ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6384

Г.В.Ефимов, М.Л.Рутенберг

О ТЕОРЕМЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

P2 - 6384

Г.В.Ефимов, М.Л.Рутенберг

О ТЕОРЕМЕ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Направлено в ТМФ

§ I. Введение

За последние годы в связи с изучением киральных групп и связанных с ними неполиномиальных лагранжианов взаимодействия, а также с исследованиями, посвященными построению самосогласованной теории с нелинейными неполиномиальными лагранжианами взаимодействия, особую важность приобрела так называемая теорема эквивалентности. Содержание теоремы состоит в том, что лагранжианы, связанные друг с другом некоторым локальным преобразованием полевых переменных, приводят к одной и той же S-матрице. С физической точки зрения такая эквивалентность очевидна, поскольку полевые операторы являются ненаблюдаемыми величинами и, как следствие этого, физика системы не должна зависеть от того или иного выбора полевых координат. Математически же строгое доказательство теоремы - далеко не простая вещь и до сих пор не существует.

Эта теорема впервые была сформулирована в работах Чисхольма/I/ и Камефучи, О'Райферти, Салама/2/. Доказательства теоремы, данные в/I,2/, базировались на предположении, что в нашем распоряжении имеется хорошая теория, т.е. проблемы,связанные с неограниченностью полевых операторов, наличием ультрафиолетовых расходимостей, могут быть должным образом разрешены. Кроме того, в этих работах предполагается, что в исходной теории плотность лагранжиана взаимодействия не содержит членов, квадратично зависящих от производных по времени. Обобщение теоремы эквивалентности на этот случай дано в работе Брауна и Евлашева /3/. Однако и в этой работе авторы провели доказательство в рамках нерегуляризованной теории, хотя и указали на роль регуляризации при доказательстве теоремы эквивалентности.

Различные аспекты теоремы эквивалентности обсуждались в работах Полубаринова /4/, Салама и Страздис /5/, Кека и Тейлора /6/. В этих работах также не рассматривалась проблема регуляризации S-матрицы, возникающая при построении конечной теории.

Вообще говоря, формулировать теорему эквивалентности как некоторую математически строгую теорему в современной квантовой теории поля нельзя, поскольку до настоящего времени фактически не существует глубоко обоснованных методов построения конечных S-матриц для произвольных лагранжианов взаимодействия. Поэтому теорема эквивалентности на современном этапе должна рассматриваться скорее как дополнительное условие (как унитарность, причинность, градиентная инвариантность и т.п.), которому должны удовлетворять используемые методы построения конечной S-матрицы в случае произвольного лагранжиана взаимодействия.

Построение конечной S-матрицы в современной квантовой теории поля совершается в два этапа. Сначала вводится регуляризационная процедура, которая параметризует все расходящиеся интегралы в ряду теории возмущений, а затем указывается способ снятия регуляризации (введение контрчленов и т.д.), приводящий к S-матрице, конечной в каждом порядке теории возмущений.

Доопределение S-матрицы при помощи некоторой регуляризации вносит в теорию математический произвол, который ограничивается различными физическими требованиями, такими как унитарность, причинность, релятивистская и градиентная инвариантность и т.д. В классе так называемых неперенормируемых взаимодействий естественных физических условий недостаточно, чтобы полностью ликвидировать произвол при построении S-матрицы. Необходимо привлекать дополнительные математические и физические идеи, которые позволили бы ограничить этот произвол.

В настоящей работе будет рассмотрена теория однокомпонентного скалярного поля $\varphi(x)$ с произвольным лагранжианом взаимодействия. Будет указана определенная регуляризационная процедура, в рамках которой теорема эквивалентности будет справедлива для регуляризованных S-матриц. Заметим, что здесь мы с необходимостью сталкиваемся с проблемой построения теории с неперенормируемыми или неполиномиальными лагранжианами, которые возникают как в результате произвольной замены полевых переменных, так и в результате выбора лагранжиана взаимодействия. Существуют различные методы[7], которые приводят, вообще говоря, к различным S-матрицам для одного и того же неполиномиального лагранжиана взаимодействия. Проблемы, связанные с изучением этих конструктивных методов, непосредственно не связаны с доказательством теоремы эквивалентности, однако последняя налагает определенные ограничения на возможные методы построения конечной S-матрицы. Мы не будем подробно обсуждать вопросы, связанные со снятием регуляризации. В будущем необходимо исследовать, насколько имеющиеся методы[7] согласуются с требованиями теоремы эквивалентности.

§ 2. Постановка задачи

Мы будем рассматривать теорию однокомпонентного скалярного поля $\varphi(x)$. Пусть классическое поле $\varphi(x)$ описывается полным лагрнажианом

$$\mathcal{L}(\varphi) = \mathcal{L}_c(\varphi) + \mathcal{L}_I\left(\varphi, P_s(\partial)\varphi\right), \tag{2.I}$$

где

$$\mathcal{L}_c(\varphi) = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \varphi\, \partial_\mu \varphi - m^2 \varphi^2\right) = \frac{1}{2}\varphi\left(\Box - m^2\right)\varphi\,. \tag{2.2}$$

Предполагается, что лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_I$ зависит от поля $\varphi(x)$ и его производных вплоть до некоторого порядка s. Классические уравнения движения могут быть выписаны, согласно общей теореме Остроградского[8], однако этого мы здесь делать не будем.

