ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 6351

Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

КВАНТОВАНИЕ СПИНОРНОГО ПОЛЯ В СФЕРИЧЕСКОМ МИРЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

P2 - 6351

Н.А.Черников, Н.С.Шавохина

КВАНТОВАНИЕ СПИНОРНОГО ПОЛЯ В СФЕРИЧЕСКОМ МИРЕ

Направлено в ТМФ

В 1935 году с целью установления связи между физикой и математической теорией групп Дирак [1] изучал, к каким последствиям приводит замена мира Пуанкаре – Минковского миром де Ситтера. В этой работе он предложил замечательного вида спинорное уравнение для поведения электрона или позитрона в мире де Ситтера. Естественно, возникла задача квантования спинорного поля, подчиняющегося такому уравнению Дирака. Для сферического мира – одного из двух миров де Ситтера – эта задача поддается довольно простому решению. Способ квантования в таком случае указан в работах [2,3]. В работе [4] для уравнения Дирака в сферическом мире решена общая задача Коши, в результате чего получен в явном виде антикоммутатор спинорного поля.

Сферический мир де Ситтера интересен еще и тем, что изучение в нем явлений само собой приводит к особому методу изучения явлений в плоском мире Пуанкаре–Минковского. Изложение этого метода – метода инвариантного ящика – для квантовой теории спинорного поля начато в работе [3]. Прямым ее продолжением является настоящая работа.

Здесь уравнение Дирака в сферическом мире решается путем разделения переменных. Получаемый базис в пространстве решений в силу компактности сферического пространства оказывается счетным, что позволяет ввести счетную совокупность операторов рождения и уничтожения электронов и позитронов.

1. Исходные положения

1. Сферический мир представляется в виде однополостного гиперболоида $\eta_{ab}\, x^a x^b = (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + (x^4)^2 - (x^0)^2 = r^2$ в пятимерном плоском мире с метрикой $ds^2 = \eta_{ab}\, dx^a\, dx^b$.

2. Уравнение Дирака в сферическом мире имеет вид [1,2,3]

$$\hat{M}\psi = m\psi ,$$

где $m = \frac{mc}{\hbar} r$ – безразмерный параметр, составленный из массы электрона -позитрона m, радиуса мира r, скорости света c и постоянной Планка $\hbar$, ψ – спинор в базисе dx, $\hat{M}$ – оператор, равный

$$\hat{M} = -\frac{i}{2}\,[H^a H^b]\, m_{ab} + 2i .$$

В этом операторе m_{ab} – векторные поля Киллинга в сферическом мире

$$m_{ab} = x_a \frac{\partial}{\partial x^b} - x_b \frac{\partial}{\partial x^a} ,$$

H^a – матрицы, удовлетворяющие условиям

$$H^a H^b + H^b H^a = 2\eta^{ab} , \qquad iH^0 H^1 H^2 H^3 H^4 = 1 .$$

Квадратные скобки здесь и далее означают альтернированное произведение матриц. Явный вид и другие свойства этих матриц см. в работах [2,3,4].

3. Если спиноры u, v – подчиняются уравнению Дирака, Σ – полная пространственно-подобная гиперповерхность, разделяющая сферический мир на две части, то интеграл

$$(\bar{v}, u) = \frac{i}{r} \int \bar{v}\, X\, [d_1 X\; d_2 X\; d_3 X]\, u$$

не зависит от выбора Σ. В этом интеграле $\bar{v} = v^* H_0$, $X = x^a H_a$, $d_1 X = \dfrac{\partial X}{\partial q^1} dq^1, \dots,$ q^1, q^2, q^3 – параметры на гиперповерхности Σ.

Условия квантования выражаются через этот интеграл. В виде такого интеграла представляются и вторично квантованные операторы.

