и d с другими поправками: t и d линейны по $\hat{Z}$, остальные же зависят от $\hat{Z}$ нелинейно.

(22) есть система нелинейных интегральных уравнений. Даже если мы оставим в (22) только выписанные члены, то получим нелинейные интегральные уравнения, не принадлежащие к какому-либо известному в математической литературе типу, для которого было бы доказано хотя бы существование решения/I5/. Нашей дальнейшей задачей будет исследование (22). Его результаты с математической точки зрения являются необходимыми условиями существования решения.

5. Об отсутствии решений, ведущих к расходимостям

Естественно сначала попробовать найти приближенное решение (22) по методу обычной теории возмущений, см./3/. Поскольку в (22) входят параметры λ, m, μ_y то $\hat{Z}$ зависит и от них. Пусть $\hat{Z}=\hat{Z}_0+\lambda\hat{Z}_1+\lambda^2\hat{Z}_2+\dots$, где $\hat{Z}_n$ не зависит от λ. Подставляя такое $\hat{Z}$ в (22) и собирая члены с одинаковыми степенями λ, получаем $\hat{Z}_0=I$.

Подставим $\hat{Z}$ = I в приближенное уравнение для $\hat{Z}$, левая часть которого состоит только из членов, выписанных в (22). Интегралы t и d_1 а вместе с ними ω и ε оказываются бесконечными. Левая часть уравнения теряет смысл и поэтому $\hat{Z}$ = I не является никаким приближением к решению приближенного уравнения (конечно, не лучше обстоит дело и с уравнением для первоначальных функций Z, см. (2.I4) в приложении 2).

По этой же причине приближенное уравнение не может вообще иметь каких-либо решений, обращающих t и d в бесконечность.

Не располагая явным видом точного уравнения для $\hat{Z}$, мы не можем проверить такую экзотическую возможность: в точном уравнении расходящиеся величины суммируются в конечное выражение (явление типа $exp(-\infty) = 0$ [x/]). Поэтому мы не можем строго доказать тезис: "Уравнение для Z не имеет решений, ведущих к бесконечным собственно-энергетическим поправкам". Приведен только довод в пользу этого тезиса: все собственно-энергетические поправки входят в точное уравнение для Z и поэтому могут сами предотвращать свою потенциальную расходимость. В следующем разделе будет установлено одно необходимое условие существования решений, дающих конечные собственно-энергетические поправки.

[x/] Вопрос о том, могут ли "компенсироваться" бесконечности, если оставить в уравнении конечное число членов, становится осмысленным, только если ввести дополнительное предположение о какой-то вспомогательной регуляризации интегралов (I8) и (I9), в которых положено $\hat{Z}$ = I .

6. Неравномерная сходимость интегралов

Собственно-энергетические поправки являются конечными, если функции $\hat{Z}_{mn}(p,q)$ стремятся к нулю при $p, q \to \infty$ x/ (позже мы уточним смысл "$p, q \to \infty$").

Рассмотрим поведение отдельных членов уравнения (22) при $p, q \to \infty$. Первый член – $\hat{Z}$ стремится к нулю, второй $\binom{11}{11}$ есть константа. Просмотр всех интегралов, входящих в остальные члены, обнаруживает, что их подинтегральные функции убывают с ростом p^2, q^2 и $(p-q)^2$. Это относится и к интегралам $\int d^3t\, W_{mn}$, не выписанным явно. Если интегралы сходятся равномерно, то и сами они стремятся к нулю при $p^2, q^2, (p-q)^2 \to \infty$. В таком случае член $\binom{11}{11}$ ничем не компенсируется, т.е. уравнение не удовлетворяется. Заключаем, что для существования убывающего решения необходимо, чтобы некоторые интегралы в (22) сходились неравномерно и были способны компенсировать член $\binom{11}{11}$.

Приведем пример неравномерно сходящегося интеграла, близкий к нашему случаю, когда подинтегральные функции качественно одинаково зависят как от переменных интегрирования, так и от внешних

---

x/ Для сходимости (I8) и (I9) достаточно было бы не убывающих, но осциллирующих $\hat{Z}$. Можно показать, что поправки, квадратичные по $\hat{Z}$ (не выписанные в этой статье), конечны только, если $\hat{Z}$ убывают. Более точной формулировкой была бы, например, такая: необходимо, чтобы $\hat{Z}$ убывали "почти при всех" возрастающих значениях аргументов. Такое уточнение учитывало бы возможность экзотических случаев типа, приведенного в /I6/. Однако удалось показать, что уравнение исключает такие случаи.

переменных-параметров p , q или $|p-q|$ (См., например интеграл (24), где $\hat{Z}_{12}$ и $\hat{Z}_{21}$ должны быть симметричными функциями своих аргументов согласно (2I) и (II)).

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda\,du}{a^2(u-v)^2+\lambda^2}. \qquad (27)$$

Подинтегральная функция $\to 0$ при фиксированном u и $v\to\infty$, но сам интеграл от v не зависит (сделай замену $u'=u-v$). Интеграл сходится неравномерно, поскольку основной вклад в него вносят u , близкие к v , как бы ни было велико v . Кроме того, интеграл не стремится к нулю при $\lambda\to 0$ (он просто равен π/a), хотя подинтегральное выражение явно содержит множитель λ^1 .

Покажем, что существуют $\hat{Z}$, действительно ведущие к неравномерной сходимости некоторых интегралов в (22) и обеспечивающие компенсацию члена (11) . В Приложении 4 показано, что требование 9) из раздела 3 подсказывает следующую возможность: $\hat{Z}_{11}(p,q)$ зависит не от всех своих аргументов p^2, q^2 и $(p-q)^2$ (см. раздел 3), но только от одной их комбинации: $[\omega(p-q)]^2 - [\mathcal{E}(p)-\mathcal{E}(q)]^2$. Удобно ввести безразмерный аргумент $x=[\omega^2-(\mathcal{E}_p-\mathcal{E}_q)^2]/\mu^2$, меняющийся от I до ∞ . Заметим, что требование 9), уменьшая число аргументов для $\hat{Z}_{11}$, никак не конкретизирует зависимость $\hat{Z}_{11}$ от x . Учитывая свойства (II), получаем, что $\hat{Z}_{22}=\hat{Z}_{11}$. Далее, $\hat{Z}_{12}$ и $\hat{Z}_{21}$ зависят только от $y=[(\mathcal{E}_p+\mathcal{E}_q)^2-\omega^2(p-q)]/4m^2-\mu^2$; $1\le y<\infty$.

$$\hat{Z}_{11}(p,q)=\hat{Z}_{22}(p,q)=\hat{Z}_{11}\left(\frac{\omega^2(p-q)-(\mathcal{E}_p-\mathcal{E}_q)^2}{\mu^2}\right);$$

$$\hat{Z}_{12}(p,q)=\hat{Z}_{12}\left(\frac{(\mathcal{E}_p+\mathcal{E}_q)^2-\omega^2(p-q)}{4m^2-\mu^2}\right);\quad \hat{Z}_{21}(p,q)=\hat{Z}_{21}\left(\frac{(\mathcal{E}_p+\mathcal{E}_q)^2-\omega^2}{4m^2-\mu^2}\right) \qquad (28)$$

Комбинации x и y могут быть малыми, даже когда p^2 и q^2 велики, и в этом смысле аналогичны разности u и v в примере (27). Например, $[\omega^2-(\mathcal{E}_p-\mathcal{E}_q)^2]/\mu^2$ равно I при $\vec{q}=\vec{p}\to\infty$, а $[(\mathcal{E}_p+\mathcal{E}_q)^2-\omega^2]/4m^2-\mu^2=1$ при $\vec{q}=-\vec{p}\to\infty$ (подробнее см. приложение 5).

Рассмотрим уравнение (22) при таких асимптотически больших значениях p и q : $p^2, q^2\to\infty$, и при этом угол между $\vec{p}$ и $\vec{q}$ остаётся отличным от 0^0 или 180^0, так что и $(\vec{p}\mp\vec{q})^2\to\infty$ тоже.

В этой асимптотике аргументы функций (28) стремятся к бесконечности. Пусть при этом функции (28) стремятся к нулю. В приложении 6 в такой асимптотике вычислены или оценены все интегралы, выписанные в (22). Интегралы $t(p-q)$ и $d(p)$ сходятся и стремятся к константам с ростом $(p-q)^2$ и p^2. Поскольку в уравнение они входят в произведениях с убывающими функциями Z/ω и $Z/\mathcal{E}$, то все члены уравнения, содержащие t и d, можно отбросить по сравнению с $\binom{11}{11}$. Все интегралы $\int d^3t\, W_{mn}$ тоже стремятся к нулю при $\vec{q}$, не параллельном $\vec{p}$. Интегралы же $\tau(p-q)$ и $v(p)$ стремятся при $(p-q)^2, p^2\to\infty$ соответственно к $const\,\omega(p-q)$ и $const\,\mathcal{E}(p)$. Если функции (28) таковы, что эти константы суть величины порядка λ^0 (ср. пример (27))x/, то член $-\frac{1}{2}(\tau/\omega+v_p/\mathcal{E}_p+v_q/\mathcal{E}_q)\binom{11}{11}$ может компенсировать $\binom{11}{11}$. Конечно,

x/ Заметим, что выражения (24) и (25) для τ и v явно содержат множитель λ^2 и в обычной теории возмущений должны были бы рассматриваться как величины порядка λ^2. Интересно еще отметить, что асимптотически наибольшими оказались не члены уравнения, содержащие интегралы $t, d,$ расходящиеся в теории возмущений, но члены, содержащие сходящиеся интегралы (24) и (25).

мы не можем получить точное условие компенсации, поскольку члены такого типа могут встретиться и в невыписанной части уравнения для Z . Проведенное исследование показывает только принципиальную возможность компенсации.

