СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 6442

С.В.Голоскоков

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ИЗУЧЕНИЕ РАССЕЯНИЯ НА БОЛЬШИЕ УГЛЫ В КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОДХОДЕ

1972

P2 - 6442

С.В.Голоскоков

ИЗУЧЕНИЕ
РАССЕЯНИЯ НА БОЛЬШИЕ УГЛЫ
В КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОДХОДЕ

При исследовании взаимодействия частиц при высоких энергиях применяются разнообразные методы.

В рамках квазипотенциального подхода Логунова-Тавхелидзе /1/ было изучено высокоэнергетическое рассеяние адронов на малые и большие углы на простейшем гладком потенциале гауссовского вида /2/.

Близкие результаты были получены на основе решения условия унитарности для амплитуды упругого рассеяния /3/.

В работах /4,5/ показывается, в частности, что в случае гладких квазипотенциалов фаза рассеяния правильно передается борновским приближением.

В ряде работ /6-9/ рассеяние на большие углы объясняется как квазиклассическое рассеяние в область классически запрещенных углов на гладком эффективном потенциале.

Настоящая работа посвящена исследованию квазиклассического приближения в квазипотенциальном подходе Логунова-Тавхелидзе с гладким комплексным квазипотенциалом.

Отметим, что проблема квазиклассического приближения в этом случае существенно отличается от соответствующего вопроса в квантовой механике. Локальный квазипотенциал, описывающий высокоэнергетическое рассеяние, содержит информацию о неупругих каналах и, таким образом, имеет сложную квантовую природу.

Поэтому вопрос о существовании и характере классического предела при $h \to 0$ является нетривиальным.

В первом параграфе работы получено квазиклассическое выражение для фазы рассеяния при высоких энергиях с поправками относительно порядка $1/E$ по сравнению с главными членами.

Во втором параграфе рассмотрено рассеяние в область больших углов при высоких энергиях для широкого класса гладких квазипотенциалов экспоненциального вида. Отдельно приведены результаты для гауссовского квазипотенциала. Далее мы предполагаем, что квазипотенциал $V(E, \hbar, r)$ может быть разложен по степеням малого безразмерного параметра $\hbar/E r_0$ (r_0 -радиус взаимодействия):

$$V(E,\hbar,r) = V_0(E,r) + \frac{\hbar}{iEr_0} V_1(E,r), \tag{1}$$

причем

$$\frac{V_0(E, r)}{V_1(E, r)}$$

медленно меняется при $E \to \infty$.

1. Фаза рассеяния при высоких энергиях в квазипотенциальном подходе

Квазипотенциальное уравнение для волновой функции, описывающей систему двух частиц равной массы, записывается в виде

$$(E^2 - m^2 - \hat{p}^2)\Phi(\vec{r}) = -\frac{1}{\sqrt{m^2 + \hat{p}^2}} V(E,\hbar,r)\Phi(\vec{r}), \tag{2}$$

здесь E -полная энергия частицы в системе ц.м.,

$$\hat{p} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}.$$

Представив Φ - функцию в виде разложения по парциальным волнам:

$$\Phi(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) P_e(\cos\theta) R_e(r) , \tag{3}$$

получим уравнение для радиальной части волновой функции:

$$(E^2 - f + \hbar^2 D_r^2) Re(r) = -\frac{1}{\sqrt{f - \hbar^2 D_r^2}} V(E,\hbar,r) R_e(r), \tag{4}$$

где $f = m^2 + \dfrac{\hbar^2 l\cdot(l+1)}{r^2} \approx m^2 + \dfrac{\nu^2}{r^2} \quad (\nu = \hbar(l+1/2))$

и $D_r^2 = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial^2}{\partial r^2} r$.

