СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 6393

М.К. Волков

УНИТАРНОСТЬ S -МАТРИЦЫ В ТЕОРИЯХ С НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ЛАГРАНЖИАНАМИ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

P2 - 6393

М.К. Волков

УНИТАРНОСТЬ S -МАТРИЦЫ В ТЕОРИЯХ С НЕПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ ЛАГРАНЖИАНАМИ

Волков М.К. P2 - 6393

Унитарность S -матрицы в теориях с неполиномиальными лагранжианами

Доказана унитарность S -матрицы в третьем порядке теории возмущений по G в неполиномиальных теориях. Выяснена роль аномальных особенностей. Рассмотрена также амплитуда рассеяния в четвертом порядке по G .

Сообщение Объединенного института ядерных исследований
Дубна, 1972

Volkov M.K. P2 - 6393

S -Matrix Unitarity in Theories with Nonpolynomial Lagrangians

Unitarity of S matrix in the third order of perturbation theory in G in nonpolynomial theories is proved. The role of anomalous singularities is cleared up. The scattering amplitude in the fourth order in G is also considered.

Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1972

§1. Введение

При изучении теорий поля с неполиномиальными лагранжианами проблема доказательства унитарности S -матрицы в высших порядках теории возмущений по главной константе связи G представляет собой весьма сложную и чрезвычайно важную задачу. Один из способов решения этой проблемы связан с использованием правила Куткосского для нахождения абсорбтивных частей амплитуд рассеяния в высших порядках теории возмущений[1,2]. Такой подход к доказательству унитарности S -матрицы в теориях с неполиномиальными лагранжианами был предложен Г.В. Ефимовым, который доказал выполнение правил Куткосского в рамках предложенного им метода[3].

Другое решение этой проблемы было предложено в наших работах[4-6]. Оно основано на использовании полученного нами спектрального представления для суперпропагаторов безмассовых частиц[4,5,7]. Это представление позволяет любую амплитуду, соответствующую диаграмме, состоящей из суперпропагаторов, записать в форме некоторого интеграла от амплитуды, соответствующей диаграмме, состоящей из обычных пропагаторов свободных частиц. Тем самым проблема унитарности S -матрицы в неполиномиальных теориях сводится к аналогичной проблеме в обычных полиномиальных теориях. Это представление позволяет нам, в частности, использовать правило Куткосского для нахождения абсорбтивных частей амплитуд, соответствующих диаграммам, состоящим из суперпропагаторов.

В работах[4-6] рассматривалась теория возмущений по главной константе связи не выше третьего порядка по G. Поскольку в последнее время наблюдается некоторое увеличение интереса к упомянутым проблемам со стороны ряда авторов[8-10], нам кажется целесообразным подробнее остановиться на исследовании этих вопросов, в частности, выяснить роль аномальных особенностей при выводе условий унитарности S -матрицы и попытаться рассмотреть высшие, по сравнению с третьим, порядки теории возмущений. Решению указанных здесь вопросов и посвящена настоящая работа.

§2. Унитарность S -матрицы в третьем порядке теории возмущений по G

Рассмотрим неполиномиальный лагранжиан скалярного безмассового поля $\phi(x)$ самого общего вида

$$L_{\text{вз}}(x) = G \sum_{0}^{\infty} \frac{U(n)}{n!} :\phi^n(x): \tag{1}$$

($U(0) = U(1) = U(2) = 0$). Для двухточечных функций Грина - суперпропагаторов, возникающих в теориях поля с такими лагранжианами, можно написать следующие интегральные представления в импульсном пространстве[x]

$$F(p) = \lim_{\gamma\to 1} F_\gamma(p) =$$

$$= \lim_{\gamma\to 1} \frac{1}{2i} \int_{-a-i\infty}^{-a+i\infty} dz\, ctg\,\pi z\; e^{-i\pi z} \frac{\Gamma(1-\gamma z) C(z+1)}{\Gamma(1+z)(4\pi)^{2z}} (p^2 + i\epsilon)^{z-1} = \tag{2а}$$

$$(1 > a > 0)$$

$$= -\frac{C(1)}{p^2+i\epsilon} + \lim_{\gamma\to 1} \frac{i}{2\pi} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} dz\, \cos\pi z \frac{\Gamma(1-\gamma z) C(z+1)}{\Gamma(1+z)(4\pi)^{2z}} \int_0^\infty d\mu \frac{\mu^{2(z-1)}}{\mu^2 - p^2 - i\epsilon}. \tag{2б}$$

$$(0 < \beta < 1/\gamma)$$

---

[x] Одну неопределенную константу, которая имеется в представлениях (2а) и (2б), мы полагаем равной нулю, согласно "принципу минимальных сингулярностей" Лемана и Полмайера[11].