В классической теории поля можно сделать замену переменных: перейти от описания нашей системы полем $\Psi(x)$ к описанию системы полем $\Psi(x)$ согласно локальному преобразованию (т.е. любому точечному преобразованию)

$$\Psi(x) = \Psi(x) + F\left(\Psi(x)\right). \tag{2.3}$$

На преобразования (2.3) налагаются условия:

I) для преобразования (2.3) существует обратное преобразование, т.е.

$$\Psi(x) = \Psi(x) + f\left(\Psi(x)\right), \tag{2.4}$$

где

$$f(u) + F(u+f(u)) = 0,$$

$$F(u) + f(u+F(u)) = 0; \tag{2.5}$$

2) функции $f(u)$ и $F(u)$ представимы в виде степенных рядов:

$$f(u) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n u^n, \quad F(u) = \sum_{n=2}^{\infty} F_n u^n,$$

3) при $u \to 0$

$$f(u) \sim O(u^2), \quad F(u) \sim O(u^2).$$

Полный лагранжиан системы, описываемой классическим полем $\Psi(x)$, запишется в виде

$$\mathcal{L}'(\Psi) = \mathcal{L}_0(\Psi) + \mathcal{L}'_I(\Psi, P_s(\partial)\Psi). \tag{2.6}$$

Здесь свободный лагранжиан $\mathcal{L}_0(\Psi)$ записывается в форме (2.2), а лагранжиан взаимодействия легко получается из (2.I), согласно замене (2.3), и равен

$$\mathcal{L}_I'(\Psi, P_s(\partial)\Psi) = F(\Psi)(\Box - m^2)\Psi +$$

$$+ \frac{1}{2} F(\Psi)(\Box - m^2) F(\Psi) +$$

$$+ \mathcal{L}_I(\Psi + F(\Psi), P(\partial)(\Psi + F(\Psi))) \,. \tag{2.7}$$

Классические системы, описываемые лагранжианами (2.I) и (2.6), полностью эквивалентны.

Наша задача состоит в том, чтобы построить квантовую теорию поля, соответствующую лагранжианам (2.I) и (2.6). Как мы это будем делать?

Прежде всего следует отметить, что каноническое квантование системы, описываемой лагранжианом с высшими производными, до сих пор является нерешенной проблемой (см., например[9]), и мы также не будем здесь заниматься её решением.

Мы будем исходить из аксиоматики S-матрицы Боголюбова и Ширкова[10]. Гильбертово пространство физических состояний $\mathcal{H}$ строится соответственно свободному лагранжиану поля $\mathcal{L}_0$. В нашем случае гильбертовы пространства физических состояний, соответствующих лагранжианам (2.I) и (2.6), совпадают согласно нашему выбору $\mathcal{L}_0(\varphi)$ и $\mathcal{L}_0(\Psi)$.

Мы также предполагаем, что состояние вакуума единственно.

Далее предполагается, что S-матрица всегда может быть разложена по нормальным произведениям полей $\varphi(x)$ и $\Psi(x)$, подчиняющимся свободным уравнениям

$$(\Box - m^2)\varphi(x) = 0, \quad (\Box - m^2)\Psi(x) = 0 \tag{2.8}$$

и составленным из операторов рождения и уничтожения рассматриваемых скалярных частиц, с помощью которых строятся физические состояния из гильбертового пространства $\mathcal{H}$.

Предполагается, что S-матрица существует и строится согласно принципу соответствия /10/, который гласит, что при бесконечно малой константе связи (т.е. константе, стоящей перед всем лагранжианом взаимодействия $\mathcal{L}_I$) она может быть записана в виде

$$S = 1 + i\int dx\, \mathcal{L}_I(x). \tag{2.9}$$

Однако это справедливо только в тех случаях, когда лагранжиан взаимодействия зависит линейно от производных поля. Наличие, например, в лагранжиане взаимодействия членов вида

$$\frac{1}{2} A(\varphi)\,\partial_\mu\varphi\,\partial_\mu\varphi$$

приводит к появлению в (2.9) дополнительного члена

$$i\,\delta^{(4)}(0)\log\sqrt{1+A(\varphi)}\,.. \tag{2.10}$$

Это следует из того факта, что S-матрица должна быть построена по гамильтониану взаимодействия, а не по лагранжиану, поскольку S-матрица формально является решением квантово-полевого уравнения Шредингера. Изучению механизмов возникновения дополнительных членов вида (2.10) посвящен ряд работ/3,12/. Иными словами, в представлении (2.9) должен стоять некоторый эффективный лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_I^{\ni\phi\phi}$, явный вид которого должен быть получен из условий канонического квантования.

Мы поступим иначе. Мы будем пользоваться принципом соответствия (2.9) и не будем учитывать члены вида (2.10), поскольку выражение $i\delta^{(4)}(0)$ не имеет математического смысла. Нами будет предложена такая регуляризационная процедура, в рамках которой такого типа члены просто не возникнут в теории.