Разложим корень в правой части формулы (4) по степеням оператора D_r^2 :

$$\frac{1}{\sqrt{f - \hbar^2 D_r^2}} = \frac{1}{\sqrt{f}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{f^n} C_n (\hbar^2 D_r^2)^n , \tag{5}$$

и ищем $R_e(r)$ в виде

$$R_e(r) = \frac{\chi_e(r)}{r} .$$

Для $\chi_e(r)$ справедливо следующее уравнение:

$$(E - f + \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2}) \chi_e(r) = -\frac{1}{\sqrt{f}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n (-1)^n}{f^n} \hbar^{2n} (\frac{\partial^2}{\partial r^2})^n V(E,\hbar,r) \chi_e(r). \tag{6}$$

Сделаем в (6) подстановку

$$\chi_e(r) = e^{\frac{i}{\hbar}\sigma(r)} \tag{7}$$

и получим уравнение для σ –функции:

$$E^2 - f - \sigma'^2 - \frac{\hbar}{i}\sigma'' = -\frac{1}{\sqrt{f}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{f^n} (\sigma')^{2n} \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \frac{\partial^k V(E,\hbar,r)}{\partial r^k} \times$$

$$\times \left(\frac{\hbar}{i\sigma'}\right)^k \left[1 + \binom{2n-k}{2n-k-2} \frac{\hbar}{i} \frac{\sigma''}{\sigma'^2} + \ldots\right]. \tag{8}$$

Очевидно, что разложение, сделанное в правой части (8), возможно в случае выполнения неравенства

$$\hbar \left| \frac{\sigma''}{\sigma'^2} \right| \ll 1, \tag{9}$$

которое совпадает с условием применимости квазиклассического приближения в квантовой механике.

Из уравнения (8) следует, что $\sigma' \approx E$ при $E \to \infty$. Таким образом, в сумме $\sum\limits_{k=0}^{2n}$ в правой части (8) мы можем учесть только два первых члена. В результате имеем:

$$E^2 - f - \sigma'^2 - \frac{\hbar}{i}\sigma'' = -\frac{V(E,\hbar,r)}{\sqrt{f+\sigma'^2}} + \frac{\hbar}{i} \frac{V'(E,\hbar,r)\sigma'}{(f+\sigma'^2)^{3/2}} +$$

$$+ \frac{\hbar}{i} \frac{V(E,\hbar,r)\sigma''}{2} \left[\frac{1}{(f+\sigma'^2)^{3/2}} - \frac{3\sigma'^2}{(f+\sigma'^2)^{5/2}}\right] + \ldots \tag{10}$$

Полученное уравнение для σ – функции существенным образом отличается от соответствующего уравнения в квантовой механике, что связано с наличием операторного корня в квазипотенциальном уравнении. По аналогии с квантовой механикой будем искать σ в виде разложения по степеням $\hbar$:

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\hbar}{i}\sigma_1 + \dots , \qquad \hbar \left| \frac{\sigma_1}{\sigma_0} \right| \ll 1. \tag{11}$$

Легко видеть, что члены, содержащие $\hbar$, малы. Отбрасывая их, найдем следующее уравнение для σ_0:

$$E^2 - f - \sigma_0'^2 = - \frac{V_0(E,r)}{\sqrt{f + \sigma_0'^2}} . \tag{12}$$

Члены 1-го порядка по $\hbar$ дают:

$$2\sigma_1' + \frac{\sigma_0''}{\sigma_0'}\left[1 - \frac{V_0(E,r)}{2} \frac{d^2}{d\sigma_0'^2}\left(\frac{1}{\sqrt{f+\sigma_0'^2}}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{E r_0} \frac{V_1(E,r)}{\sqrt{f + \sigma_0'^2}} - \frac{V_0(E,r)\sigma_1'}{(f + \sigma_0'^2)^{3/2}} - \frac{V_0'(E,r)}{(f + \sigma_0')^{3/2}} . \tag{13}$$