Здесь функция $C(z)$ в целочисленных точках на реальной положительной оси определенным образом выражается через коэффициенты $U(n)$ /6/. Если представление (2а) позволяет нам доказать конечность теории во всех порядках теории возмущений по G /4-6/, то с помощью представления (2б), которое мы будем называть спектральным представлением для суперпропагаторов, мы докажем здесь выполнение условия унитарности S-матрицы в 3-м порядке теории возмущений по G и выполнение правила Куткосского для нахождения абсорбтивной части амплитуды рассеяния, соответствующей фейнмановской диаграмме, составленной из суперпропагаторов.

Рассмотрим треугольную диаграмму с произвольными концами P_1, P_2 и P_3 и докажем, что абсорбтивная часть амплитуды, соответствующая этой диаграмме, равна выражению, которое можно получить, используя условие унитарности S-матрицы в 3-ем порядке теории возмущений. Выпишем это условие. S-матрицу можно представить в форме

$$S = 1 + \sum_1^{\infty} G^n S_n \, . \tag{3}$$

Тогда из условия унитарности $S S^+ = 1$ получаем

$$S_3 + S_3^+ = - S_1 S_2^+ - S_2 S_1^+ \, . \tag{4}$$

Абсорбтивная часть амплитуды, соответствующая треугольной диаграмме, равна матричному элементу от левой стороны равенства (4). Найдем ее и покажем, что она в точности равна подобному матричному элементу от правой стороны операторного равенства (4). Тем самым мы докажем выполнение условия унитарности S-матрицы в 3-м порядке по G.

Пусть с одной из вершин треугольной диаграммы, состоящей из суперпропагаторов, связано m_1 внешних линий с общим импульсом P_1, с другой вершиной – m_2 внешних линий с общим импульсом P_2. Положим, что все эти частицы налетают, а из третьей вершины вылетает m_3 частиц с общим импульсом P_3. Тогда такой диаграмме соответствует амплитуда

$$i < m_3 \mid S_3 \mid m_2\, m_1 > = > \prod_1^m \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_i^0}} \right) \sum_0^\infty \frac{U(m_1+n_2+n_3)\,U(m_2+n_1+n_3)\,U(m_3+n_1+n_2)}{n_1!\; n_2!\; n_3!} \times \tag{5}$$

$$\times \int d^4x_1\, d^4x_2\, d^4x_3\, e^{-i(P_1x_1+P_2x_2-P_3x_3)} [-i\Delta^c(x_1-x_2)]^{n_3} [-i\Delta^c(x_1-x_3)]^{n_2} [-i\Delta^c(x_2-x_3)]^{n_1}.$$

$$(m = m_1 + m_2 + m_3)$$

С помощью представления типа (2б) можно получить для амплитуды (5) в импульсном пространстве следующее выражение:

$$A = i\delta^{(4)} (\sum_{(m_1+m_2)} p_i - \sum_{(m_3)} p_k) \prod_1^m \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p_i^0}} \right) \lim_{\gamma\to 1} \prod_1^3 \Big\{ \frac{i}{2\pi} \int_{\beta_i - i\infty}^{\beta_i + i\infty} dz_i \cos\pi z_i \frac{(4\pi)^{-2z_i}\,\Gamma(1-\gamma_i z_i)}{\Gamma(1+z_i)\Gamma(2+z_i)} \times$$

$$\times \int_0^\infty d\mu_i^2\, \mu_i^{2(z_i-1)} \Big\} U(m_1+z_2+z_3+2)\, U(m_2+z_3+z_1+2)\, U(m_3+z_1+z_2+2) \times \tag{6}$$

$$\times \int d^4q\, [(\mu_1^2 - (P_2+q)^2 - i\epsilon)(\mu_2^2 - (P_1-q)^2 - i\epsilon)(\mu_3^2 - q^2 - i\epsilon)]^{-1}.$$

Здесь для простоты отброшены члены, соответствующие значениям $n_i = 0,1$. (См. (5)). Поскольку интегралы по dz_i в (6) являются действительными, вклад в абсорбтивную часть нашей амплитуды может дать лишь реальная часть интеграла по d^4q, которая в области нормальных порогов распадается на три части[x/]

---

x/ Это легко доказать, выражая причинные функции, стоящие под интегралом по d^4q, через запаздывающие функции и $\Delta^{(+)}(p)$ /4-6/.