Сделаем ещё одно замечание относительно дополнительного члена (2.10). Почему-то принято считать/3/, что "число" $i\delta^{(4)}(0)$-чисто мнимое, и это нарушает эрмитовость лагранжиана взаимодействия. Однако, если при построении S-матрицы по теории возмущений используется регуляризационная процедура, позволяющая переходить к евклидовой метрике (например, обычная регуляризация Паули-Вилларса /10/), тогда в рамках такой регуляризации "число" $i\delta^{(4)}(0)$

всегда вещественно.

Согласно результатам Боголюбова и Ширкова [10], S-матрицы, соответствующие лагранжианам (2.1) и (2.6), могут быть представлены в форме:

$$S = T\exp\left\{i\int dx\, \mathcal{L}_I(\varphi(x), P_s(\partial)\varphi(x))\right\},$$

$$S' = T\exp\left\{i\int dx\, \mathcal{L}'_I(\Psi(x), P_s(\partial)\Psi(x))\right\}. \tag{2.11}$$

Здесь знак T-упорядочивание понимается в смысле Вика [10], или операции T^* [11].

Переход к нормальному произведению операторов поля мы будем проводить согласно теореме Вика, записанной в функциональной форме:

$$S = \exp\left\{\frac{1}{2}\iint dx\,dy\, \mathcal{D}(x-y)\frac{\delta^2}{\delta\varphi(x)\,\delta\varphi(y)}\right\}\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{i\int dz\, \mathcal{L}_I(\varphi(z), P_s(\partial)\varphi(z))\right\} \tag{2.12}$$
$$S' = \exp\left\{\frac{1}{2}\iint dx\,dy\, \mathcal{D}(x-y)\frac{\delta^2}{\delta\Psi(x)\,\delta\Psi(y)}\right\}\cdot$$
$$\cdot\exp\left\{i\int dz\, \mathcal{L}'_I(\Psi(z), P_s(\partial)\Psi(z))\right\},$$

где

$$\mathcal{D}(x-y) = \langle T(\varphi(x)\varphi(y))\rangle_0 = \langle T(\Psi(x)\Psi(y))\rangle_0 = \frac{1}{(2\pi)^4 i}\int \frac{dk\, e^{ik(x-y)}}{m^2-k^2-i\varepsilon}. \tag{2.13}$$

В данном представлении S-матрица может рассматриваться как функционал от действительных полей $\varphi(x)$ и $\Psi(x)$ (не операторов), удовлетворяющих свободному уравнению (2.8).

Следует особо отметить, что представление S-матриц в (2.I2) через операторы в функциональных производных понимается нами только как удобная и компактная запись ряда теории возмущений, в каждом члене которого соответствующие функциональные производные хорошо определены.

Вообще говоря, S-матрица в (2.II) и (2.I2) соответствует неперенормируемой теории, поэтому выражения (2.II) и (2.I2), строго говоря, математического смысла не имеют. Согласно принятым в настоящее время правилам обращения с подобными выражениями, необходимо ввести некоторую процедуру регуляризации, которая придавала бы математический смысл оператору S. Затем нам следует показать, в каком смысле можно считать, что

$$S = S' \tag{2.I4}$$

при выполнении условий (2.8).

Наша идея состоит в том, чтобы найти такую регуляризационную процедуру $\mathcal{R}$, которая придала бы математический смысл выражениям (2.I2) и в рамках которой было бы справедливо равенство

$$\mathrm{reg}\, S = \mathrm{reg}\, S' \tag{2.I5}$$

при дополнительных условиях (2.8).

Окончательно схема доказательства теоремы эквивалентности может быть представлена следующим образом.

I. В классической теории поля рассматриваются два лагранжиана, $\mathcal{L}(\varphi)$ и $\mathcal{L}'(\Psi)$, связанные некоторым локальным преобразованием (2.3), т.е.

$$\mathcal{L}(\varphi) \xrightarrow{\varphi(x)=\Psi(x)+F(\Psi(x))} \mathcal{L}'(\Psi) .$$

2. В квантовой теории поля рассматриваются как бы две независимые теории, индуцируемые лагранжианами $\mathcal{L}(\varphi)$ и $\mathcal{L}'(\Psi)$. Рассмотрение условно можно разбить на следующие этапы:

(I) Лагранжианы разбиваются на часть, описывающую свободное поле, и часть, описывающую взаимодействие.

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_I \qquad \mathcal{L}'=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_I'$$

$$\mathcal{L}_0=\frac{1}{2}\varphi(\Box-m^2)\varphi \qquad \mathcal{L}_0'=\frac{1}{2}\Psi(\Box-m^2)\Psi$$

(2) Проводится квантование лагранжиана свободного поля $\mathcal{L}_0$, и строится гильбертово пространство физических состояний, соотствующее $\mathcal{L}_0$.

$$\mathcal{H} \qquad \mathcal{H}'$$

Согласно выбору $\mathcal{L}_0(\varphi)$ и $\mathcal{L}_0(\Psi)$ пространства $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}'$ совпадают.