Решение для σ -функции, полученное из (12) и (13), записывается следующим образом:

$$\frac{i}{\hbar}\sigma(r) = \frac{i}{\hbar}\int_{R_0}^{r} q(E,V_0)\,dr + \frac{1}{2E^2 r_0}\int_{R_0}^{r} \frac{V_1(E,r)\,dr}{q(E,V_0)} + \frac{3\nu^2}{4E^5}\int_{R_0}^{r}\frac{V_0(E,r)\,dr}{r^3}$$

$$+ \frac{1}{2E^3}\left(V_0(E,R_0) - V_0(E,r)\right) + \frac{1}{2}\ln c\, q(E,V_0) + 0\left(\frac{V_0}{E^4}\right), \tag{14}$$

где R_0 –точка поворота,

$$q(E,V_0) = \sqrt{E^2 - f + \frac{V_0(E,r)}{E} - \frac{V_0^2(E,r)}{2E^4}} .$$

Очевидно, что (14) несправедливо вблизи точки поворота. Для получения правильного выражения для фазы волновой функции необходимо сшить решения, найденные в разных областях: $r < R_0$ и $r > R_0$ (см., например, [12]).

В результате имеем:

$$\delta_e = \frac{1}{\hbar}\Big[\int\limits_{R_0}^{\infty}\Big(\sqrt{E^2 - f + \frac{V(E,\hbar,r)}{E} - \frac{V^2(E,\hbar,r)}{2E^4}} - p\Big)dr + \frac{\nu\pi}{2} - pR_0\Big] -$$

$$- \frac{3i\nu^2}{4E^4}\int\limits_{R_0}^{\infty}\frac{V(E,\hbar,r)dr}{r^3} - \frac{iV(E,\hbar,R_0)}{2E^3} + 0\Big(\frac{V}{E^4}\Big). \qquad (15)$$

Отметим, что в случае чисто мнимого квазипотенциала ($Jm\,V > 0$) поправочные члены в формуле (15) вещественны и положительны. Без учета полученных поправок квазипотенциальная фаза рассеяния совпадает с квантовомеханической в случае рассмотрения уравнения Шредингера с эффективным потенциалом:

$$\tilde{\tilde{V}}(E,\hbar,r) = \frac{V^2(E,\hbar,r)}{2E^4} - \frac{V(E,\hbar,r)}{E}. \qquad (16)$$

2. Рассеяние на большие углы при высоких энергиях

Амплитуда рассеяния на угол $\theta \neq 0$ записывается следующим образом:

$$T(E,\theta) = \frac{1}{2i\pi^2}\sum_{l=0}^{\infty}\Big(l + \frac{1}{2}\Big)P_e(\cos\theta)\,e^{2i\delta_e} \qquad (17)$$

(Нормировка совпадает с работами [2]).

В квазиклассическом приближении основной вклад в сумму дают члены с большими угловыми моментами. Поэтому, заменяя суммирование интегрированием и подставляя в (17) асимптотическое выражение для полиномов Лежандра при больших l, получим

$$T(E,\theta)=\frac{1}{2\pi^2\sqrt{2\pi\sin\theta}}\left[e^{-\frac{i\pi}{4}}\int_0^\infty dl\sqrt{\bar{l}}\,e^{iF_-(l)}+e^{\frac{i\pi}{4}}\int_0^\infty dl\sqrt{\bar{l}}\,e^{iF_+(l)}\right],\tag{18}$$

где $F_\pm(l)=2\delta_e\mp(l+\frac{1}{2})\theta$.

Вычислим интегралы методом стационарной фазы:

$$T(E,\theta)=\frac{1}{2\pi^2\sqrt{2\sin\theta}}\left[e^{iF_-(l_-)}\sqrt{\frac{\bar{l}_-}{\delta''_{e_-}}}-ie^{iF_+(l_+)}\sqrt{\frac{\bar{l}_+}{\delta''_{e_+}}}\right].\tag{19}$$