Подчеркнем, что осуществимость "одевания" критическим образом зависит от наличия нелинейных по Z членов уравнения, способных компенсировать($\vdots\vdots$). Если бы их не было, то преобразование "одевания" (7) не существовало бы (даже алгебраически) в обычном математическом смысле. Действительно, даже если бы (22) имело решения при отсутствии компенсации, то они вели бы к бесконечным значениям для $m_0^2-m^2$ и $\mu_0^2-\mu^2$. Это означало бы, что не существует преобразования $\exp S_2$, связывающего операторы с "голой" массой и с "одетой". Для сравнения заметим, что указанная Л.Фаддеевым процедура "одевания"/3/ в случае рассматриваемой теории имеет смысл только в рамках перенормировочной идеологий (вспомогательное обрезание, контрчлены и т.д.).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обычный набор требований к "одетым" операторам/I/ мы дополнили новыми естественными требованиями,(см. раздел 3).Следствия из них были существенно использованы как при выводе основного уравнения (22), так и при его исследовании. По-видимому, явное использование следствий дополнительных требований важно именно в реальных теориях поля, где процедуру "одевания" не удается провести до конца и точно, как это сделано, например, для модели Ли (см. /I/ и /7/).

В рассматриваемой теории обсуждается неполное "одевание" (см. раздел 2).Исследованы необходимые условия существования решения уравнения для функций $\hat{z}$, определяющих преобразование "одевания". Оказалось, что приближенное уравнение для $\hat{z}$ не допускает решений, ведущих к собственно-энергетическим расходимостям простейшего вида. Показано, что в точное уравнение для $\hat{z}$ входят все интегралы-поправки к "голым" массам. Если в уравнении они не суммируются в выражения, остающиеся конечными при расходимости поправок, то решения и точного уравнения (если они существуют) должны вести к конечным значениям для всех поправок к массам.

Получено одно необходимое условие существования решений, не ведущих к расходимостям: некоторые интегралы в уравнении (22) для $\hat{z}$ должны сходиться неравномерно и иметь определенное асимптотическое поведение. Показано, что это условие действительно выполняется, если $\hat{z}(p,q)$ есть функции некоторых специальных комбинаций p и q , см. (28). Эти комбинации не являются произвольно угаданными, они были получены при обсуждении следствий одного из дополнительных требований к "одетым" операторам.

Благодарю Б.Н.Валуева и особенно О.И.Завьялова за обсуждения и полезные замечания.

Приложение I. Следствия из дополнительных требований к "одетым" операторам

Получим следствия из требований 5)-8), см. раздел 3.

5). Если требование 4) означает, что при трансляциях $exp(iP_j a)$ вдоль любого из направлений $j=x,y,z$ оператор α_p^+ должен преобразовываться по правилу $exp(iP_j a)\,\alpha_p^+\,exp(-iP_j a)=exp(ip_j a)\alpha_p^+$, то требование 5) сводится к аналогичному соотношению

$$exp(i\vec{M}\vec{\omega})\alpha_p^+\,exp(-i\vec{M}\vec{\omega})=\alpha_{\omega p}^+$$

$$\vec{M}=(M_{23},\,M_{31},\,M_{12})\,;\qquad M_{ij}=-i\int d^3x\,[T_{4i}\,x_j-T_{4j}\,x_i] \tag{I.I}$$

По поводу M_{ij} см. /8/, § 2; ωp обозначает соответствующим образом повернутый вектор p. Соотношение (I.I) будет иметь место, если выражение $\vec{M}$ через "одетые" операторы имеет тот же вид, что и через "голые": $exp\,S\,\vec{M}\,exp(-S)=\vec{M}$. Отсюда получаем

$S=exp(i\vec{M}\vec{\omega})S\,exp(-i\vec{M}\vec{\omega})$ или

$$\int_p\int_q\int_k[(Z_{11})^k_{pq}\alpha_p^+\alpha_q\gamma_k+\ldots]=\int_p\int_q\int_k[(Z_{11})^k_{pq}e^{i\vec{M}\vec{\omega}}\alpha_p^+\alpha_q\gamma_k e^{-i\vec{M}\vec{\omega}}+\ldots]= \tag{I.2}$$
$$=\int_p\int_q\int_k[(Z_{11})^k_{pq}\alpha_{\omega p}^+\alpha_{\omega q}\gamma_{\omega k}+\ldots]=\int_{p'}\int_{q'}\int_{k'}[(Z_{11})^{mk'}_{mp'\,mq'}\alpha_{p'}^+\alpha_{q'}\gamma_{k'}+\ldots].$$

Последнее равенство в (I.2) получаем после замены переменных $p'=\omega p$ или $p=\omega^{-1}p'\equiv mp'$. Приравнивая коэффициенты при независимых операторах (или беря соответствующие матричные элементы), видим, что должно иметь место $(Z_{11})^k_{pq}=(Z_{11})^{mk}_{mp\,mq}$. Это значит, что $(Z_{11})^k_{pq}$ должно зависеть не от $k_x,\,k_y,\,\ldots\,q_z$ в отдельности, но только от их вращательно-инвариантных комбинаций $k^2, p^2, q^2, (\vec{k}\cdot\vec{p})$ и т.д. Это не противоречит (IO), поскольку $\delta(\vec{k}-\vec{p}+\vec{q})\sim\delta((\vec{k}-\vec{p}+\vec{q})^2)$. С учетом (IO) получаем, что $Z_{mn}(p,q)$ должны зависеть только от p^2, q^2, $(\vec{p}\vec{q})$.

6). Потребуем, чтобы пространственные четности всех "одетых" частиц равнялись +I (как и у "голых"). Тогда определяющие соотношения для оператора P имеют один и тот же вид как в терминах "голых", так и "одетых" операторов:

$$P a_p^+ \Omega_0 = a_{-p}^+ \Omega_0 \quad ; \qquad P \alpha_p^+ \Omega = \alpha_{-p}^+ \Omega \, ;$$
$$P a_p^+ a_q^+ \Omega_0 = a_{-p}^+ a_{-q}^+ \Omega_0 \quad ; \qquad P \alpha_p^+ \alpha_q^+ \Omega = \alpha_{-p}^+ \alpha_{-q}^+ \Omega \, ; \quad \ldots$$

Поэтому P выражается через "одетые" операторы так же, как через "голые": $\exp S \, P \exp(-S) = P$. Отсюда уже изложенным приёмом получаем $Z_{pq}^{\kappa} = Z_{-p,-q}^{-\kappa}$, а с учётом (I0) $Z_{pq} = Z_{-p,-q}$. Это соотношение автоматически удовлетворяется, если Z_{pq} зависит только от $p^2, q^2, (\vec{p}\vec{q})$. В случае функции трех векторов аналогичное равенство исключало бы зависимость от псевдоскаляров вида $([\vec{p} \times \vec{q}] \cdot \vec{r})$

7). Возможны разные определения операции обращения времени T. Фиксируем сначала принимаемое здесь определение x/

$$T \chi(x,t) T^{-1} = \eta_T \chi(x,-t). \qquad (I.3)$$

Оператор T антилинеен, так что $T c T^{-1} = c^*$, если c есть c - число. В (I.3) χ обозначает оператор поля ψ или φ. Из (I.3) и разложений (2) можно получить эквивалентные соотношения

$$\begin{aligned} T a_p T^{-1} &= \eta a_{-p} \quad ; & T a_p^+ T^{-1} &= \eta^* a_{-p}^+ \\ T b_p^+ T^{-1} &= \eta b_{-p}^+ \quad ; & T b_p T^{-1} &= \eta^* b_{-p} \\ T g_\kappa T^{-1} &= \eta_0 g_{-\kappa} \quad ; & T g_\kappa^+ T^{-1} &= \eta_0^* g_{-\kappa}^+ \end{aligned} \qquad (I.4)$$

---

x/ См. книгу[2], (7.32I), а также работы[I7]. В обзоре[I8] этому определению соответствует соотношение (I5). Другое представление обращения времени там обозначено через T'. Его придерживаются Швингер, Паули и ряд других авторов, см., например[I9].

Далее для простоты полагаем $\eta=\eta_0=+1$. По тем же мотивам, что и в случае пространственного отражения, требуем, чтобы для новых операторов α, β, γ имели место те же соотношения (I.4), т.е. чтобы T выражалось через α, β, γ так же, как через a, b, g : $\exp S \; T \exp(-S) = T$. Отсюда следует $S = TST^{-1}$ или

$$\int_p \int_q \frac{1}{\omega(p-q)} \left[Z_{11}(p,q)\, \alpha_p^+ \alpha_q \gamma_{p-q} + \ldots \right] =$$

$$= \int_p \int_q \frac{1}{\omega} \left[T Z_{11}(p,q) T^{-1} T \alpha_p^+ T^{-1} T \alpha_q T^{-1} T \gamma_{p-q} T^{-1} + \ldots \right] = \tag{I.5}$$

$$= \int_p \int_q \frac{1}{\omega} \left[Z_{11}^*(p,q)\, \alpha_{-p}^+ \alpha_{-q} \gamma_{-p+q} + \ldots \right] = \int_{p'} \int_{q'} \frac{1}{\omega(p'-q')} \left[Z_{11}^*(-p',-q')\, \alpha_{p'}^+ \alpha_{q'} \gamma_{p'-q'} + \ldots \right].$$

Получаем, что $Z_{mn}^*(p,q) = Z_{mn}(-p,-q)$. Поскольку $Z_{mn}(-p,-q) = Z_{mn}(p,q)$, то это означает, что $Z_{11}(p,q), Z_{12}(p,q), Z_{21}(p,q), Z_{22}(p,q)$ должны быть действительными функциями.