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}'$$

(3) Строится S-матрица согласно принципу соответствия.

$$S=1+i\int dx\,\mathcal{L}_I(x) \qquad S'=1+i\int dx\,\mathcal{L}_I'(x)$$

(4) Вводится регуляризационная процедура $\mathcal{R}$, задающая S-матрицу в каждом порядке теории возмущений.

$$\mathrm{reg}\,S \qquad \mathrm{reg}\,S'$$

(5) Регуляризационная процедура $\mathcal{R}$ подбирается таким образом, чтобы $\qquad reg\, S = reg\, S'$

(6) Следующим этапом должна быть указана процедура снятия регуляризации и получения конечной S- матрицы. $\qquad S = S'$

§ 3. Регуляризационная процедура

Установим регуляризационную процедуру, в рамках которой S-матрицам в форме (2.I2) будет придан строгий математический смысл.

В ряду теории возмущений причинная функция будет регуляризована по Паули-Вилларсу с дополнительными условиями

$$\mathcal{D}_\Lambda(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4 i}\int dp\, e^{ip(x-y)}\, \tilde{\mathcal{D}}_\Lambda(p)\,, \tag{3.I}$$

$$\tilde{\mathcal{D}}_\Lambda(p) = \sum_{j=0}^{N_1} C_j \frac{1}{m^2\Lambda_j - p^2 - i\varepsilon}\,, \tag{3.2}$$

где число N_1 достаточно велико. $\Lambda_0 = 1$, $\Lambda_j\ (j=1,\dots N_1)$ - большие безразмерные параметры регуляризации; мы их выбираем в виде

$$\Lambda_j = \Lambda + \varepsilon_j\,, \qquad j = 1, \dots N_1\,,$$

где

$$\varepsilon_j \ll 1, \quad \Lambda \gg 1.$$

Коэффициенты $C_0 = 1$, C_j $(j=1, \dots N_1)$

удовлетворяют системе уравнений

$$1 + \sum_{j=1}^{N+S} C_j \Lambda_j^K = 0 \qquad (K = 0, 1, \dots N-2)$$

$$\sum_{j=1}^{N+S} C_j \Lambda_j^m \log \Lambda_j = 0 \qquad (m = 1, 2, \dots S+1) \qquad N_1 = N+S. \tag{3.3}$$

Напомним S -порядок производной в лагранжиане взаимодействий.

Благодаря уравнениям (3.3), регуляризованная причинная функция обладает следующими свойствами:

I. $$\widetilde{\mathcal{D}}_\Lambda(p) \sim \frac{1}{(p^2)^N} \quad \text{при} \quad p^2 \to \infty, \tag{3.4}$$

т.е. $\widetilde{\mathcal{D}}_\Lambda(p)$ может убывать как полином произвольной степени.

2. $$\mathcal{D}_\Lambda(x)\big|_{x=0} = 0 \quad \text{и} \quad \Box^m \mathcal{D}_\Lambda(x)\big|_{x=0} = 0 \quad (m = 1, \dots S). \tag{3.5}$$

Это условие приводит к тому, что при построении ряда теории возмущений для S-матрицы эквивалентны две формы выбора лагранжиана взаимодействия: в виде нормально-упорядоченных операторов полей и в виде обычного их произведения.

3. Обозначим

$$(\Box - m^2)\mathcal{D}_\Lambda(x) = i\delta_\Lambda^{(4)}(x). \tag{3.6}$$

При стремлении $\Lambda \to \infty$ функция $\delta_\Lambda^{(4)}(x)$ переходит в δ-функцию, т.е.

$$\lim_{\Lambda\to\infty} \int dx\, \delta_\Lambda^{(4)}(x) f(x) = f(0)$$

для любой непрерывной функции $f(x)$, которая достаточно быстро убывает на бесконечности.

Уравнения (3.3) приводят к тому, что

$$\delta_\Lambda^{(4)}(0) = 0. \qquad (3.7)$$

Это условие позволит устранить из ряда теории возмущений бессмысленные члены вида (2.I0).

4. Каждая причинная функция в ряду теории возмущений регуляризуется своим параметром Λ. Переход к пределу совершается по каждому такому параметру Λ независимо.

Тогда в рамках сформулированной регуляризационной процедуры регуляризованные S-матрицы (2.I2) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \mathrm{reg}\, S = \exp\left\{\frac{1}{2}\iint dx\,dy\,\mathcal{D}_\Lambda(x-y)\frac{\delta^2}{\delta\varphi(x)\,\delta\varphi(y)}\right\}\cdot \\ \cdot\exp\left\{i\int dx\,\mathcal{L}_I(\varphi(x), P_s(\partial)\varphi(x))\right\} \end{aligned} \qquad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{reg}\, S' = \exp\left\{\frac{1}{2}\iint dx\,dy\,\mathcal{D}_\Lambda(x-y)\frac{\delta^2}{\delta\Psi(x)\,\delta\Psi(y)}\right\}\cdot \\ \cdot\exp\left\{i\int dx\,\mathcal{L}_I'(\Psi(x), P(\partial)\Psi(x))\right\}. \end{aligned} \qquad (3.8б)$$

Подчеркнем, что формулы (3.8) нами понимаются только как удобная форма записи ряда теории возмущений.