4. Все компоненты спинорного поля ψ антикоммутируют друг с другом. Равным образом, антикоммутируют друг с другом и все компоненты спинорного поля $\bar{\psi} = \psi^* H_0$. Антикоммутатор $\{V^*, U\} = V^* U + U V^*$ двух операторов вида $V^* = (\bar{v}, \psi)$, $U = (\bar{\psi}, u)$, где v, u – неквантованные спинорные поля, подчиненные уравнению Дирака, равняется

$$\{V^*, U\} = (\bar{v}, u).$$

5. Линейному оператору $\hat{K}$, действующему в пространстве решений уравнения Дирака, соответствует вторично квантованный оператор

$$\hat{\mathcal{K}} = (\psi, \hat{K}\psi).$$

Самая простая операция – умножение всех решений на одно и то же число. Такой операции соответствует оператор заряда

$$\hat{\mathcal{E}} = -e(\bar{\psi}, \psi).$$

Операторы

$$\hat{K}_{ab} = -i m_{ab} - \frac{i}{2} [H_a H_b]$$

$$\hat{S}^a = -\frac{i}{2}[H^a H^p H^q]\, m_{pq} + \frac{3i}{2} H^a$$

коммутируют с $\hat{M}$ и действуют, таким образом, в пространстве решений уравнения Дирака. Им соответствуют вторично квантованные операторы

$$\hat{\mathcal{K}}_{ab} = (\bar{\psi}, \hat{K}_{ab}\psi), \qquad \hat{\mathcal{S}}^a = (\bar{\psi}, \hat{S}^a \psi).$$

2. Бисферические координаты

Задавая гиперболоид $\eta_{ab} x^a x^b = r^2$ параметрическими уравнениями

$$x^0 = r \operatorname{tg}\theta, \quad x^1 = \frac{r}{\cos\theta}\sin\zeta \sin\xi, \quad x^2 = \frac{r}{\cos\theta}\cos\zeta \sin\eta,$$

$$x^3 = \frac{r}{\cos\theta}\sin\zeta\cos\xi, \quad x^4 = \frac{r}{\cos\theta}\cos\zeta\cos\eta,$$

мы вводим в сферическом мире координаты θ, ξ, η, ζ. Они меняются в пределах $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$, $0 \le \xi \le 2\pi$, $0 \le \eta \le 2\pi$, $0 \le \zeta \le \frac{\pi}{2}$. Последние три из них—суть бисферические координаты на трехмерной сфере $\theta = 0$. Выбрав эту сферу-горловину гиперболоида - в качестве полной гиперповерхности Σ, получим интеграл $(\bar{v}, u)$ в виде

$$(\bar{v}, u) = r^3 \int_{\theta=0} v^* u \, d\Omega,$$

где $d\Omega = \sin\zeta\cos\zeta\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$ – элемент объема единичной сферы.

Уравнение Дирака в сферическом мире будем решать, разделяя переменные θ, ξ, η, ζ. Успех на этом пути обеспечивается тем, что операторы $\hat{M}$, $\hat{S}^0$, $\hat{K}_{31}$, $\hat{K}_{42}$ коммутируют друг с другом. Переходя к переменным θ, ξ, η, ζ, мы, тем не менее, как прежде, будем относить спинор к базису dx. При этом оператор $\hat{M}$ преобразуется к следующему виду:

$$\hat{M} = 2i - i\,\frac{\cos^2\theta}{r}\,X\left(\frac{1}{\sin^2\zeta}\frac{\partial X}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{\cos^2\zeta}\frac{\partial X}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial X}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta} - \frac{\partial X}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\right).$$

Аналогичный вид принимает оператор $\hat{S}^0$:

$$\hat{S}^0 = \frac{3i}{2}H^0 - iH^0L\left(\frac{1}{\sin^2\zeta}\frac{\partial L}{\partial\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{\cos^2\zeta}\frac{\partial L}{\partial\eta}\frac{\partial}{\partial\eta} + \frac{\partial L}{\partial\zeta}\frac{\partial}{\partial\zeta}\right),$$