8) Зарядовое сопряжение. Сформулированное в разделе 3 требование будет обеспечено, если новые операторы заряженных частиц будут вести себя при зарядовом сопряжении так же, как и "голые", см., например, (7.330) в /2/:

$$\begin{aligned} &C \alpha_p^+ C^{-1} = \eta_c^* \beta_p^+ \; ; \qquad C \alpha_p C^{-1} = \eta_c \beta_p \; ; \\ &C \beta_p^+ C^{-1} = \eta_c \alpha_p^+ \; ; \qquad C \beta_p C^{-1} = \eta_c^* \alpha_p \; ; \qquad |\eta_c| = 1. \end{aligned} \tag{I.6}$$

Пусть η_c и зарядовая четность нейтральных частиц равны +I. Как и прежде, имеем $S = CSC^{-1}$. С помощью развернутой записи (I2) для S тем же приемом, что и в (I.2) или (I.5), получим:

$$Z_{11}(p,q) = Z_{22}(-q,-p) \; ; \quad Z_{12}(p,q) = Z_{12}(-q,-p) \; ; \quad Z_{21}(p,q) = Z_{21}(-q,-p) \tag{I.7}$$

или соотношения (2I), поскольку $Z_{mn}(p,q)$ зависят только от $p^2, q^2, (\bar{p}\bar{q})$.

Приложение 2. Получение уравнения для Z

Вычисление коммутации $[S,[S,H^I]]$ облегчается формулой вида

$$[C-C^+,\ K+K^+]=[C,K]-[C^+,K]+\text{э.с.}$$

Громоздкое выражение для $[S,[S,H^I]]$ мы не будем выписывать целиком, поскольку непосредственно нам нужны только члены, которые после нормального упорядочивания дают трилинейные члены вида $A^+\{\ldots\}A\gamma+\text{э.с.}$. Помимо них, в $[S,[S,H^I]]$ есть еще члены типа

$$\int_k\int_{k'}\int_{\tilde k}A^+[Z^{+k},[Z^{+\tilde k},U^{+k'}]_D]_D A\,\gamma_k^+\gamma_{k'}^+\gamma_{\tilde k}^+ + \text{э.с.}$$

Нормальное упорядочение их по операторам α,β приводит к кубичным по γ членам. Все эти члены "плохие". А именно, член с $\gamma_k^+\gamma_{k'}^+\gamma_{\tilde k}^+$ не аннулирует вакуум Ω , другие трехгаммные члены либо не аннулируют одночастичных состояний $\gamma_k^+\Omega$, либо эрмитово сопряжены к неаннулирующим членам. Уничтожение таких членов должно производиться с помощью отдельного, дополнительного преобразования вида (9) с таким S (см. раздел 2):

$$S_{3\gamma}=\int_{k_1}\int_{k_2}\int_{k_3}\,[\,\Gamma(k_1,k_2,k_3)\gamma_{k_1}\gamma_{k_2}\gamma_{k_3}+\ldots\,].$$

Нормально упорядочивая $[S,[S,H^I]]$ по операторам γ и опуская все трехгаммные члены, получаем выражение

$$\begin{aligned}
[S,[S,H^I]] \to &-NA^+Z^nA\cdot A^+[Z^{+n},U^k]_D A\gamma_k+2A^+[Z^k,U^n]_D A\cdot NA^+Z^{+n}A\gamma_k+\\
&+NA^+U^nA\cdot A^+[Z^k,Z^{+n}]_D A\gamma_k+A^+[Z^n,U^k]_D A\cdot NA^+Z^{+n}A\gamma_k+\\
&+2NA^+Z^nA\cdot A^+[Z^k,U^{+n}]_D A\gamma_k+A^+[Z^k,Z^n]_D A\cdot NA^+U^{+n}A\gamma_k+\text{э.с.}
\end{aligned} \qquad (2.I)$$

Подразумеваются интегрирования $\int d^3n/\omega(n)$ и $\int d^3k/\omega(k)$. Для нормального упорядочения (2.I) используем непосредственно проверяемые формулы

$$A^+XA = NA^+XA + \int \frac{d^3p}{\mathcal{E}(p)} X^{22}_{pp} = NA^+XA + \frac{1}{2}\sum_{m=1,2}\int_p X^{mm}_{pp} \equiv NA^+XA + \frac{1}{2}\,Tr\,X \tag{2.2}$$

$$NA^+XA \cdot NA^+YA = N(A^+XA \cdot A^+YA) + NA^+[X\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)Y + Y\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)X]A + \\ + \int_p\int_q X^{21}_{pq}\, Y^{12}_{qp}. \tag{2.3}$$

В (2.2) использовано свойство (II). Последний c – числовой член в (2.3) дает линейные по $\gamma_{k=0}$ выражения, не входящие в наше уравнение для Z. После нормального упорядочения получаем от (2.I) трилинейные члены:

$$NA^+[T_k + V_k + R_k]A\gamma_k + \text{э.с.} \tag{2.4}$$

Члены с матрицей T_k возникают от Tr в (2.2):

$$T_k = \frac{1}{2}\{-Z^n \cdot Tr[Z^{+n}, U^k]_{\mathcal{D}} + Z^{+n}\cdot 2Tr[Z^k, U^n]_{\mathcal{D}} + U^n \cdot Tr[Z^k, Z^{+n}]_{\mathcal{D}} + \\ + Z^n \cdot Tr[Z^n, U^k]_{\mathcal{D}} + Z^n \cdot 2\,Tr[Z^k, U^{+n}]_{\mathcal{D}} + U^{+n}\cdot Tr[Z^k, Z^n]_{\mathcal{D}}\}. \tag{2.5}$$

Члены V_k возникают от упорядочивания по формуле (2.3) первого и четвертого слагаемых в (2.I), содержащих матрицу U с индексом k. R_k происходит от остальных слагаемых в (2.I). Приведем только выражение для V_k, причем в несколько преобразованном виде с указанием непрерывных "матричных индексов" (по повторяющимся индексам подразумевается интегрирование с весом ω^{-1} или $\mathcal{E}^{-1}$)

$$(V_k)_{pq} = [-Z^n_{pp'}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)Z^{+n}_{p'q'} + Z^{+n}_{pp'}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)Z^n_{p'q'}]\mathcal{D}U^k_{q'q} + \\ + U^k_{pp'}\mathcal{D}[-Z^n_{p'q'}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)Z^{+n}_{q'q} + Z^{+n}_{p'q'}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)Z^n_{q'q}] + \\ + Z^n_{pp'}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)U^k_{p'q'}\mathcal{D}Z^n_{q'q} + Z^n_{pp'}\mathcal{D}U^k_{p'q'}\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)Z^{+n}_{q'q} - \\ - Z^{+n}_{pp'}\mathcal{D}U^k_{p'q'}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)Z^n_{q'q} - Z^{+n}_{pp'}\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)U^k_{p'q'}\mathcal{D}Z^n_{q',q}\;;\quad \mathcal{D} \equiv \left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right) \tag{2.6}$$

Вычисление (2.5) и (2.6) производится непосредственно. Вставляем $Z^{\kappa}_{pq}=\delta(\kappa-p+q)Z_{pq}$ и $U^{\kappa}_{pq}=\delta(\kappa-p+q)\lambda\binom{11}{11}$ и выполняем интегрирования, исключающие δ - функции. При этом ввиду действительности Z имеем:

$$(Z^{+n})_{pq}\equiv Z^{n+t}_{qp}=\delta(-n-p+q)Z^{t}_{qp}. \qquad (2.7)$$

Здесь Z^t означает матрицу, транспонированную по дискретным индексам, см. (23). Везде используется свойство (II) Пример вычислений:

$$Z^{n}_{pp'}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}Z^{+n}_{p'q'}=\delta(p-q')\int\frac{d^3p'}{\varepsilon(p')}\begin{pmatrix}Z_{11}(p,p')Z_{11}(p,p') & Z_{11}(p,p')Z_{21}(p,p')\\ Z_{21}(p,p')Z_{11}(p,p') & Z_{21}(p,p')Z_{21}(p,p')\end{pmatrix}.$$

Результаты вычислений:

$$(T_\kappa)_{pq}=\delta(\kappa-p+q)\left[3\,\frac{t(p-q)}{\omega(p-q)}\left(Z_{pq}+Z^{t}_{qp}\right)-\frac{\tau(p-q)}{\omega(p-q)}\lambda\binom{11}{11}\right]. \qquad (2.8)$$

Выражения для t и τ см. в формулах (I8) и (24) раздела 4.

$$(V_\kappa)_{pq}=\delta(\kappa-p+q)\left\{-\lambda\binom{11}{11}\left[\frac{v(p)}{\varepsilon(p)}+\frac{v(q)}{\varepsilon(q)}\right]+\lambda\int\frac{d^3t}{\varepsilon(p+t)\,\omega(t)\,\varepsilon(q+t)}\begin{pmatrix}V_{11}&V_{12}\\V_{21}&V_{22}\end{pmatrix}\right\} \qquad (2.9)$$

$$V_{11}=2Z_{11}Z_{22}-Z_{11}Z_{12}-Z_{12}Z_{22}-Z_{22}Z_{21}-Z_{21}Z_{11}+2Z_{21}Z_{21}$$

$$V_{12}=2Z_{11}Z_{21}-Z_{11}Z_{11}-Z_{12}Z_{21}-Z_{11}Z_{22}-Z_{21}Z_{12}+2Z_{21}Z_{22}$$

$$V_{21}=2Z_{21}Z_{22}-Z_{21}Z_{12}-Z_{11}Z_{22}-Z_{12}Z_{21}-Z_{11}Z_{11}+2Z_{11}Z_{21}. \qquad (2.10)$$