$$Re \int d^4q \, [\, (\mu_1^2 - (P_2 + q)^2 - i\epsilon)\, (\mu_2^2 - (P_1 - q)^2 - i\epsilon)\, (\mu_3^2 - q^2 - i\epsilon)\,]^{-1} =$$

$$= -2\pi^2 \int d^4q \, \{\, \theta(P_2^0 + q^0)\, \theta(P_1^0 - q^0)\, \delta(\mu_1^2 - (P_2 + q)^2)\, \delta(\mu_2^2 - (P_1 - q)^2)\, P \frac{1}{\mu_3^2 - q^2} +$$

$$+ \theta(q^0)\, \theta(P_1^0 - q^0)\, \delta(\mu_3^2 - q^2)\, \delta(\mu_2^2 - (P_1 - q^2)\ )\, P \frac{1}{\mu_1^2 - (P_2 + q)^2} + \tag{7}$$

$$+ \theta(-q^0)\, \theta(P_2^0 + q^0)\, \delta(\mu_3^2 - q^2)\, \delta(\mu_1^2 - (P_2 + q^2)\ )\, P \frac{1}{\mu_2^2 - (P_1 - q)^2}.$$

P – знак главного значения знаменателя. Подставляя (7) в (6) и проводя интегрирование по двум массам μ_i^2 и соответствующим переменным z_i, получаем

$$2\, Im\, A = A_1 + A_2 + A_3 \ . \tag{8}$$

Три части, на которые распалась абсорбтивная часть амплитуды A, соответствуют тем трем частям, на которые распалась реальная часть от интеграла по d^4q (см. (7)). Выпишем выражение для A_1.

$$A_1 = -(2\pi)^2 \delta^{(4)}(P_1 + P_2 - P_3) \prod_1^m \left(\frac{1}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2p_i^0}} \right) \sum_2^\infty \sum_2^\infty \frac{U(m_3 + n_2 + n_1)}{n_1!\, n_2!} \lim_{\gamma \to 1} \frac{i}{2\pi} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} dz \frac{\cos\pi z\, \Gamma(1 - \gamma z)}{(4\pi)^{2z} \Gamma(1+z) \Gamma(2+z)} \times \tag{9}$$

$$\times \int_0^\infty d\mu^2 \mu^{2(z-1)} U(m_2 + n_1 + z + 1)\, U(m_1 + n_2 + z + 1) \int d^4q\, P \frac{\Omega_{n_1}(P_2 + q)\, \Omega_{n_2}(P_1 - q)}{\mu^2 - q^2}.$$

Здесь $\Omega_n(P)$ – фазовый объем n –скалярных безмассовых частиц. Подобные же выражения получаются для A_2 и A_3 . Эти абсорбтивные части амплитуды A соответствуют рассеченным диаграммам, изображенным на рис. 1. Рассеченным линиям в матричных элементах A_i соответствуют фазовые объемы частиц, пересекающих линию сечения, а нерассеченным линиям соответствует реальная часть суперпропагатора, соединяющего неразделенные вершины. Нетрудно видеть, что полученная нами абсорбтивная часть амплитуды A в точности равна той, которая получается после применения правила Куткосского к изучаемой нами диаграмме.

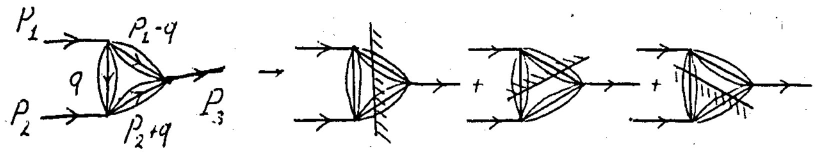

Рис.1.

Покажем теперь, что такое же выражение получается при вычислении матричного элемента от правой стороны операторного равенства (4). Начнем с вычисления матричного элемента

$$i\langle m_3 | S_1 S_2^+ | m_2 \; m_1 \rangle \qquad \text{x/}$$

$$i\langle m_3 | S_1 S_2^+ | m_2 m_1 \rangle = i\sum\int\frac{1}{k!}\langle m_3| S_1 | k\rangle\,[\langle m_1 m_2 | S_2 | k\rangle]^* =$$

$$=\frac{1}{2}\iiint d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 \sum_{n_1,n_2,n_3,m=0}^{\infty}\sum\sum\sum \frac{U(n_1)U(n_2)U(n_3)[i\Delta^{c*}(x_1-x_2)]^m}{(n_1-m)!(n_2-m)!\,n_3!\,m!}\sum\int\frac{1}{k!}\langle m_3| : \tag{10}$$

$$:\phi^{n_3}(x_3): |k\rangle\langle k| :\phi^{n_2-m}(x_2)\times\phi^{n_1-m}(x_1): |m_2\, m_1\rangle \; .$$