Следует заметить, что в выражениях (3.8), кроме ультрафиолетовых расходимостей, содержатся ещё расходимости, связанные с перенормировкой массы и волновой функции физической частицы, т.е. с тем обстоятельством, что полевые функции в (3.8) удовлетворяют свободным уравнениям (2.8). Эффективно в ряду теории возмущений это приводит к расходимостям интегралов при больших x. В нашем формализме эти расходимости параметризуются параметром ε в (3.2), а из ряда теории возмущений они удаляются введением контрчленов вида

$$\delta m^2 :\varphi^2(x): + Z_2 :\varphi(x)(\Box - m^2)\varphi(x): ,$$

что приводит к соответствующей нормировке собственно энергетических частей в теории возмущений (см./10/).

Хотя регуляризованная таким способом S-матрица уже не содержит ультрафиолетовых расходимостей при конечных параметрах Λ, конечного предела при $\Lambda \to \infty$ не существует из-за неполиномиального характера лагранжиана взаимодействия и зависимости его от производных оператора поля. Поэтому нельзя говорить о строгом равенстве

$$\lim_{\Lambda \to \infty} \operatorname{reg} S = \lim_{\Lambda \to \infty} \operatorname{reg} S' \tag{3.9}$$

при выполнении условий (2.11).

Однако в выражении (3.8б) можно перейти к пределу $\Lambda \to \infty$ по некоторым параметрам регуляризации Λ и можно показать, что при таком частичном предельном переходе

$$\mathrm{reg}\, S = \mathrm{reg}\, S' . \tag{3.10}$$

Доказательством этого соотношения мы займемся в следующем параграфе.

§ 4. <u>Доказательство теоремы эквивалентности</u>

Рассмотрим выражение (3.8б). Перепишем его в виде

$$\mathrm{reg}\, S'' = \exp\Big\{ i\int dx \Big[\mathcal{L}_I\Big(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)} + F\Big(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\Big),\ P_S(\partial)\Big(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)} + F\Big(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\Big)\Big)\Big) +$$

$$+ \frac{\delta}{\delta\alpha(x)}(\Box - m^2)F\Big(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\Big) + \frac{1}{2}F\Big(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\Big)(\Box - m^2)F\Big(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\Big)\Big]\Big\} \cdot$$

$$\cdot \exp\Big\{ \int dx\, \alpha(x)\Psi(x) + \frac{1}{2}\iint dx\, dy\, \alpha(x)\mathcal{D}_\Lambda(x-y)\alpha(y) \Big\}\Big|_{\alpha=0} \cdot \tag{4.1}$$

Воспользуемся формулой

$$\exp\Big\{ i\int dx \frac{\delta}{\delta\alpha(x)}(\Box - m^2)F\Big(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\Big)\Big\} \cdot$$

$$\exp\Big\{ \int dx\, \alpha(x)\Psi(x) + \frac{1}{2}\iint dx\, dy\, \alpha(x)\mathcal{D}_\Lambda(x-y)\alpha(y)\Big\} = \tag{4.2}$$

$$\exp\Big\{ i\int dx\, \Psi(x)(\Box - m^2)F\Big(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\Big)\Big\} \cdot$$

$$\exp\Big\{ -\frac{i}{2}\iint dx\, dy\, \delta_\Lambda(x-y)F\Big(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\Big)(\Box_y - m^2)F\Big(\frac{\delta}{\delta\alpha(y)}\Big)\Big\}$$

$$\exp\Big\{ -\int dx\, dy\, \delta_\Lambda(x-y)F\Big(\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\alpha(x)}\Big)\alpha(y)\Big\} \exp\Big\{ \int dx\, \alpha(x)\Psi(x) + \frac{1}{2}\iint dx\, dy\, \alpha(x)\mathcal{D}^c_\Lambda(x-y)\alpha(y)\Big\}.$$

где, по определению,

$$\exp\left\{-\iint dx\,dy\,\delta_\Lambda(x-y)\,\overleftarrow{F\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\right)}\alpha(y)\right\}\overset{\mathcal{D}f}{=}$$

$$\overset{\mathcal{D}f}{=}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}\prod_{j=1}^{n}\left(\iint dx_j dy_j\,\delta_{\Lambda_j}(x_j-y_j)\right)\prod_{k=1}^{n}F\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x_k)}\right)\prod_{l=1}^{n}\alpha(y_l), \quad (4.3)$$

Воспользовавшись (4.2) и принимая во внимание, что $(\Box-m^2)\Psi(x)=0$, перепишем (4.I) :

$$\begin{aligned}
\mathrm{reg}\,S' = \exp\Big\{ & i\int dx\,\mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}+F\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\right), P_s(\partial)\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}+F\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\right)\right)\right)+\\
&+\frac{i}{2}\iint dx\,dy\left[\delta(x-y)-\delta_\Lambda(x-y)\right]F\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\right)(\Box_y-m^2)F\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(y)}\right)\Big\}\cdot\\
&\cdot\exp\left\{-\iint dx\,dy\,\delta_\Lambda(x-y)\,\overleftarrow{F\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\right)}\alpha(y)\right\}\cdot\\
&\exp\left\{\int dx\,\alpha(x)\Psi(x)+\frac{1}{2}\iint dx\,dy\,\alpha(x)\mathcal{D}_\Lambda(x-y)\alpha(y)\right\}\Big|_{\alpha=0}
\end{aligned} \quad (4.4)$$