В (2.10) первый и второй сомножители каждого члена зависят соответственно от следующих пар аргументов: $(p,p+t)$ и $(q+t,q)$. Например, $Z_{11}Z_{22}\equiv Z_{11}(p,p+t)Z_{22}(q+t,q)$. Имеет место равенство $V_{22}(p,t,q)=V_{11}(q,t,p)$. Выражение для $v(p)$ см. в (25). Наконец,

$$(R_\kappa)_{pq}=\delta(\kappa-p+q)\left[3Z_{pq}\mathcal{D}\frac{d(q)}{\varepsilon(q)}\binom{11}{11}-3\frac{d(p)}{\varepsilon(p)}\binom{11}{11}\mathcal{D}Z_{pq}+\right.$$
$$\left.+\lambda\int\frac{d^3t}{\varepsilon(p+t)\,\omega(t)\,\varepsilon(q+t)}\begin{pmatrix}r_{11}&r_{12}\\r_{21}&r_{22}\end{pmatrix}\right]. \qquad (2.11)$$

Интеграл d см. в (I9). Из всех выражений Γ_{mn} выписываем только Γ_{11} :

$$\Gamma_{11} = 2Z_{21}Z_{21} - Z_{21}Z_{22} - Z_{22}Z_{11} + Z_{11}Z_{11} - 2Z_{11}Z_{12} + Z_{12}Z_{22} -$$
$$- Z_{11}Z_{22} + 2Z_{21}Z_{22} - Z_{12}Z_{12} - 2Z_{12}Z_{21} + Z_{22}Z_{21} + Z_{21}Z_{11}. \qquad (2.12)$$

В первой строке в (2.I2) первый сомножитель каждого члена зависит от пары аргументов $(p, p+t)$, второй - от $(p+t, q+t)$. Во второй строке первый сомножитель зависит от $(p+t, q+t)$, второй от $(q+t, q)$.

Уравнение для Z теперь можно записать в виде

$$[Z^k, E]_D + Z^k\left[\omega(k) + \frac{\mu_0^2-\mu^2}{2\omega(k)}\right] + (Z^{-k})^+ \frac{\mu_0^2-\mu^2}{2\omega(k)} + U^k +$$
$$+ \frac{1}{2}(T_k + V_k + R_k) + \ldots = 0. \qquad (2.13)$$

Учтен коэффициент I/2 перед $[S,[S,H^I]]$ в (8). Сократим все члены уравнения на множитель $\delta(k-p+q)$ и примем во внимание соотношения (I7).

Тогда получим

$$Z_{pq} D E_q - E_p D Z_{pq} + Z_{pq}\,\omega(p-q) + \lambda\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} - \frac{t(p-q)}{2\omega(p-q)}\left(Z_{pq} + Z^t_{qp}\right) -$$
$$- Z_{pq} D \frac{d(q)}{2E(q)}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} + \frac{d(p)}{2E(p)}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} D Z_{pq} - \frac{\lambda}{2}\left[\frac{\tau(p-q)}{\omega(p-q)} + \frac{v(p)}{E(p)} + \frac{v(q)}{E(q)}\right]\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix} +$$
$$+ \lambda\int \frac{d^3t}{E(p+t)\,\omega(t)\,E(q+t)}\begin{pmatrix}V_{11}+\Gamma_{11} & V_{12}+\Gamma_{12}\\ V_{21}+\Gamma_{21} & V_{22}+\Gamma_{22}\end{pmatrix} + \ldots = 0. \qquad (2.14)$$

Первые три члена уравнения после введения новых функций $\hat{Z}$, см. (2I), превращаются в $-\lambda\hat{Z}(p,q)$.

Приложение 3. Поправки к "голым" массам

Простейшие поправки возникают от коммутации $[S, H^I]$, т.е. от второй строки членов в (I6). После их нормального упорядочивания с помощью формул (2.2) и (2.3) приложения 2 получаем такое квадратичное по операторам выражение

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}[Z^k; U^n]_D \gamma_k \gamma_n + \frac{1}{2}\left\{\mathrm{Tr}[Z^n; U^{+k}]_D - \mathrm{Tr}[Z^{+k}; U^n]_D\right\} \gamma_k^+ \gamma_n - \frac{1}{2}\mathrm{Tr}[Z^{+k}; U^{+n}]_D \gamma_k^+ \gamma_n^+ +$$

$$+ NA^+\left[U^k\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}Z^{+k} + Z^{+k}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}U^k + Z^k\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}U^{+k} + U^{+k}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}Z^k\right]A. \qquad (3.\mathrm{I})$$

Члены первой строки в (3.I) суть поправки к первой строке в (I5). Такого рода выражения уже вычислялись в приложении 2, см. (2.5). Выпишем сумму первых строк (I5) и (3.I)

$$\int_k \left\{\left[\omega(k) + \frac{\mu_0^2-\mu^2}{2\omega(k)} + 2t(k)\right]\gamma_k^+\gamma_k + \left[\frac{\mu_0^2-\mu^2}{4\omega(k)} + t(k)\right]\left(\gamma_k\gamma_{-k} + \gamma_k^+\gamma_{-k}^+\right)\right\}. \qquad (3.2)$$

Интеграл t определен формулой (I8). Из-за члена $\gamma_k^+\gamma_{-k}^+$ состояния Ω и $\gamma_k^+\Omega$ не являются собственными функциями H. Этот член поэтому должен быть "убран" из H. Приравнивая нулю коэффициент при нем, получаем первое соотношение в (I7).

Совершенно аналогично поступаем с билинейными по α, β членами в (3.I). Вместе с $\int_p\int_q NA_p^+ E_{pq} A_q$ они дают

$$\int \frac{d^3p}{\varepsilon(p)} NA_p^+ \begin{pmatrix} \varepsilon(p) + (m_0^2-m^2)/2\varepsilon(p) + 2d(p) & (m_0^2-m^2)/2\varepsilon(p) + 2d(p) \\ (m_0^2-m^2)/2\varepsilon(p) + 2d(p) & \varepsilon(p) + (m_0^2-m^2)/2\varepsilon(p) + 2d(p) \end{pmatrix} A_p. \qquad (3.3)$$

Отсюда затем получаем второе соотношение в (I7).

Приложение 4. Релятивистская ковариантность "одетых" состояний

При обсуждении этого вопроса придется перейти к гейзенберговской картине. Лоренцевское преобразование требует выхода за рамки шредингеровской картины с фиксированной временной осью.

Поскольку $\psi(x,t) = \exp(iHt)\,\psi(x)\,\exp(-iHt)$, то из (2) вытекают такие разложения гейзенберговских полей через "голые" гейзенберговские операторы рождения-уничтожения

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int \frac{d^3p}{\varepsilon(p)}\, e^{ixp}\left[a_p(t) + b^+_{-p}(t)\right] \tag{4.I}$$

$$\varphi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2(2\pi)^3}} \int \frac{d^3k}{\omega(k)}\, e^{ixk}\left[g_k(t) + g^+_{-k}(t)\right] \tag{4.2}$$

$$g_k(t) = e^{iHt} g_k\, e^{-iHt} \quad ; \quad \left[g_k(t),\, g^+_{k'}(t)\right] = \sqrt{k^2+\mu^2}\;\delta(k-k'). \tag{4.3}$$

Для обсуждения поведения операторов рождения-уничтожения при лоренцевских преобразованиях придется выписать выражения генераторов этих преобразований через "голые" операторы (автор не смог найти таких выражений в литературе). Согласно каноническому формализму, эти генераторы равны

$$L_j = \int d^3x\, M_{j44} = -\int d^3x\, x_j\, H(x,t) + t\int d^3x\, P_j(x,t). \tag{4.4}$$

См., например /8/, /II/. Здесь $H(x,t)$ и $P_j(x,t)$ – плотности полного гамильтониана и импульса, например,

$$\begin{aligned} H(x,t) = \frac{1}{2}\left[(\partial\varphi(x,t)/\partial t)^2 + (\vec\nabla\varphi)^2 + \mu_0^2\varphi^2\right] + \\ + \left[(\partial\psi^+(x,t)/\partial t)(\partial\psi/\partial t) + (\vec\nabla\psi^+\vec\nabla\psi) + m_0^2\psi^+\psi\right] + \lambda(4\pi)^{3/2}\psi^+\psi\,\varphi . \end{aligned} \tag{4.5}$$

Чтобы (4.4) выразить через $a(t)$, $b(t)$, $g(t)$, надо иметь, кроме (4.I) и (4.2), еще разложения для $\partial\psi/\partial t$ и $\partial\varphi/\partial t$. Первое получается из известного разложения для $\pi^{+}(x)$ (канонически сопряженной к $\psi^{+}(x)$ величины) по формуле $\partial\psi/\partial t =$ x/ $= \exp(iHt)\,\pi^{+}(x)\exp(-iHt)$

$$\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = \frac{-i}{\sqrt{2(2\pi)^3}}\int d^3p\, e^{ixp}\left[a_p(t) - b^{+}_{-p}(t)\right]. \tag{4.6}$$