---

x/ Как и в формуле (5), мы будем из полного матричного элемента $i\langle m_3| S_1 S_2 \;| m_2\, m_1\rangle$ отбирать лишь ту часть, которая соответствует диаграмме с m_1 линиями, входящими в одну вершину, m_2 линиями, входящими в другую вершину, и m_3 – линиями, выходящими из третьей вершины. Матричные элементы, соответствующие таким диаграммам, удовлетворяют условиям унитарности S –матрицы независимо от матричных элементов, соответствующих остальным диаграммам, как мы увидим ниже.

Знак $\Sigma\int$ обозначает суммирование и интегрирование по промежуточным состояниям. С интересующей нас диаграммой связана следующая, не равная нулю, часть матричного элемента (10).

$$\bar{A}_1 = \prod_1^m \left(\frac{1}{(2\pi)^3(2p_i^0)}\right)^{1/2} \sum_{\ell,k,m=0}^{\infty} \frac{U(m_1+k+m)\,U(m_2+\ell+m)\,U(m_3+k+\ell)}{(2\pi)^{3(k+\ell)}\;k!\,\ell!\,m!} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 [i\Delta^{c*}(x_1-x_2)]^m \times$$

$$\times \exp i(P_3x_3 - P_1x_1 - P_2x_2) \prod_1^{k+\ell} \left\{\int \frac{d^3k_i}{2\omega_i}\right\} \exp i\left(x_1\sum_1^k k_i + x_2\sum_{k+1}^{k+\ell} k_i - x_3\sum_1^{k+\ell} k_i\right) \quad (11)$$

$$(\omega_i = k_i^0)$$

Для суммы по m опять можно использовать представление (2б)

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{U(m+k+m_1)\,U(m+\ell+m_2)}{m!} [i\Delta^{c*}(x_1-x_2)]^m = i(2\pi)^{-4}\int d^4q\; e^{iq(x_1-x_2)} \times \quad (12)$$

$$\times \lim_{\gamma\to 1} \frac{i}{2\pi} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} dz \frac{\cos\pi z\,\Gamma(1-\gamma z)}{(4\pi)^{2z}\Gamma(1+z)\,\Gamma(2+z)} U(z+k+m_1+1)\,U(z+\ell+m_2+1) \int_0^{\infty} \frac{d\mu^2\,\mu^{2(z-1)}}{\mu^2 - q^2 + i\epsilon}.$$

Подставляя (12) в (11) и интегрируя по d^4x_i, получаем

$$i(2\pi)^2\delta^{(4)}(P_3 - P_1 - P_2)\prod_1^m [(2\pi)^3 2p_i^0]^{-1/2} \sum_2^{\infty}\sum_2^{\infty} \frac{U(m_3+k+\ell)}{k!\,\ell!} \lim_{\gamma\to 1} \frac{i}{2\pi}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{dz}{(4\pi)^{2z}} \frac{\cos\pi z\,\Gamma(1-\gamma z)}{\Gamma(1+z)\Gamma(2+z)} \times$$

$$\times U(z+k+m_1+1)\,U(z+\ell+m_2+1)\int_0^{\infty} d\mu^2\,\mu^{2(z-1)} \int d^4q \frac{\Omega_k(P_1-q)\,\Omega_\ell(P_2+q)}{\mu^2 - q^2 + i\epsilon} \quad (13)$$

Здесь мы опять оставили лишь ту часть матричного элемента, в которой индексы ℓ , k и m не принимают значений 0 и 1. Сравнивая формулы (13) и (9), легко убедиться, что $A_1 = -Im\,\bar{A}_1$.

Подобным же образом можно убедиться, что из матричного элемента $i < m_3 \mid S_2 S_1^+ \mid m_2 m_1 >$ получаются функции $\bar{A}_2$ и $\bar{A}_3$, мнимые части которых в точности равны A_2 и A_3 (см. формулу (8)), а реальные части функций A_i взаимно сокращаются

$$Re\,\bar{A}_1 + Re\,\bar{A}_2 + Re\,\bar{A}_3 = 0\ . \tag{14}$$

Тем самым унитарность S -матрицы в третьем порядке теории возмущений по G доказана.