Точки стационарной фазы $l_\pm$ определяются из уравнений

$$\frac{d}{dl}[F_\pm(l)]=0.\tag{20}$$

Гладкий комплексный квазипотенциал $V(E,\hbar,r)$ выберем в виде

$$V(E,\hbar,r)=E^2 g\,U\left(\frac{r^2}{r_0^2}\right),\tag{21}$$

где $|\frac{g}{E}|\ll 1$ при $E\to\infty$, r_0 и g зависят от энергии и могут содержать $\hbar$. Учитывая только главные члены в выражении для фазы (15), перейдем к более удобным безразмерным переменным:

$$\frac{\hbar}{Er_0}\delta(\lambda)=\int_{x_0}^\infty\left(\sqrt{1-\frac{\lambda^2}{x^2}+f(E,x)}-1\right)dx-x_0+\frac{\lambda\pi}{2},\tag{22}$$

где

$$\lambda=\frac{\hbar(l+\frac{1}{2})\,7.}{E\,\lambda_0};\quad x=\frac{r}{r_0};\quad f(E,x)=\frac{g}{E}U(x^2)-\frac{1}{2}\left(\frac{g}{E}U(x^2)\right)^2.$$

Уравнения (20) в безразмерных переменных приобретают вид

$$\frac{d\,\delta(\lambda)}{d\lambda} = \mp \frac{E\, r_0\, \theta}{2\hbar}. \tag{23}$$

Таким образом, при $E \to \infty$ решение уравнения (23) находится либо в области больших $|\lambda|$, либо вблизи особенностей производной фазы.

Следовательно, для амплитуды рассеяния получаем:

$$T(E,\theta) = T_{ac}(E,\theta) + \Sigma\, T^{j}_{oc}(E,\theta), \tag{24}$$

где $T_{ac}(E,\theta)$ –вклад точки стационарной фазы с большими $|\lambda|$, $T^{j}_{oc}(E,\theta)$ – вклад j –й особенности производной фазы.

Сначала найдем $T_{ac}(E,\theta)$ для квазипотенциала экспоненциального вида:

$$U(x^2) = \phi(x^2)\, e^{-\psi(x^2)}, \tag{25}$$

причем функции $\phi(x^2)$ и $\psi(x^2)$ полиномиально ограничены.

Воспользуемся методом ВКБ в комплексной плоскости углового момента /6,13/. Вместо λ введем новую переменную ω :

$$\lambda = x_0 \cos\omega. \tag{26}$$

В точке x_0 получим:

$$\phi(x_0^2)\, e^{-\psi(x_0^2)} = \frac{E}{g} Y(\omega); \qquad Y(\omega) = \sqrt{1 + 2\sin^2\omega} + 1 \;{}^{*)}. \tag{27}$$

---

x/ На самом деле существует два решения для Y :

$$Y i(\omega) = 1 \pm \sqrt{1 + 2\sin^2\omega}.$$

Однако точка поворота, соответствующая рассеянию, должна иметь наибольший модуль. Поэтому выбираем знак (+).

Естественно искать решение уравнения (27) при больших x_0. Пусть при $x \to \infty$

$$\psi(x^2) \approx d x^{2\nu} .$$

Тогда

$$x_0 = (-1)^{\frac{1}{2}\nu} \left[\frac{1}{d} \ln\left(\frac{E}{g} Y(\omega)\right)\right]^{\frac{1}{2}\nu} \left(1 + 0\left(\frac{\ln \ln E}{\ln E}\right)\right), \tag{28}$$

или для λ :

$$\lambda \approx (-1)^{\frac{1}{2}\nu} \cos\omega \left[\frac{1}{d} \ln\left(\frac{E}{g} Y(\omega)\right)\right]^{\frac{1}{2}\nu} . \tag{28^1}$$

Корень в формуле (22) можно разложить по степеням $[f(E, x)]^n$ и, вычисляя интегралы методом перевала, получить разложение фазы по обратным степеням $\ln(E/g)$. Точно таким же образом можно вычислить ее первые производные по λ :

$$\frac{\hbar}{E r_0} \delta(\lambda) = \lambda\left[\omega - tg\,\omega + 0\left(\frac{1}{\ln(E/g)}\right)\right], \tag{29а}$$

$$\frac{\hbar}{E r_0} \delta'(\lambda) = \omega + 0(1/\ln(E/g)), \tag{29б}$$

$$\frac{\hbar}{E r} \delta''(\lambda) = \frac{-1}{\lambda\, tg\,\omega}\left[1 + 0\left(\frac{1}{\ln(E/g)}\right)\right]. \tag{29в}$$