Аналогичное разложение имеем для $\partial\varphi/\partial t$. После громоздких преобразований из (4.4) с помощью (4.5) и (4.I), (4.2), (4.6) можно получить

$$L_j = tP_j + L_j^{3} + L_j^{H} + L_j^{I}\quad,\ j = 1,2,3 \tag{4.7}$$

$$L_j^{3} = \iint\frac{d^3p}{\varepsilon(p)}\frac{d^3q}{\varepsilon(q)}(-i)\,\delta_j'(p-q)\Big\{\Big[\varepsilon(p)\varepsilon(q) + \frac{m_0^2-m^2}{2}\Big]\big[a_p^{+}a_q + b_p^{+}b_q\big] + \\ + \frac{m_0^2-m^2}{2}\big[a_p^{+}b_{-q}^{+} + b_{-p}a_q\big]\Big\} \tag{4.8}$$

$$L_j^{H} = \iint\frac{d^3k_1}{\omega(k_1)}\frac{d^3k_2}{\omega(k_2)}(-i)\,\delta_j'(k_1-k_2)\Big\{\Big[\omega(k_1)\omega(k_2) + \frac{\mu_0^2-\mu^2}{2}\Big]g_{k_1}^{+}g_{k_2} + \\ + \frac{\mu_0^2-\mu^2}{2}\big[g_{-k_1}g_{k_2} + g_{k_1}^{+}g_{-k_2}^{+}\big]\Big\}. \tag{4.9}$$

---

x/ Разложение (4.6) можно также получить дифференцированием (4.I) по времени. Хотя при наличии взаимодействия $a_p(t)$ и $b^{+}_{-p}(t)$ зависят от времени не просто как экспоненты, для их суммы имеем $\frac{\partial}{\partial t}\left[a_p(t)+b^{+}_{-p}(t)\right] = -i\varepsilon(p)\left[a_p(t) - b^{+}_{-p}(t)\right]$. Действительно, $\partial\psi/\partial t = i\left[H(t),\psi(x,t)\right] = i\left[H^3,\psi\right]$, поскольку у нас H^I коммутирует с $\psi(x,t)$. Непосредственным вычислением с помощью коммутаций вида (4.2) убеждаемся, что

$$i\left[H^3,\psi\right] \sim \left[\int_p \varepsilon(p)\,a_p^{+}(t)\,a_p(t) + \ldots,\ \int_q\left[a_q(t) + b_{-q}^{+}(t)\right]\ldots\right] \sim \\ \sim \int_p\left[-\varepsilon(p)\,a_p(t) + \varepsilon(p)\,b_{-p}^{+}(t)\right],$$

т.е. получаем правую часть (4.6).

$$L_j^{\Gamma}=\iiint\frac{d^3p}{\mathcal{E}(p)}\frac{d^3q}{\mathcal{E}(q)}\frac{d^3k}{\omega(k)}\,i\lambda\,\delta_j'(-p+q+k)\left[a_p^+a_q+a_p^+b_{-q}^++b_{-p}a_q+b_{-p}^+b_{-q}\right]\left[g_k+g_{-k}^+\right] \qquad (4.10)$$

Здесь $\delta_j'(p-q)\equiv\partial\delta(p-q)/\partial p_j$. В этих формулах мы опустили аргументы t у гейзенберговских операторов a, b, g и так будем делать в дальнейшем. В отличие от (4.4), приведенное выражение для L_j является нормально упорядоченным (ср. раздел I).

Теперь можно выяснить, как изменяются $a(t)$, $b(t)$, $g(t)$ при бесконечно малых лоренцевских преобразованиях $\vec{x}'=\vec{x}-\vec{\varepsilon}t$, $t'=t-(\vec{\varepsilon}\vec{x})$. Например,

$$g_k'^+=\exp(-iL_j\varepsilon_j)\,g_k^+\exp(iL_j\varepsilon_j)\cong g_k^++i\varepsilon_j\left[g_k^+,L_j\right].$$

В коммутации $[g_k^+,L_j]$ фигурируют и операторы заряженных частиц. Поэтому из одночастичного состояния $g_k^+\Omega_o$ при лоренцевском преобразовании получается состояние, где присутствует пара заряженных частиц (из-за наличия a^+b^+g в L_j^{Γ}).

Если мы хотим, чтобы "одетое" состояние $\gamma_k^+\Omega$ выглядело во всех лоренцевских системах как одночастичное состояние, то в L_j, выраженном через α, β, γ, должен отсутствовать член с $\alpha^+\beta^+\gamma$. Если мы того же хотим от состояний $\alpha_p^+\Omega$ и $\beta_p^+\Omega$, то в L_j должны отсутствовать члены с $\alpha^+\alpha\gamma^+$ и $\beta^+\beta\gamma^+$. Наконец, вакуумное состояние Ω будет лоренц-инвариантным, если в L_j нет $\alpha^+\beta^+\gamma^+$. Исходя из изложенного, потребуем, чтобы в L_j не было трилинейных по α,β,γ членов.

Коэффициент при трехоператорных членах в $\exp S_3\,L_j\,\exp(-S_3)$ вычислялся так же и в том же приближении, что и в случае $\exp S_3\,H\exp(-S_3)$, (см. раздел 4 и приложение 2).В результате получилось такое выражение для этого коэффициента:

$$i\delta_j'(-p+q+k)\Big[Z_{p,p-k}\mathcal{D}\mathcal{E}_q-\mathcal{E}_p\mathcal{D}Z_{k+q,q}+Z_{pq}\,\omega(k)+\lambda\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}+$$
$$+Z_{p,p-k}\mathcal{D}\frac{m_0^2-m^2}{8\mathcal{E}(p-k)}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}-\frac{m_0^2-m^2}{8\mathcal{E}(k+q)}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\mathcal{D}Z_{k+q,q}+\frac{\mu_0^2-\mu^2}{8\omega(p-q)}\left(Z_{pq}+Z^t_{qp}\right)-$$
$$-\frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\left(\frac{\tau(k)}{\omega(k)}+\frac{v(p)}{\mathcal{E}(p)}+\frac{v(q)}{\mathcal{E}(q)}\right)+\frac{\lambda}{2}\int d^3t\begin{pmatrix}w_{11}&w_{12}\\w_{21}&w_{22}\end{pmatrix}\Big]. \qquad (4.II)$$

В отличие от левой части (2.I4) квадратная скобка зависит не только от векторов p и q, но и от k. Если использовать равенства вида

$$\delta_j'(k-p+q)Z_{p,p-k}\mathcal{D}\mathcal{E}_q=\mathcal{E}_q\frac{\partial}{\partial q_j}Z_{pq}\mathcal{D}\,\delta(k-p+q)+Z_{pq}\mathcal{D}\mathcal{E}_q\,\delta_j'(k-p+q), \qquad (4.I2)$$

то (4.II) можно преобразовать к виду, где зависимость от k сосредоточена в δ - функциях:

$$i\delta(k-p+q)\Big\{\mathcal{E}_q\frac{\partial}{\partial q_j}Z_{pq}\mathcal{D}+\mathcal{E}_p\mathcal{D}\frac{\partial}{\partial p_j}Z_{pq}-Z_{pq}\frac{p_j-q_j}{\omega(p-q)}+\ldots\Big\}+$$
$$+i\,\delta_j'(k-p+q)\Big\{\quad\Big\}. \qquad (4.I3)$$

Вторая фигурная скобка в (4.I3) получается из квадратной скобки в (4.II), если в ней положить $k=p-q$. После этого мы получаем выражение, совпадающее с левой частью уравнения (2.I4) и равное ввиду этого нулю. Таким образом, условие равенства нулю коэффициента при трехоператорных членах в преобразованном L_j превращается в условие равенства нулю первой фигурной скобки $\{I\}$ в (4.I3).

Попробуем извлечь из этого условия какие-нибудь дополнительные сведения о неизвестных функциях Z. Уравнение $\{I\}=0$ в некотором смысле проще, чем (22): во вторую фигурную скобку вносят вклад все члены из квадратной скобки в (4.II), в то время как в $\{I\}$ попадают только те, которые зависят от k. В этой работе нас интересует вопрос о компенсации члена $\left(\frac{!!}{!!}\right)$ нелинейными по Z членами уравнения (22). Все нелинейные по Z члены в квадратной скобке в (4.II), которые при $p^2, q^2, (p-q)^2 \to \infty$ стремятся к константам (и могут компенсировать $\left(\frac{!!}{!!}\right)$), не дают вклада в $\{I\}$. Поэтому, если мы удержим в квадратной скобке (и тем самым в (22)) только такие члены, то уравнение $\{I\} = 0$ примет простой вид

$$\mathcal{E}_q \frac{\partial}{\partial q_j} Z_{pq} \mathcal{D} + \mathcal{E}_p \frac{\partial}{\partial p_j} \mathcal{D} Z_{pq} - Z_{pq} \frac{p_j - q_j}{\omega(p-q)} = 0 .$$

Приведенные выше соображения указывают на то, что решения этого уравнения могут помочь исследованию вопроса о компенсации. Найдем их. Введем функции $\hat{Z}$, см. (2I). После этого уравнение еще более упростится:

$$\mathcal{E}_p \frac{\partial}{\partial p_j} \mathcal{D} \hat{Z}_{pq} + \mathcal{E}_q \frac{\partial}{\partial q_j} \hat{Z}_{pq} \mathcal{D} = 0 , \quad j = 1, 2, 3. \qquad (4.\text{I}4)$$

Как было установлено в разделе 3 (приложение I), $\hat{Z}_{pq}$ зависит только от p^2, q^2 и $(\vec{p}\vec{q})$. Введем вместо производных $\hat{Z}$ по p_j и q_j производные по переменным $\mathcal{E}_p = \sqrt{p^2+m^2}$, $\mathcal{E}_q = \sqrt{q^2+m^2}$ и $t = (\vec{p}-\vec{q})^2$. Получим уравнения

$$p_j \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_p} \mathcal{D}\hat{Z} + q_j \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_q} \hat{Z}\mathcal{D} + 2(p_j - q_j)\left(\mathcal{E}_p \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D}\hat{Z} - \mathcal{E}_q \frac{\partial}{\partial t} \hat{Z}\mathcal{D}\right) = 0. \qquad (4.\text{I}5)$$