Заметим, что доказательство унитарности S -матрицы было проведено лишь с учётом нормальных порогов амплитуды рассеяния, соответствующей треугольной диаграмме с произвольными внешними линиями. Для полного доказательства унитарности S -матрицы в рассматриваемом порядке теории возмущений необходимо показать, что учёт аномальных особенностей не нарушает условия унитарности S -матрицы.

§3. Аномальные особенности

Поскольку в интегральном представлении (6), которое мы используем для вычисления амплитуды рассеяния частиц, содержатся интегралы по массам μ_1^2 , μ_2^2 и μ_3^2 , то очевидно, что при произвольных, но фиксированных внешних импульсах P_1 и P_2 имеется вполне определенная область в трехмерном пространстве масс μ_i^2 , в которой могут существовать аномальные особенности в амплитуде, соответствующей "элементарной" треугольной диаграмме. ("Элементарной" диаграммой мы будем называть диаграмму, состоящую из обычных пропагаторов свободных частиц с массами μ_i).

В этой области соотношение (7) не будет справедливо, и мнимая часть амплитуды, соответствующей "элементарной" треугольной диаграмме, будет равна совершенно иной функции /12,13/. На первый взгляд, это может привести к нарушению тех соотношений между матричными элементами, которые вытекают из условий унитарности S -матрицы (см. предыдущий параграф). Однако на самом деле этого не происходит, поскольку после интегрирования по массам μ_i^2 вклад от "аномальной" области оказывается равным нулю.

Действительно, область, где могут существовать аномальные особенности у "элементарной" амплитуды, представляет собой гладкую двумерную поверхность в трехмерном пространстве μ_1^2, μ_2^2 и μ_3^2. Эта поверхность задается уравнением[12]

$$1 + 2y_1 y_2 y_3 - y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 = 0 , \tag{15}$$

где

$$y_i = \frac{\mu_j^2 + \mu_k^2 - P_i^2}{2\mu_j \mu_k} . \tag{16}$$

Индексы i, j, k образуют циклическую перестановку из 1,2,3.

Поскольку мнимая часть "элементарной" амплитуды в области аномальных особенностей (15) является ограниченной функцией (см., например,[12,13]), а сама область имеет нулевую меру в трехмерном пространстве μ_1^2, μ_2^2, μ_3^2, то после интегрирования по массам вклад в абсорбтивную часть амплитуды от этой области равен нулю. Поэтому при нахождении абсорбтивной части амплитуды A следует учитывать вклады только от нормальных порогов, как это и было сделано в предыдущем параграфе.

Приведенные здесь рассуждения подтверждают законность использования правила Куткосского для нахождения абсорбтивной части амплитуды рассеяния, соответствующей диаграмме, состоящей из суперпропагаторов.

§4. Унитарность S -матрицы для амплитуды рассеяния в четвертом порядке теории возмущений по G

В четвертом порядке теории возмущений по G мы будем встречаться с амплитудами рассеяния, которые соответствуют диаграммам Фейнмана, состоящим из суперпропагаторов с одним, двумя и тремя независимыми циклами (и соответствующим количеством интегралов по виртуальным импульсам в амплитудах рассеяния). Что касается амплитуд рассеяния, соответствующих диаграммам с одним циклом, то для них столь же строго, как и в предыдущем параграфе, можно показать, что при проверке условия унитарности S -матрицы следует учитывать лишь вклады от нормальных порогов. Эта проблема значительно усложняется при рассмотрении амплитуд рассеяния, соответствующих диаграммам с несколькими циклами. Мы будем предполагать, что и в таких амплитудах следует учитывать вклады в абсорбтивную часть только от нормальных порогов. В рамках таких предположений мы докажем унитарность S -матрицы для амплитуды рассеяния в четвертом порядке по G .

Рассмотрим амплитуду рассеяния, соответствующую диаграмме, изображенной на рис. 2, и докажем унитарность S -матрицы в s -канале для такой амплитуды рассеяния. Доказательство унитарности S матрицы мы проведем тем же способом, который был изложен в книге И.Т. Тодорова для случая простой четырехугольной диаграммы[13].

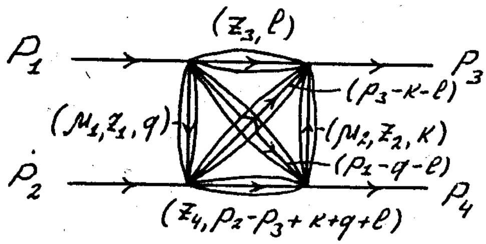

Рис. 2.

Для нахождения абсорбтивной части нашей амплитуды рассеяния используем правило Куткосского [1,2,13], предварительно выразив с помощью представления типа (2б) полную амплитуду рассеяния через "элементарную" амплитуду.