Легко убедиться, что при следующем выборе ω

$$\omega = \mp \frac{\theta}{2} + 0(1/\ln(E/g)). \tag{30}$$

уравнение (23) удовлетворяется, а для $T_{ac}(E,\theta)$ справедливы выражения

$$T_{ac}(E,\theta)\approx\begin{cases} A_1(E,\theta)\, e^{-\frac{2Er_0}{\hbar}\sin\frac{\theta}{2}\max\{\sin\frac{\pi+2n\pi}{2\nu}\}\left[\frac{1}{d}\ln\left(\frac{E}{g}Y\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\right]^{1/2\nu}} & \left(\frac{1}{2\nu}\neq k\right), \quad (31а)\\ A_2(E,\theta)\, e^{-\frac{Er_0}{\hbar}k\pi\sin\frac{\theta}{2}\left[\frac{1}{d}\ln\left|\frac{E}{g}Y\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|\right]^{k-1}} & \left(\frac{1}{2\nu}=k\right). \quad (31б)\end{cases}$$

Найдем теперь вклад возможных особенностей производной фазы в комплексной области λ.

Пусть при $\lambda\approx ia_j$ фаза рассеяния имеет вид

$$\delta(\lambda)\approx\frac{igr_0}{\hbar}(\lambda^2+a_j^2)^r\ ;\quad r<1\,. \qquad (32)$$

Тогда для $T^j_{oc}(E,\theta)$ можно получить

$$T^j_{oc}(E,\theta)\approx B^j(E,\theta)\, e^{-Re(a_j)\frac{Er_0\theta}{\hbar}}\,. \qquad (33)$$

(Возможно, более правильным выражением является

$$T^j_{oc}(E,\theta)\approx B^j(E,\theta)\, e^{-Re(a_j)\frac{2Er_0}{\hbar}\sin\frac{\theta}{2}}\,). \qquad (33^1)$$

Очевидно, что при $E\to\infty$ вклад особенностей $T^j_{oc}(E,\theta)$ доминирует над $T_{ac}(E,\theta)$.

Для простейшего гладкого квазипотенциала гауссовского вида

$$U(x^2)=e^{-x^2} \qquad (34)$$

выпишем амплитуду $T_{ac}(E,\theta)$ с точностью до членов порядка $(\ln|\frac{E}{g}|)^{-2}$:

$$T_{ac}(E,\theta)=\frac{E r_0}{2\pi^2\hbar}\sqrt{ln\left|\frac{EY(\frac{\theta}{2})}{g}\right|}\; e^{-\frac{2Er_0}{\hbar}\sqrt{ln\left(\frac{EY(\frac{\theta}{2})}{g}\right)}\cdot\sin\frac{\theta}{2}\left[1+\frac{a}{2\,ln\left|\frac{EY(\frac{\theta}{2})}{g}\right|}\right]}, \tag{35}$$

где

$$a=\frac{1}{\sqrt{2}\sin\frac{\theta}{2}}\left[arc\sin\frac{1}{\sqrt{1+2\sin^2\frac{\theta}{2}}}-\frac{\pi}{2}\right]-1-ln\left[\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}+Y(\frac{\theta}{2})}{4\sin^2\frac{\theta}{2}}\right].$$

Отсюда найдем условия применимости формулы (35):

$$\theta \gg \left|\frac{g}{E}\right|, \qquad ln\left|\frac{E}{g}\right| \gg 1. \tag{36}$$

Можно убедиться, что амплитуда рассеяния на большие углы для гладкого квазипотенциала гауссовского вида, полученная в работе /2/, при $E\to\infty$ переходит в (35).