Согласно свойству (4) введенной нами регуляризации получим:

$$\lim_{\Lambda\to\infty}\iint dx\,dy\left[\delta(x-y)-\delta_\Lambda(x-y)\right]F\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\right)(\Box_y-m^2)F\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(y)}\right)=0. \quad (4.5)$$

Далее выражение (4.4) можно переписать в форме:

$$\mathrm{reg}\,S'=\exp\left\{\frac{1}{2}\iint dx\,dy\,\mathcal{D}_\Lambda(x-y)\frac{\delta^2}{\delta\Psi(x)\,\delta\Psi(y)}\right\}\cdot$$

$$\exp\left\{i\int dx\,\mathcal{L}'_I\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}+F\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\right), P_s(\partial)\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}+F\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\right)\right)\right)\right\}.$$

$$\cdot \exp\left\{-\iint dx\,dy\,\delta_\Lambda(x-y)\,F\left(\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\alpha(x)}\right)\alpha(y)\right\}\exp\left\{\int dx\,\alpha(x)\Psi(x)\right\}\Big|_{\alpha=0}\cdot \tag{4.6}$$

Рассмотрим функционал

$$I_\Lambda[\alpha,\Psi] = \exp\left\{-\iint dx\,dy\,\delta_\Lambda(x-y)\,F\left(\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\alpha(x)}\right)\alpha(y)\right\}\exp\left\{\int dx\,\alpha(x)\Psi(x)\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\iint dx\,dy\,\delta_\Lambda(x-y)\,\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\Psi(x)}\,F(\Psi(y))\right\}\exp\left\{\int dx\,\alpha(x)\Psi(x)\right\}\cdot \tag{4.7}$$

Этот функционал удовлетворяет уравнению

$$\frac{\delta I_\Lambda}{\delta\alpha(x)} = \left[\Psi(x) - \int dy\,\delta_\Lambda(x-y)\,F\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(y)}\right)\right] I_\Lambda[\alpha,\Psi] \tag{4.8}$$

с начальным условием

$$I_\Lambda[c,\Psi] \equiv C_\Lambda[\Psi] = \exp\left\{-\iint dx\,dy\,\delta_\Lambda(x-y)\,\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\Psi(x)}\,F(\Psi(y))\right\}1\cdot \tag{4.9}$$

Будем искать решение уравнения (4.8) в виде

$$I_\Lambda[\alpha,\Psi] = C_\Lambda[\Psi]\exp\left\{\int dx\,\alpha(x)\,A_\Lambda(\Psi(x))\right\}\cdot \tag{4.10}$$

Подставляя (4.10) в (4.8), получим

$$A_\Lambda(\Psi(x)) = \Psi(x) - \int dy\,\delta_\Lambda(x-y)\,F(A_\Lambda(\Psi(y)))\cdot \tag{4.11}$$

Согласно свойству (4) нашей регуляризации, можно перейти к пределу $\Lambda\to\infty$ в каждом интеграле в (4.II). Тогда получим уравнение

$$A(\Psi)=\Psi-F(A(\Psi)), \tag{4.I2}$$

или

$$\Psi=A(\Psi)+F(A(\Psi)).$$

Решения уравнений (4.II) или (4.I2), удовлетворяющие условию $A(0)=0$, существуют и единственны. Формальные методы решения подобного типа уравнений развиты в работе /I3/. Решение уравнения (4.II), например, записывается в виде

$$A_\Lambda(\Psi(x))=\frac{1}{C_\Lambda[\Psi]}\exp\left\{-\iint dx\,dy\,\delta_\Lambda(x-y)\frac{\overleftarrow{\delta}}{\delta\Psi(x)}F(\Psi(y))\right\}\Psi(x). \tag{4.I3}$$

Решение уравнения (4.I2) может быть получено из (4.I3), если разложить экспоненту в (4.I3) в ряд и перейти к пределу согласно нашим правилам регуляризации.

Далее легко проверить, что в рамках нашей регуляризации $\lim\limits_{\Lambda\to\infty}C_\Lambda[\Psi]=1$. Действительно, имеем:

$$C_\Lambda[\Psi]=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-)^n}{n!}\prod_{j=1}^{n}\left\{\iint dx_j\,dy_j\,\delta_{\Lambda_j}(x_j-y_j)\right\}\prod_{k=1}^{n}\frac{\delta}{\delta\Psi(x_k)}\prod_{\ell=1}^{n}F(\Psi(x_\ell)). \tag{4.I4}$$

Если взять функциональные производные в (4.13) и воспользоваться условием независимого предельного перехода по Λ_j, это даст в каждом члене суммы множитель $\delta_\Lambda(0)$. Например, возможно появление такого выражения:

$$\lim_{\Lambda_1\to\infty}\lim_{\Lambda_2\to\infty}\iint dx\,dy\,\delta_{\Lambda_1}(x-y)\delta_{\Lambda_2}(x-y)F_1(\Psi(x))F_2(\Psi(y))=\lim_{\Lambda_2\to\infty}\delta_{\Lambda_2}(0)\int dx\,F_1(\Psi(x))F_2(\Psi(x))=0,$$

поскольку $\delta_\Lambda(0)=0$ согласно (3.7). Отсюда следует, что

$$\lim_{\Lambda\to\infty} C_\Lambda[\Psi]=1.$$

Таким образом, функционал I_Λ в пределе $\Lambda_j\to\infty$ может быть представлен в виде

$$I[\alpha,\Psi]=\lim_{\Lambda\to\infty} I_\Lambda[\alpha,\Psi]=\exp\left\{\int dx\,\alpha(x)A(\Psi(x))\right\}, \tag{4.15}$$

где $A(\Psi)$ является решением уравнения (4.12).