Это векторное уравнение вида $X_j = 0$, $j = 1,2,3$, причем вектор $\vec{X}$ лежит в плоскости векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$. Поэтому три уравнения $\vec{X} = 0$ равносильны двум: проекциям $\vec{X} = 0$ на вектор $\vec{p}$ и на $\vec{q}$. Умножим X_j сначала на p_j, потом на q_j и просуммируем по j:

$$\begin{aligned} &p^2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_p} \mathcal{D}\hat{Z} + (\vec{p}\vec{q}) \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_q} \hat{Z}\mathcal{D} + 2[p^2 - (\vec{p}\vec{q})]\left[\mathcal{E}_p \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{D}\hat{Z} - \mathcal{E}_q \frac{\partial}{\partial t} \hat{Z}\mathcal{D}\right] = 0 \\ &(\vec{p}\vec{q}) \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_p} \mathcal{D}\hat{Z} + q^2 \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_q} \hat{Z}\mathcal{D} + 2[(\vec{p}\vec{q}) - q^2]\left[\mathcal{E}_p \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{D}\hat{Z} - \mathcal{E}_q \frac{\partial}{\partial t} \hat{Z}\mathcal{D}\right] = 0. \end{aligned} \qquad (4.\text{I}6)$$

Исключение $\mathcal{E}_p\, \partial\mathcal{D}\hat{Z}/\partial t - \mathcal{E}_q\, \partial\hat{Z}\mathcal{D}/\partial t$ из (4.I6) приводит к простому уравнению

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_p} \mathcal{D} \hat{Z} + \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_q} \hat{Z} \mathcal{D} = 0, \tag{4.17}$$

которое позволяет упростить и первое уравнение (4.16)

$$\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_p} \mathcal{D} \hat{Z} + 2\left(\mathcal{E}_p \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D} \hat{Z} - \mathcal{E}_q \frac{\partial}{\partial t} \hat{Z} \mathcal{D} \right) = 0. \tag{4.18}$$

Эти уравнения можно получить и другим путем. Надо ввести в (4.15) вместо q_j вектор $\rho_j = p^2 q_j - (\bar{p}\bar{q}) p_j$, ортогональный к p_j, и после этого приравнять отдельно нулю коэффициенты при векторах p_j и ρ_j.

(4.17) есть система четырех незацепляющихся уравнений в частных производных. Методом характеристик находим, что общее решение уравнения с номером 1,1 есть произвольная функция от t и $x \equiv \mathcal{E}_p - \mathcal{E}_q$. Подставляя $\hat{Z}_{11}(t, x)$ в уравнение 1.1 системы (4.18), получаем уравнение $\partial \hat{Z}_{11}/\partial x + 2x\, \partial \hat{Z}_{11}/\partial t = 0$. Его общее решение есть произвольная функция от лоренцевского инварианта $x^2 - t = (\mathcal{E}_p - \mathcal{E}_q)^2 - (\bar{p} - \bar{q})^2$. В качестве аргумента можно взять и комбинацию $(\bar{p}-\bar{q})^2 + \mu^2 - (\mathcal{E}_p - \mathcal{E}_q)^2 = \omega^2(\bar{p}-\bar{q}) - (\mathcal{E}_p - \mathcal{E}_q)^2$. Она оказывается более удобной (будучи равной произведению выражений $\omega - \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_q$ и $\omega + \mathcal{E}_p - \mathcal{E}_q$, фигурирующих в формулах (21)). Остальные уравнения решаются так же.

Приложение 5. Свойства выражений $\omega^2(p-q) - (\mathcal{E}_p \mp \mathcal{E}_q)^2$

а) $\omega^2(\bar{p}-\bar{q}) - (\mathcal{E}_p - \mathcal{E}_q)^2$ можно переписать как

$$\mu^2 + 2\left\{ \left[\sqrt{p^2+m^2}\sqrt{q^2+m^2} - (pq + m^2) \right] + \left[pq - (\bar{p}\bar{q}) \right] \right\}. \tag{5.1}$$

Поскольку $\sqrt{p^2+m^2}\sqrt{q^2+m^2} \geq pq + m^2$ и $pq \geq (\bar{p}\bar{q})$, то $\omega^2 - (\mathcal{E}_p - \mathcal{E}_q)^2 \geq \mu^2$, знак равенства достигается при $\vec{q} = \vec{p}$.

Пусть $\vec{p}$ фиксировано. Найдем поверхности уровня функции $\omega^2-(\varepsilon_p-\varepsilon_q)^2$, т.е. те значения $\vec{q}$, при которых $\omega^2-(\varepsilon_p-\varepsilon_q)^2$ имеет фиксированное значение μ^2+u^2. Изолируя корни и возводя в квадрат, можно преобразовать соотношение "$u^2/2$ = фигурной скобке в (5.I)" к виду:

$$(p^2+m^2)q_\perp^2+m^2\left\{q_z-p\left[2\left(\frac{u}{2m}\right)^2+1\right]\right\}^2=(p^2+m^2)u^2\left[\left(\frac{u}{2m}\right)^2+1\right]. \quad (5.2)$$

Введены цилиндрические переменные для $\vec{q}$, $q^2=q_\perp^2+q_z^2$; ось $z\parallel\vec{p}$. (5.2) есть эллипсоид вращения с центром в точке $q_{\perp 0}=0$, $q_{z0}=p\left[2(u/2m)^2+1\right]$. Посмотрим, каковы его параметры при тех u^2 и p, которые нам будут встречаться. Комбинация μ^2+u^2 есть аргумент функции $\hat{Z}_{\shortparallel}$, убывающей при $u^2\to\infty$. Эффективная область ее сосредоточения в конечном счете должна определяться параметрами теории m^2, μ^2, λ, но не переменными p и q, потому что $\hat{Z}_{\shortparallel}$ не зависит от p и q в отдельности, но только от их комбинации u^2. Рассматривая асимптотику $p^2\to\infty$, можно считать, что эффективные u^2 много меньше p^2. Рассмотрим такую область значений u^2 : $m^2\ll u^2\ll p^2$. Тогда эллипсоид сильно вытянут вдоль оси $z\parallel\vec{p}$: его большая полуось равна $a_z=2p(u/2m)\gg p$, а малая $a_\perp\cong u(u/2m)$, так что $a_\perp\ll a_z$. Сравнивая a_z с q_{z0}, видим, что $a_z\cong q_{z0}$. Если $u^2<2m(p-m)$, то все же $q_{z0}>a_z$ — эллипсоид немного не доходит до начала координат. Можно считать, что так будет при всех существенных u^2 : p всегда можно считать столь большим, что $u^2<2mp$.

Сейчас мы рассмотрели $\omega^2-(\varepsilon_p-\varepsilon_q)^2$ как функцию $\vec{q}$ при фиксированном $\vec{p}$. В интегралах уравнения (22) встречается и случай фиксированного $(\vec{p}-\vec{q})$.

в) $\omega^2(2\varkappa)-[\varepsilon(t+\varkappa)-\varepsilon(t-\varkappa)]^2$, $\varkappa$ фиксировано. Это выражение можно представить как

$$\mu^2+2\left\{\left[(t^2-\varkappa^2+m^2)^2+4\varkappa^2m^2+4\left(t^2\varkappa^2-(\vec t\vec\varkappa)^2\right)\right]^{1/2}-(t^2-\varkappa^2+m^2)\right\} \quad (5.3)$$

Можно показать, что $0<\{\ \}\leq 2\varkappa^2$. К нулю фигурная скобка стремится при $t\to\infty$ и $\vec t\parallel\vec\varkappa$. Наибольшее значение достигается при $\vec t\perp\vec\varkappa$. Поверхность уровня $2\{\ \}=u^2$ в цилиндрической системе координат для t с осью $z\parallel\vec\varkappa$ имеет вид

$$u^2t_z^2-(4\varkappa^2-u^2)\,t_\perp^2=(4\varkappa^2-u^2)\left(\frac{u^2}{4}+m^2\right). \quad (5.4)$$

Это гиперболоид вращения (напомним, что $u^2=2\{\ \}\leq 4\varkappa^2$). Как и в случае а) рассмотрим область $m^2\ll u^2\ll\varkappa^2$. Тогда $a_z\cong\varkappa$, $a_\perp\cong u/2$: полости гиперболоида сильно вытянуты вдоль оси z . Вершины его лежат приблизительно в точках $\pm\varkappa$ на оси $z\parallel\vec\varkappa$.

c) $(\varepsilon_p+\varepsilon_q)^2-\omega^2(\vec p-\vec q)$ можно расписать как

$$4m^2-\mu^2+2\left\{\left[\sqrt{p^2+m^2}\sqrt{q^2+m^2}-(pq+m^2)\right]+\left[pq+(\vec p\vec q)\right]\right\}. \quad (5.5)$$

Как и в случае а),имеем $\{\ \}\geq 0$, но равенство нулю достигается при $\vec q=-\vec p$. Поверхность уровня является симметричным отражением эллипсоида (5.2) относительно начала координат (уравнение поверхности отличается от (5.2) только заменой знака (–) в фигурной скобке на знак (+)).

d) $\left[\varepsilon(t+\varkappa)+\varepsilon(t-\varkappa)\right]^2-\omega^2(2\varkappa)$ можно преобразовать в

$$4m^2-\mu^2+2\left\{\left[(\varkappa^2-t^2+m^2)^2+4t^2m^2+4\left(t^2\varkappa^2-(\vec t\vec\varkappa)^2\right)\right]^{1/2}-(\varkappa^2-t^2+m^2)\right\}. \quad (5.6)$$

Можно показать, что $0\leq\{\ \}<\infty$ (нуль достигается при $t=0$). Поверхности уровня $2\{\ \}=u^2$ суть эллипсоиды вращения с центром в начале координат с осью $z\parallel\vec\varkappa$. При $m^2\ll u^2\ll\varkappa^2$ полуоси такие: $a_z\cong\varkappa$, $a_\perp\cong u/2$, так что эллипсоиды сильно вытянуты вдоль оси z .