Затем та же абсорбтивная часть будет найдена из матричного элемента $i < 34 \mid S_2 S_2^+ \mid 12 >$ и будет показана тождественность этих двух выражений. Тем самым будет доказана и унитарность S -матрицы для рассматриваемой амплитуды.

Амплитуду рассеяния, соответствующую диаграмме, изображенной на рис. 2, можно записать следующим образом:

$$A_{<34|S_4|12>} = -i \frac{\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_3-p_4)}{4(2\pi)^6 \sqrt{p_1^0 p_2^0 p_3^0 p_4^0}} \lim_{\gamma\to 1} \prod_1^6 \Big\{ \frac{i}{2\pi} \int\limits_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} dz_i \frac{\cos\pi z_i \,\Gamma(1-\gamma_i z_i)}{(4\pi)^{2z_i}\Gamma(1+z_i)\Gamma(2+z_i)} \int\limits_0^\infty d\mu_i^2 \mu_i^{2(z_i-1)} \Big\} \times$$

$$\times\, U(4+z_1+z_3+z_5)\, U(4+z_1+z_4+z_6)\, U(4+z_2+z_3+z_6)\, U(4+z_2+z_4+z_5) \times \qquad (17)$$

$$\times \int d^4k\, d^4\ell\, d^4q \,[\,(\mu_1^2-q^2-i\epsilon)(\mu_2^2-k^2-i\epsilon)(\mu_3^2-\ell^2-i\epsilon)(\mu_4^2-(p_2-p_3+q+k+\ell)^2-i\epsilon) \times$$

$$\times (\mu_5^2-(p_1-q-\ell)^2-i\epsilon)(\mu_6^2-(p_3-\ell-k)^2-i\epsilon)\,]^{-1} + A_2(s) = A_1(s) + A_2(s)\,.$$

Функция $A_2(s)$ соответствует той части амплитуды рассеяния, в которой на месте одного или нескольких интегралов по $d\mu_i^2$ и dz_i стоят просто безмассовые свободные пропагаторы с соответствующими импульсами (см. (2б)). Заметим, что реальные части A_1 и A_2 нельзя вычислять независимо друг от друга, так как по отдельности они расходятся, но в сумме A_1+A_2 эти расходимости компенсируются. Однако в мнимых частях A_1 и A_2 расходимостей нет и их можно вычислять независимо.

Чтобы найти абсорбтивную часть интересующей нас амплитуды в области $s = (p_1+p_2)^2 > 0$, используем правило Куткосского:

$$2\,Im A_1 = -\frac{\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_3-p_4)}{4(2\pi)^2\sqrt{p_1^0p_2^0p_3^0p_4^0}}\lim_{\gamma\to 1}\prod_1^6\left\{\frac{i}{2\pi}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{dz_i}{(4\pi)^{2z_i}}\frac{\cos\pi z_i\,\Gamma(1-\gamma_i z_i)}{\Gamma(1+z_i)\,\Gamma(2+z_i)}\int_0^\infty d\mu_i^2\,\mu_i^{2(z_i-1)}\right\}\times$$

$$\times U(4+z_1+z_3+z_5)\,U(4+z_1+z_4+z_6)\,U(4+z_2+z_3+z_6)\,U(4+z_2+z_4+z_5)\times$$

$$\times\int d^4x\, d^4\ell\, d^4q\; P\;\frac{\theta(\ell^0)\,\theta(p_3^0-\ell^0-k^0)\,\theta(p_1^0-q^0-\ell^0)\,\theta(p_2^0-p_3^0+q^0+\ell^0+k^0)}{(\mu_1^2-q^2)\;(\mu_2^2-k^2)}\times \tag{18}$$

$$\times\delta(\mu_3^2-\ell^2)\;\delta(\mu_6^2-(p_3-\ell-k)^2)\;\delta(\mu_5^2-(p_1-q-\ell)^2)\delta(\mu_4^2-(p_2-p_3+q+\ell+k)^2).$$