Вернёмся к (4.6). Используя (4.15) и воспользовавшись уравнением (4.12), получим:

$$\mathrm{reg}\,S'=\exp\left\{\frac{1}{2}\iint dx\,dy\,\mathcal{D}_\Lambda(x-y)\frac{\delta^2}{\delta\Psi(x)\,\delta\Psi(y)}\right\}\cdot$$

$$\cdot\exp\left\{i\int dx\,\mathcal{L}_I\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}+F\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\right),P_s(\partial)\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}+F\left(\frac{\delta}{\delta\alpha(x)}\right)\right)\right)\right\}\cdot$$

$$\exp\left\{\int dx\,\alpha(x)\,A(\Psi(x))\right\}\Big|_{\alpha=0}=$$

$$=\exp\left\{\frac{1}{2}\iint dx\,dy\,\mathcal{D}_\Lambda(x-y)\frac{\delta^2}{\delta\Psi(x)\,\delta\Psi(y)}\right\}\cdot$$

$$\cdot \exp\left\{ i\int dx\, \mathcal{L}_I\left[A(\Psi(x)) + F(A(\Psi(x))),\, P_s(\partial)(A(\Psi(x)) + F(A(\Psi(x))))\right]\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2}\iint dx\, dy\, \mathcal{D}_\Lambda(x-y)\frac{\delta^2}{\delta\Psi(x)\delta\Psi(y)}\right\}\cdot$$

$$\exp\left\{ i\int dx\, \mathcal{L}_I(\Psi(x), P_s(\partial)\Psi(x))\right\} = \tau e g\, S' ,$$

что и требовалось доказать.

Напомним ещё раз, что проведенные выкладки математически корректны только в рамках теории возмущений. Поэтому проведенное доказательство является доказательством теоремы эквивалентности в теории возмущений.

§ 5. Проблема снятия регуляризации

Построение конечной и унитарной S-матрицы, т.е. проблема снятия регуляризации в ряду теории возмущений, является задачей, которая лишь косвенно связана с теоремой эквивалентности. По существу (см./7/),построение конечной S-матрицы по неполиномиальному или неперенормируемому лагранжиану взаимодействия требует привлечения дополнительных постулатов математического характера.
В настоящее время задача фактически формулируется следующим образом: как неполиномиальному или просто неперенормируемому лагранжиану взаимодействия поставить в соответствие конечную S-матрицу, удовлетворяющую всем постулатам аксиоматики Боголюбова и Ширкова.

Требование теоремы эквивалентности означает, что конечные S-матрицы, построенные по двум лагранжианам взаимодействия, $\mathcal{L}_I$ и $\mathcal{L}_I'$, которые связаны друг с другом локальным преобразованием, должны совпадать. В настоящее время ещё трудно дать полную характеристику имеющимся методам в квантовой теории с неполиномиальными лагранжианами (см. /7/), необходимы дальнейшие исследования.

Нами показано, что теорема эквивалентности означает равенство регуляризованных определенным образом S-матриц, другими словами, лагранжианы взаимодействия, связанные локальными преобразованиями, приводят к набору одних и тех же диаграмм Фейнмана в ряду теории возмущений.

Поэтому , как нам кажется, при построении конечной S-матрицы следует исходить из "наиболее простого" лагранжиана взаимодействия. Слова "наиболее простой" лагранжиан должны пониматься в некотором заданном смысле. В этом пункте фактически вводится новый физический постулат.

Приведём пример. Возможно, что сложный лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_I(\varphi, P(\partial)\varphi)$ некоторым локальным преобразованием может быть сведён к обычному перенормируемому взаимодействию типа $\mathcal{L}_I' = h\varphi^4$ или $\mathcal{L}_I'' = g\varphi^3$.
Ясно, что принцип перенормируемости в данном случае выделяет единственным образом лагранжиан взаимодействия, и нам известно, как строить конечную S-матрицу.

Другой пример. Пусть $\mathcal{L}_I(\varphi, P_s(\partial)\varphi)$ содержит производные не выше второго порядка, т.е. $s=2$. Этот лагранжиан может быть записан в виде

$$\mathcal{L}_I(\varphi, P_2(\partial)\varphi) = \frac{1}{2} H(\varphi)\partial_\mu\varphi\,\partial_\mu\varphi + G(\varphi), \tag{5.1}$$

где $H(z)$ и $G(z)$ -рациональные функции своего аргумента z . Элементарными преобразованиями (5.I) можно переписать в виде

$$\mathcal{L}_I(\varphi, P_2(\partial)\varphi) = \varphi(\Box - m^2)F(\varphi) +$$

$$+ \frac{1}{2}F(\varphi)(\Box - m^2)F(\varphi) + G_1(\varphi). \tag{5.2}$$

Здесь $G_1(\varphi) = G(\varphi) + m^2\left[\varphi F(\varphi) + \frac{1}{2}F^2(\varphi)\right]$.