Приложение 6. Вычисление интегралов $t, \tau; d, v$ и оценка $\int d^3t\, W_{mn}$.

Считаем, что аргументом $\hat{Z}_{11} = \hat{Z}_{22}$ является $[\omega^2(p-q)-(\mathcal{E}_p-\mathcal{E}_q)^2]/\mu^2$, а аргументом $\hat{Z}_{12}$ и $\hat{Z}_{21}$ служит $[(\mathcal{E}_p+\mathcal{E}_q)^2-\omega^2(p-q)]/(4m^2-\mu^2)$.

Интегралы t и τ.

Введем в (18) вместо $\vec{n}$ переменную интегрирования $\vec{q}=\vec{n}+\vec{k}/2$. Тогда $\vec{n}=\vec{q}-\vec{k}/2$, $\vec{n}+\vec{k}=\vec{q}+\vec{k}/2$. Подинтегральные выражения зависят только от $k^2, (\vec{q}\cdot\vec{k}), q^2$. Поэтому ось z для переменной интегрирования q можно направить параллельно $\vec{k}$. Выбираем цилиндрическую систему координат для $\vec{q}$. Подинтегральные функции не зависят от угла φ, но только от q_z и $q_\perp$. Вместо q_z и $q_\perp$ можно ввести переменные

$$\mathcal{E}_{q+k/2}=\sqrt{q_z^2+q_\perp^2+k^2/4+q_z k+m^2}\,;\quad \mathcal{E}_{q-k/2}=\sqrt{q_z^2+q_\perp^2+k^2/4-q_z k+m^2}. \tag{6.1}$$

Более удобными оказываются переменные

$$S=\mathcal{E}_{q+k/2}+\mathcal{E}_{q-k/2}\,,\qquad r=\mathcal{E}_{q+k/2}-\mathcal{E}_{q-k/2}\,. \tag{6.2}$$

Можно показать, что $S\geq S_{min}=\sqrt{k^2+4m^2}$ и что $-|\vec{k}|<r<+|\vec{k}|$. Обратное выражение $q_\perp$ и q_z через S и r имеет вид

$$q_z=Sr/2k\,;\quad q_\perp=\frac{1}{2k}\sqrt{(S^2-k^2)(k^2-r^2)-4m^2k^2}\,, \tag{6.3}$$

а модуль якобиана преобразования от q_z, $q_\perp$ к S, r равен $\mathcal{E}_{q+k/2}\,\mathcal{E}_{q-k/2}/2kq_\perp$, так что

$$d^3q=dq_z\,q_\perp dq_\perp\,d\varphi=\mathcal{E}_{q+k/2}\,\mathcal{E}_{q-k/2}\,(2k)^{-1}dr\,ds\,d\varphi.$$

Ввиду этого подинтегральные выражения (18) и (24) сильно упрощаются. Например,

$$t(k)=-\lambda^2\frac{\pi}{k}\iint dr\,ds\left[\frac{\hat{Z}_{21}(s^2-\omega^2/4m^2-\mu^2)}{s+\omega(k)}+\frac{\hat{Z}_{12}(s^2-\omega^2/4m^2-\mu^2)}{s-\omega(k)}\right]. \tag{6.4}$$

К тому же оказывается, что область интегрирования по r и S описывается относительно просто. В переменных q_z и $q_\perp$ ею была полуплоскость $q_\perp \geqslant 0$ с границей $q_\perp = 0$. Из(6.3) следует, что уравнение линии $q_\perp = 0$ в новых переменных имеет вид

$$(S^2-\kappa^2)(\kappa^2-r^2) = 4m^2\kappa^2 \quad \text{или} \quad S = \kappa\sqrt{1+\frac{4m^2}{\kappa^2-r^2}}\,. \tag{6.5}$$

См. рис. I. Напоминаем, что $S>0$ и $-\kappa<r<+\kappa$.

Разобьём (6.4) на два интеграла: $t(\kappa) = A + B$

$$A = -\lambda^2\frac{\pi}{\kappa}\iint dr\,ds\,\hat{Z}_{12}\frac{2s}{s^2-\omega^2}\,; \qquad B = -\lambda^2\frac{\pi}{\kappa}\iint dr\,ds\,\frac{\hat{Z}_{21}-\hat{Z}_{12}}{s+\omega(\kappa)}\,. \tag{6.6}$$

Введем переменную $x = (s^2-\omega^2(\kappa))/(4m^2-\mu^2)$ вместо S. Уравнение нижней границы интегрирования приобретает вид:

$x_н = (1+\xi\rho^2)/(1-\rho^2)$, $\xi \equiv \mu^2/(4m^2-\mu^2)$, $\rho = r/|\kappa|$.

Далее, поскольку подинтегральное выражение не зависит от r или ρ, то

$$\int_{-\kappa}^{\kappa}dr\int_{x_н}^{\infty}dx\ldots = 2\kappa\int_0^1 d\rho\int_{x_н}^{\infty}dx\ldots = 2\kappa\int_1^{\infty}dx\ldots\int_0^{\sqrt{(x-1)/(x+\xi)}}d\rho.$$

Поэтому для интегралов A и B из (6.6) получаются такие ответы:

$$A = -2\pi\lambda^2\int_1^{\infty}dx\,\frac{\hat{Z}_{12}(x)}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+\xi}} = const \tag{6.7}$$

$$B = -2\pi\lambda^2\int_1^{\infty}dx\,\frac{4m^2-\mu^2}{\sqrt{}\,(\sqrt{}+\omega(\kappa))}\left[\hat{Z}_{21}(x)-\hat{Z}_{12}(x)\right]\sqrt{\frac{x-1}{x+\xi}}\,. \tag{6.8}$$

В (6.8) $\sqrt{}$ обозначает $\sqrt{(4m^2-\mu^2)x+\omega^2(\kappa)}$. Интегралы по x сходятся, если функции $\hat{Z}_{12}(x)$ и $\hat{Z}_{21}(x)$ убывают надлежащим образом с ростом x . Эффективная область сосредоточения этих функций может зависеть только от параметров теории m , μ и λ , см. приложение 5. Ввиду такой ограниченности эффективных значений x

под интегралом, мы имеем: $\sqrt{} \to \omega(k)$ при $\omega(k) \to \infty$. Поэтому $B \sim 1/\omega^2(k)$ при $k \to \infty$.

Совершенно аналогично вычисляется интеграл (24)

$$\frac{\tau(k)}{\omega(k)} = \frac{4\pi\lambda^2}{4m^2-\mu^2}\int_1^\infty dx \left[\frac{Z_{12}(x)}{x}\right]^2 \sqrt{\frac{x-1}{x+\xi}} + O\left(\frac{1}{k^4}\right). \qquad (6.9)$$

Заметим, что первое из соотношений (I7) удовлетворяется, если $\hat{Z}_{12} = \hat{Z}_{21}$ (см. примечание на стр. I4). Тогда $B = 0$ и получаем

$$\mu_0^2 - \mu^2 = 8\pi\lambda^2 \int_1^\infty dx \; \frac{\hat{Z}_{12}(x)}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+\xi}}, \qquad (6.10)$$

Интегралы v и d

По аналогии с предыдущим вычислением после замены $t = q + p/2$, $t - p = q - p/2$ можно ввести новые переменные

$$s = \varepsilon(q+p/2) + \omega(q-p/2) \;; \quad r = \varepsilon(q+p/2) - \omega(q-p/2). \qquad (6.11)$$

Примем для простоты, что $\mu = m$, тогда $\omega(t) = \varepsilon(t)$ и (6.II) полностью совпадает с (6.2), только вместо параметра k теперь имеем параметр p.

Якобиан теперь равен $\varepsilon(q+p/2)\omega(q-p/2)/2pq_\perp$, а уравнение границы области интегрирования имеет вид $s_r = p\sqrt{1 + 4m^2/(p^2-r^2)}$.

Для $v(p)$ получаем интеграл

$$v(p) = \frac{\lambda^2\pi}{p}\int dr \int_{s_r}^\infty ds \left\{\left[\frac{\hat{Z}_{11}((s-\varepsilon_p)(\varepsilon_p-r)/m^2)}{s-\varepsilon_p}\right]^2 + \left[\frac{\hat{Z}_{21}((s+\varepsilon_p)(r+\varepsilon_p)/3m^2)}{s+\varepsilon_p}\right]^2\right\} =$$

$$= \frac{\lambda^2\pi}{p}\int_{-p}^{p} dr \frac{\varepsilon_p - r}{m^2}\int_{x_{rp}}^\infty dx \left[\frac{\hat{Z}_{11}(x)}{x}\right]^2 + \frac{\lambda^2\pi}{p}\int_{-p}^{p} dr \frac{r+\varepsilon_p}{3m^2}\int_{y_{rp}}^\infty dy \left[\frac{\hat{Z}_{21}(y)}{y}\right]^2. \qquad (6.12)$$

Сделаны замены переменных $x=(s-\mathcal{E}_p)(\mathcal{E}_p-r)/m^2$ и $y=(s+\mathcal{E}_p)(r+\mathcal{E}_p)/3m^2$. В принципе интеграл по r можно взять точно, поскольку от r зависят только $x_{гр}$ и $y_{гр}$, а их зависимость от r известна. Например,

$$x_{гр}=\left(p\sqrt{1-4m^2/p^2-r^2}-\mathcal{E}_p\right)(\mathcal{E}_p-r)/m^2.$$

Однако в отличие от случая интеграла (6.6) вид границы интегрирования $r_{гр}=f(x)$ оказывается очень сложным. Интеграл по r удалось вычислить приближенно, разбив интервал интегрирования на два подинтеграла, в каждом из которых $r_{гр}=f(x)$ можно приблизить простыми функциями. Результат вычислений имеет вид

$$\frac{v(p)}{\mathcal{E}(p)}=\frac{2\pi\lambda^2}{m^2}\int_1^\infty dx\left[\frac{\hat{Z}_{11}(x)}{x}\right]^2\int_{[x-\sqrt{(x+1)^2-4}]}^{1}d\rho\,(1-\rho)+O\left(\frac{1}{p^2}\right). \qquad (6.13)$$

Интеграл $d(p)$ вычисляется аналогично. Получаем

$$d(p)\cong-\pi\lambda^2\int_1^\infty dx\;\frac{\hat{Z}_{11}(x)}{x}\left[1-x+\sqrt{(x+1)^2-4}\right],\quad p\to\infty. \qquad (6.14)$$

Интегралы $\int d^3t\, W_{mn}$

Асимптотическое поведение вычисленных интегралов не зависело от конкретного поведения неизвестных функций Z. Не так обстоит дело с остальными интегралами. Их зависимость от p, q определяется конкретным видом $\hat{Z}_{mn}$ при больших значениях аргумента. Все они должны убывать при $p^2, q^2\to\infty$ при условии $\vec{q}\not\parallel\vec{p}$.