Здесь четыре пропагатора с массами μ_3, μ_4, μ_5 и μ_6 под интегралами по промежуточным импульсам заменены соответствующими выражениями $2\pi\,\theta(k_i^0)\,\delta(\mu_i^2-k_i^2)$, как это следует из правила Куткосского. Интегрируя по $d\mu_i^2$ и dz_i с индексами i =3,4,5 и 6, получаем

$$2\,Im A_1 = -\frac{\delta^{(4)}(p_1+p_2-p_3-p_4)}{4(2\pi)^2\sqrt{p_1^0p_2^0p_3^0p_4^0}}\prod_3^6\left(\sum_2^\infty\frac{1}{n_j!}\right)\lim_{\gamma\to 1}\prod_1^2\left\{\frac{i}{2\pi}\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty}\frac{dz_i}{(4\pi)^{2z_i}}\frac{\cos\pi z_i\,\Gamma(1-\gamma_i z_i)}{\Gamma(1+z_i)\,\Gamma(1+z_i)}\times\right.$$

$$\times\int_0^\infty d\mu_i^2\,\mu_i^{2(z_i-1)}\Big\}\,U(2+z_1+n_3+n_5)\,U(2+z_1+n_6+n_4)\,U(2+z_2+n_3+n_6)\,U(2+z_2+n_4+n_5)\times \tag{19}$$

$$\times\int d^4k\, d^4\ell\, d^4q\; P\;\frac{\Omega_{n_3}(\ell)\;\Omega_{n_4}(p_2-p_3+q+\ell+k)\,\Omega_{n_5}(p_1-q-\ell)\,\Omega_{n_6}(p_3-\ell-k)}{(\mu_1^2-q^2)\;(\mu_2^2-k^2)}.$$

$\Omega_n(k)$ – фазовый объем n –безмассовых частиц с общим импульсом k.

Теперь найдем эту же абсорбтивную часть из условия унитарности S –матрицы, которое в 4–ом порядке по G записывается в форме

$$S_4+S_4^+ = -S_2S_2^+ - S_1S_3^+ - S_3S_1^+ . \tag{20}$$

В рассматриваемом случае нас будет интересовать лишь вклад от матричного элемента $i < 34 \mid S_2^+ S_2 \mid 12 >$

$$i<34 \mid S_2^+ S_2 \mid 12 > = i \Sigma \int \frac{1}{k!} [< k \mid S_2 \mid 34 >]^* < k \mid S_2 \mid 12 > . \tag{21}$$

С диаграммой, изображенной на рис. 2, будет связана следующая часть матричного элемента (21).

$$\bar{A} = \frac{i}{4(2\pi)^6 \sqrt{p_1^0 p_2^0 p_3^0 p_4^0}} \sum_0^\infty \frac{U(1+m+r_1+r_2)U(1+m+r_3+r_4)U(1+\ell+r_1+r_3)U(1+\ell+r_2+r_4)}{r_1!\, r_2!\, r_3!\, r_4!\, m!\, \ell!} \times$$

$$\times \prod_1^r \left\{ \int \frac{d^3 k i}{(2\pi)^3 2\omega_1} \right\} \int d^4x_1 d^4x_2 d^4x_3 d^4x_4 [-i\Delta^c(x_1-x_2)]^m [i\Delta^{c*}(x_3-x_4)]^\ell \exp i[p_4x_4 + p_3 x_3 -$$

$$- p_2 x_2 - p_1 x_1 + (x_1 - x_3) \sum_1^{r_1} k_1 + (x_1 - x_4) \sum_{r_1+1}^{r_1+r_2} k_1 + (x_2 - x_3) \sum_{r_1+r_2+1}^{r_1+r_2+r_3} k_1 + (x_2 - x_4) \sum_{r-r_4+1}^{r} k_1] .$$

Используя для сумм по m и по ℓ представление типа (12), производя замену переменных

$$x_1' = x_1 - x_4, \quad x_2' = x_2 - x_4, \quad x_3' = x_3 - x_4, \quad x_4' = x_4 \tag{23}$$

и проводя интегрирование по этим новым переменным, мы приходим к следующему выражению для величины $\bar{A}_1$

$$\bar{A}_1 = i \frac{\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4)}{4(2\pi)^2 \sqrt{p_1^0 p_2^0 p_3^0 p_4^0}} \prod_1^4 \left\{ \sum_2^\infty \frac{1}{r_j!} \right\} \lim_{\gamma \to 1} \prod_1^2 \left\{ \frac{i}{2\pi} \int_{\beta - i\infty}^{\beta + i\infty} \frac{dz_l}{(4\pi)^{2z_l}} \frac{\cos\pi z_l \Gamma(1-\gamma_l z_l)}{\Gamma(1+z_l)\Gamma(2+z_l)} \times \right.$$

$$\left. \times \int_0^\infty d\mu_l^2 \mu_l^{2(z_l-1)} \right\} U(2+z_1+r_1+r_2) U(2+z_1+r_3+r_4) U(2+z_2+r_1+r_3) U(2+z_2+r_2+r_4) \times$$

$$\times \int d^4q\, d^4\ell\, d^4k \;\; P \;\frac{\Omega_{r_1}(\ell)\,\Omega_{r_2}(p_1-q-\ell)\,\Omega_{r_3}(p_3-k-\ell)\,\Omega_{r_4}(p_2-p_3+q+k+\ell)}{(\mu_1^2-q^2)\,(\mu_2^2-k^2)} \tag{24}$$