Функция $F(\varphi)$ определяется из уравнения

$$H(\varphi) = 2F'(\varphi) + \left[F'(\varphi)\right]^2$$

и равна

$$F(u) = \int_0^u dt\left(\sqrt{1+H(t)} - 1\right).$$

Представление $\mathcal{L}_I(\varphi, P_2(\partial)\varphi)$ в виде (5.2) позволяет нам сразу найти такое локальное преобразование

$$\Psi = \varphi + F(\varphi), \quad \varphi = \Psi + f(\Psi),$$

которое приводит к лагранжиану взаимодействия, который не зависит от производных

$$\mathcal{L}_I(\varphi, P_2(\partial)\varphi) \longrightarrow \mathcal{L}'_I(\Psi) =$$

$$= G(\Psi + f(\Psi)) - m^2\left[\Psi f(\Psi) + f^2(\Psi)\right]. \tag{5.3}$$

В данном случае "простота" лагранжиана (5.3) состоит в том, что он не зависит от производных и к нему можно применять те или иные методы (см.[7]).

Более сложные лагранжианы взаимодействия возникают в теории киральных симметрий и в квантовой теории гравитационного поля. Изучению этих теорий посвящен большой цикл работ А. Салама с сотрудниками[14]. Несмотря на известные успехи, эту работу ещё нельзя считать завершенной.

В заключение сформулируем, как мы понимаем процедуру построения конечной S -матрицы в случае достаточно сложных неполиномиальных и неперенормируемых лагранжианов взаимодействия. Условно эту процедуру можно разделить на следующие этапы (I). Задан некоторый лагранжиан, описывающий рассматриваемую физическую систему $\mathcal{L}=\mathcal{L}_0+\mathcal{L}_I$
(2). Рассматриваются всевозможные локальные преобразования полевых переменных, приводящие к набору лагранжианов взаимодействия $\mathcal{L}_I(F)$, где F - функция, определяющая локальное преобразование.
(3) В рамках нашей регуляризации

$$\mathrm{reg}\, S=\mathrm{reg}\, S_F \qquad \text{для любых } F.$$

(4) Необходимо указать некоторый $\mathcal{L}_I(F_0)$ с заданным F_0 , который является "наиболее простым" в некотором заданном смысле. В этом пункте вводится новый физический постулат

(5). По $\mathcal{L}_I(F_0)$ строится регуляризованная $reg\, S_{F_0}$ и вводится некоторый метод снятия регуляризации. Это означает введение нового математического постулата.

(6) Необходима проверка, насколько полученная конечная S - матрица удовлетворяет всем аксиомам квантовой теории поля.

В заключение авторы выражают благодарность В.А. Алебастрову, О.А. Могилевскому, В.И. Огиевецкому и А.С. Шварцу за полезные обсуждения.

Литература

I. J.S. R. Chisholm. Nucl.Phys., 26, 469, 1961.
2. S. Kamefuchi, L. O'Raifeartaigh, A. Salam, Nucl.Phys, 28, 529, 1961.
3. М.А. Браун, Ю.А. Евлашев. ТМФ, 6, 3I8, I97I.
4. И.В. Полубаринов. Препринт ОИЯИ, Р2-5266, I970.
5. A.Salam, J. Strathdee. Phys.Rev. 2D, No.12, 2869, 197o.
6. B.W. Keck, J.G. Taylor, J.Phys.A.: Gen.Phys. 4, 291, 1971.
7. G.V. Efimov, Preprint CERN-Geneva, TH-1o87, 1969.
A. Salam, ICTP Trieste preprint IC/7o/7.
М.К. Волков. ЭЧАЯ, том. 2, вып. I, стр. 33, I97I.
8. M. Ostrogradsky, Memoires de L'Academie des Sciences, T.6, c. 385 185o, St.Petersb.
(См. также Л.С. Полак. Вариационные принципы механики. Физматгиз, I960, М.).

9. A. Pais, G.E. Uhlenbeck, Phys.Rev., 79, 145, 1950.
H. Umezawa, Y. Takahashi, Prog.Theor.Phys.9,14,1953.
Prog.Theor.Phys.9,501,1953
Y.Katayama, Prog.Theor.Phys. 10, 31, 1953.
10. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, 1957.
11. Х. Умедзава. Квантовая теория поля. ИЛ, 1958.
12. D.G. Boulware. Ann.Phys.(N.Y.),56, 140, 1970.
J.Honerkamp, K. Meetz. Phys.Rev.,D3, 1986,1971.
J.M. Charap. Phys.Rev.,D3,1998,1971.
I.S. Gershtein, R.Jackiw, B.W.Lee, S.Weinberg. Phys.Rev.,D3, 2486, 1971.
K. Nishijima, T. Watanabe. University of Tokyo, report UT-115, UT-123.
13. M. Dubois-Violettte, Preprint C.N.R.S. Marseille-France. 69/p.25/1969.
14. C.J. Isham, A. Salam, J. Strathdee, ICTP Trieste. Preprints IC/70/131; IC/71/13; IC/71/14; Phys. Rev. D3, 1805, 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел
14 апреля 1972 г.