Результаты справедливы и для других частных видов квазипотенциала (1), которые рассматривались ранее /5,8/.

Найденные выражения для $T(s,t)$ ($s=4E^2$, $t=-4p^2\sin^2\frac{\theta}{2}$) при $s\to\infty$ и t/s –фиксировано могут быть представлены в виде

$$T(s,t)\approx e^{-c(s)\sqrt{|t|}},$$

где $c(s)$ –медленно меняющаяся функция.

Такое поведение амплитуды рассеяния (орировского типа /14/) согласуется с экспериментальными данными.

Таким образом, нами получены выражения для амплитуды рассеяния на большие углы при высоких энергиях для весьма широкого класса гладких комплексных квазипотенциалов.

Квазипотенциалы могут обладать особенностями в комплексной плоскости r^2, которые порождают особенности производной фазы в λ – плоскости. Отметим, что в этом случае основной вклад в амплитуду рассеяния при $E\to\infty$ дает ближайшая особенность, обладающая минимальной мнимой частью $Im\,\lambda$.

Полученные результаты могут быть использованы для теоретического и феноменологического исследования высокоэнергетического рассеяния частиц.

В заключение автор выражает глубокую благодарность В.А. Матвееву, А.Н. Тавхелидзе, Д.В. Ширкову, В.Г. Кадышевскому, О.А. Хрусталеву за полезные обсуждения и критические замечения, а также С.П. Кулешову, В.И. Саврину, Л.А. Слепченко, М.А. Смондыреву, А.Н. Сисакяну, Н.Е. Тюрину, В.Р. Гарсеванишвили за интересные дискуссии.

Литература

1. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380 (1963); A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, I.T.Todorov, O.A.Khrustalev. Nuovo Cim., 30, 134 (1963).

2. V.R.Garsevanishvili, V.A.Matveev, L.A.Slepchenko, A.N.Tavkhelidze. Phys.Rev., 4D, 849 (1971).

3. В.И. Саврин, О.А. Хрусталев. ЯФ, 8, 1016 (1968); В.И. Саврин, Н.Е. Тюрин, О.А. Хрусталев. ЯФ, 10, 859 (1969); ЯФ, 11, 880 (1970); ЯФ, 12, 1049 (1970).

4. R.F.Dashen. Nuovo Cim., 28, 229 (1963).

5. В.И. Саврин, Н.Е. Тюрин, О.А. Хрусталев. Препринт ИФВЭ СТФ-68-19-К, Серпухов (1968); ТМФ, 4, 322 (1970); O.A.Khrustalev,V.I.Savrin,N.E.Tyurin.JINR E2-4479, Dubna, 1969.
А.А. Архипов, В.И. Саврин, Н.Е. Тюрин. ЯФ, 14, 1066 (1971); А.А. Архипов. Препринт ИФВЭ СТФ-71-24, Серпухов, 1971.

6. Ю.Ф. Пирогов. ЖЭТФ, 55, 854 (1968).

7. A.A.Logunov, M.A.Mestvirishvili. Phys.Lett., 24B, 620 (1967).

8. М.А. Мествиришвили, Г.Л. Рчеулишвили. ТМФ, 8, 206 (1971).

9. В.Н. Первушин. ОИЯИ, Р2-5990, Дубна, 1971.

10. S.P.Alliluyev, S.S.Gershtein, A.A.Logunov. Phys.Lett., 18, 195 (1965).

11. А.А. Логунов, О.А. Хрусталев. ЭЧАЯ, т. 1, в.1, стр. 72, Атомиздат, Москва, 1970; B.M.Barbashov, S.P.Kuleshov, V.A.Matveev, A.N.Sissakian, A.N.Tavkhelidze. Phys.Lett., 33B, 419 (1970).

12. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика, Наука, М., 1963.

13. Дж. Хединг. Введение в метод фазовых интегралов. Мир., 1965.
14. I.Orear. Phys.Lett., 13, 190 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
5 мая 1972 года.