Рассмотрим, например, произведение $\hat{Z}_{11}(p,p+t)\,\hat{Z}_{22}(q+t,q)=\hat{Z}_{11}(p,p+t)\,\hat{Z}_{11}(q,q+t)$, содержащееся в $\int d^3t\, W_{11}$, см. (26) и формулы (2.10) из приложения 2. В приложении 5 было установлено, что функция $\hat{Z}_{11}(p,q)$ в основном сосредоточена внутри некоторого эллипсоида значений $\vec{q}$, вытянутого вдоль $\vec{p}$. У подинтегральной функции $\hat{Z}_{11}(p,p+t)$ переменным является не q а t: $q=p+t$ и $t=q-p$. Это значит, что $\hat{Z}_{11}(p,p+t)$ сосредоточена внутри эллипсоида, сдвинутого по сравнению с описанным в приложении 5 на вектор $(-\vec{p})$,(см. рис. 2). Аналогично, $\hat{z}_{11}(q,q+t)$ сосредоточена внутри эллипсоида, вытянутого вдоль $\vec{q}$, (рис. 2). Как видно, если $\vec{q}$ не параллельно $\vec{p}$, то функция $\hat{z}_{11}(p,p+t)$ сосредоточена в основном там, где мала функция $\hat{z}_{11}(q,q+t)$, и наоборот. До сих пор мы имели дело со случаями, когда под интегралом фигурировала либо одна функция $\hat{z}$ (интегралы t и d), либо квадрат одной функции. Во всех этих случаях для сколь угодно большого p (или k) можно указать такие значения переменной интегрирования, что аргумент неизвестной подинтегральной функции будет мал, а сама она не мала. В случае произведения $\hat{z}_{11}(p,p+t)\hat{z}_{11}(q,q+t)$, если мал аргумент $\hat{z}_{11}(p,p+t)$, то, как правило, велик аргумент $\hat{z}_{11}(q,q+t)$, и наоборот. Поэтому произведение убывает с ростом p^2, q^2 (при $\vec{q} \nparallel \vec{p}$) при всех значениях t , за исключением окрестности начала координат, объем которой не растет с ростом p^2, q^2 (поскольку малые полуоси эллипсоидов не зависят от q и p, см. приложение 5). В этих условиях интеграл $\int d^3t\; z_{11}(p,p+t)\,z_{11}(q,q+t)\,[\,\varepsilon(p+t)\,\omega(t)\,\varepsilon(q+t)]^{-1}$ должен убывать с ростом p^2 и q^2.

Рассмотрим еще произведение $\hat{z}_{11}(p,p+t)\hat{z}_{11}(p+t,q+t)$, встречающееся в Γ_{11} , см. (26) и (2.12). Где сосредоточена функция $\hat{z}_{11}(p+t,q+t)$? Введем новую переменную интегрирования $t'=t+(p+q)/2$ и обозначение $\vec{\varkappa}=(\vec{p}-\vec{q})/2$. Тогда $\hat{z}_{11}(p+t,q+t)=\hat{z}_{11}(t'+\varkappa,t'-\varkappa)$. Область, где невелико выражение $\omega^2(2\varkappa)-[\,\varepsilon(t'+\varkappa)-\varepsilon(t'-\varkappa)]^2$, описана в приложении 5. Это некоторый сильно вытянутый гиперболоид вращения с осью, параллельной $\vec{\varkappa}$ с центром в точке $t'=0$, т.е. точке $\vec{t}=-(\vec{p}+\vec{q})/2$ (см. рис. 3). Эллипсоид сосредоточения $\hat{z}_{11}(p,p+t)$, вытянутый вдоль, имеет заметное пересечение с полостями гиперболоида только при

$\vec{p}-\vec{q} \parallel \vec{p}$, т.е., опять-таки, при $\vec{q}$, параллельном или антипараллельном $\vec{p}$.

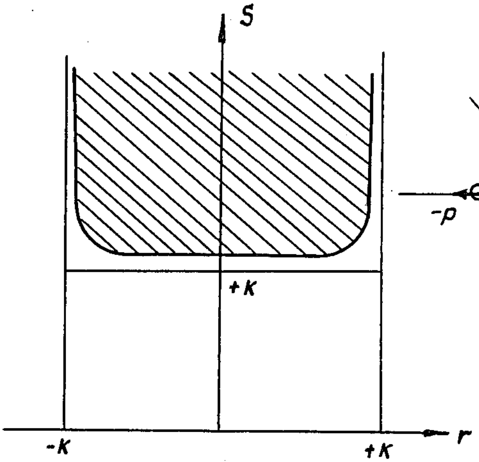

Рис. I

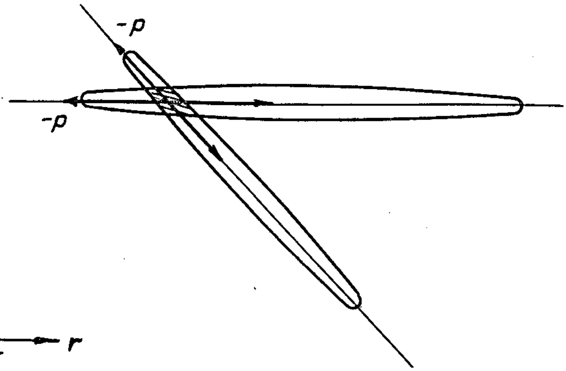

Рис. 2

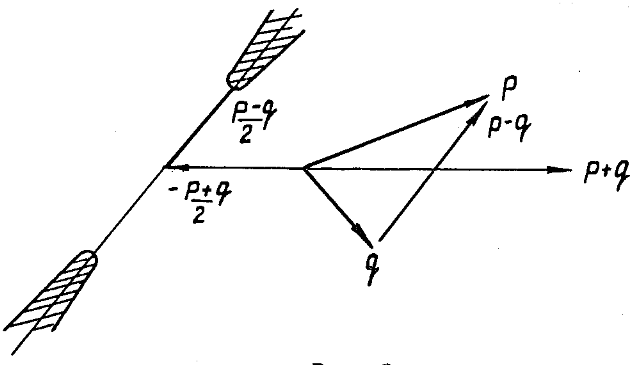

Рис. 3

Л и т е р а т у р а :

I. O.Greenberg, S.Schweber. Nuovo Cim., 8, 378 (1958)

2. С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИИЛ, Москва, 1963.

3. Л.Фаддеев.ДАН СССР 152, 573, 1963.

4. К.Фридрихс. Возмущение спектра операторов в гильбертовом пространстве, "Мир", Москва, 1969.

5. J.Glimm. Commun.Math.Phys. 1o, 1 (1968)

6. K.Hepp. Theorie de la renormalization, Lecture Notes in Physics, 2, Springer-Verlag, Berlin, 1969.

7. D.Fivel. Journ.Math.Phys. 11, 699, 197o.

8. Г.Вентцель. Введение в квантовую теорию волновых полей, ГИТТЛ, Москва, 1947.

9. J.Schwinger. Phys,Rev. 75, 651, 1949, sect.3.

10. H.S. Snyder. Phys.Rev. 78, 98 (1950).

11. А.И.Ахиезер, В.Б.Берестецкий. Квантовая электродинамика, Наука, Москва, 1969.

12. G.Baym. Phys.Rev. 117, 886 (196o)

13. А.Вайтман. Проблемы в релятивистской динамике квантовых полей. Наука, Москва, 1968.

14. И.Сигал. Математические проблемы релятивистской физики, "Мир", Москва, 1968 г.
R.Haag, D. Kastler. Journ.Math.Phys. 5, 848, 1964

15. T.L. Saaty. Modern Nonlinear Equations, McGraw Hill Book Co., New York, 1967.

16. Б.Гелбаум, Д.Олмстед. Контрпримеры в анализе. Мир, Москва, 1967 (гл. 4, пример 12).

17. G. Luders. Ann.of Phys. 2, 1, 1957.

G. Feinberg, S. Weinberg. Nuovo Cimento 14, 571, 1959

18. Г.Граверт, Г.Людерс, Г.Рольник, УФН, 71, 297, 1960.

19. J.Bell. Proc.Roy.Soc. A 231, 479, 1955.

П.Мэтьюс. Релятивистская квантовая теория взаимодействий элементарных частиц, ИИЛ, Москва, 1959.

С.Газиорович. Физика элементарных частиц, "Наука", Москва 1969 (стр. 44).

Рукопись поступила в издательский отдел
16 мая 1972 г.