$\bar{A}_1$ отличается от $\bar{A}$ тем, что здесь опущены члены со значениями параметров r_i , m и ℓ , равными О и 1 . Сравнивая формулы (24) и (19), нетрудно видеть, что

$$2i\; Im\, A_1 = -\bar{A}_1 \;,$$

как это и должно следовать из условия унитарности S -матрицы (см. равенство (20)). Тем самым мы показали, что построенная по нашему методу амплитуда рассеяния и в четвертом порядке по G удовлетворяет условию унитарности S -матрицы.

Подобное же рассмотрение можно провести и в более высоких порядках теории возмущений по G .

§5. Заключение

Проведенные выше расчёты показывают, что с помощью спектрального представления для суперпропагаторов типа (2б) можно любую амплитуду рассеяния, соответствующую фейнмановской диаграмме, состоящей из суперпропагаторов, выразить интегральным образом через "элементарную" амплитуду рассеяния. Эта "элементарная" амплитуда рассеяния соответствует уже обычной фейнмановской диаграмме, состоящей из пропагаторов свободных скалярных частиц с различными массами. Тем самым проблема доказательства унитарности S -матрицы в неполиномиальных теориях поля сводится к аналогичной проблеме, имеющей место уже в обычной полиномиальной теории поля. Поскольку в полиномиальных теориях указанная проблема хорошо изучена и имеются достаточно тщательно разработанные методы для решения такого рода вопросов /1,2,13/, мы получаем возможность использовать их для неполиномиальных теорий, предварительно применяя представления типа (2б). Это прежде всего относится к использованию, например, такого приема, как нахождение абсорбтивных частей амплитуд рассеяния с помощью правила Куткосского.

Поскольку в используемых нами представлениях для амплитуд рассеяния содержатся интегралы по массам, то мы в "элементарных" амплитудах рассеяния встречаемся с областями, где могут существовать аномальные особенности. Однако вклад от этих особенностей в абсорбтивную часть полной амплитуды рассеяния после проведения всех интеграций по массам оказывается равным нулю. Это можно строго доказать для всех одноциклических диаграмм. Более сложная ситуация имеет место при наличии нескольких циклов в изучаемой диаграмме.

Окончательно резюмируя полученные здесь результаты, можно сказать следующее. Унитарность S -матрицы в неполиномиальных теориях можно считать полностью доказанной в третьем порядке теории возмущений по G. В более высоких порядках унитарные условия будут также выполняться, если при использовании представлений типа (2б) в "элементарных" амплитудах учитывать вклады в абсорбтивные части лишь от нормальных порогов.

В заключение автор выражает глубокую благодарность за полезные обсуждения Д.И. Блохинцеву, Б.Н. Валуеву, А.В. Ефремову, В.К. Мельникову, И.Т. Тодорову и А.Т. Филиппову.

Литература

1. R.E.Cutkosky. J.Math.Phys., 1, 429 (1960).
2. M.I.W.Bloxham, D.I.Olive, I.C.Polkinghorne. J.Math.Phys., 10, 494, 545, 553 (1969).
3. Г.В. Ефимов. ЯФ, 4, 432 (1966).
4. М.К. Волков. ЯФ, 7, 445 (1968).
5. M.K.Volkov. Commun.Math.Phys., 7, 289 (1968).
6. М.К. Волков. Препринт ОИЯИ, Р2-5998, Дубна, 1971.
7. M.K.Volkov. Ann.Phys. (N.Y.), 49, 202 (1968).
8. K.Pohlmeyer. Preprint, Princeton (1971).
9. M.Daniel and P.K.Mitter. Preprint, University of Maryland, N. 72-056, November, 1971.
10. I.G.Taylor. Preprint University of Southampton, April (1971).

11. H.Lehman and K.Pohlmeyer. Comm.Math.Phys., 20, 101 (1971).

12. Б.Н. Валуев. ЖЭТФ, 47, 649 (1964).

13. I.T.Todorov. Analytic Properties of Feynman Diagrams in Quantum Field Theory, Pergamon Press, Oxford-New York-Toronto, Sydney Braunschweig, 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел
17 апреля 1972 года