где

$$L = (H_1\sin\xi + H_3\cos\xi)\sin\zeta + (H_2\sin\eta + H_4\cos\eta)\cos\zeta\,.$$

Операторы $\hat{K}_{31}$ и $\hat{K}_{42}$ преобразуются к виду

$$\hat{K}_{31} = -i\frac{\partial}{\partial\xi} - \frac{i}{2}H_3H_1\,, \qquad \hat{K}_{42} = -i\frac{\partial}{\partial\eta} - \frac{i}{2}H_4H_2\,.$$

Так как

$$X = rH_0\,\mathrm{tg}\,\theta + \frac{r}{\cos\theta}L\,,$$

то

$$\hat{M} = (H_0 + L\sin\theta)\,\hat{S}^0 + iLH_0\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{3}{2}\sin\theta\right) + \frac{i}{2}\,.$$

3. Собственные числа операторов $\hat{S}^0$, $\hat{K}_{31}$, $\hat{K}_{42}$

Представим оператор $\hat{S}^0$ в виде $\hat{S}^0 = iH_0 G$, где

$$G = \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{4}\sum_{b=1}^{4} H^a H^b m_{ab} - \frac{3}{2}.$$

Так как iH_0 и G коммутируют, то собственные числа оператора S^0 равняются произведениям собственных чисел операторов iH_0 и G.

Собственные числа оператора iH_0 равны ± 1, поскольку $iH_0\, iH_0 = 1$. Собственные числа g оператора G можно найти с помощью тождества

$$\left(G + \frac{3}{2}\right)\left(G - \frac{1}{2}\right) = -\Delta = -\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{4}\sum_{b=1}^{4} m_{ab}\, m_{ab}.$$

Поскольку собственные числа скалярного оператора Лапласа Δ на единичной трехмерной сфере равняются $-p\,(p+2)$, где $p = 0,1,2,\ldots$, то собственные числа g равняются либо $p + \frac{1}{2}$, либо $-p - \frac{3}{2}$. Здесь мы полагаем, что компоненты спинорного поля в базисе dx – однозначные и не имеющие особенностей функции на сфере.

Среди указанных чисел $\frac{1}{2}$ не является, однако, собственным числом оператора G. Действительно, так как операторы $\hat{K}_{ab}$ эрмитовы, то собственные числа оператора

$$\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{4}\sum_{b=1}^{4}\hat{K}_{ab}\,\hat{K}_{ab} = -\Delta - G$$

неотрицательны. Из приведенного выше тождества заключаем, что

$$\frac{1}{2}\sum_{a=1}^{4}\sum_{b=1}^{4}\hat{K}_{ab}\,\hat{K}_{ab} = G^2 - \frac{3}{4},$$

и, следовательно, $g^2 \geq \frac{3}{4}$, так что $g \neq \frac{1}{2}$.

Оставшееся множество чисел вида $p + \frac{3}{2}$ и $-p - \frac{3}{2}$, где, как прежде, $p = 0,1,2,\ldots$, инвариантно относительно умножения на -1.

Поэтому собственные числа оператора $\hat{S}^0$ равно, как и оператора G, принадлежат этому множеству. Ниже для каждого числа вида $p + \frac{3}{2}$ и $-p - \frac{3}{2}$ построено ровно $(p + 1)(p+2)$ линейно независимых собственных функций оператора $\hat{S}^0$, и тем самым доказано, что все числа такого вида действительно являются собственными числами оператора $\hat{S}^0$. Для единообразия эти числа мы будем записывать еще и в виде $s + \frac{1}{2}$, где $s = p + 1$ или $s = -p - 2$.

Перейдем теперь к собственным числам операторов $\hat{K}_{31}$ и $\hat{K}_{42}$. Рассмотрим следующие комбинации операторов $\hat{K}_{ab}$:

$$\hat{M}_1 = \frac{1}{2}(\hat{K}_{43} + \hat{K}_{12}) \qquad \hat{N}_1 = \frac{1}{2}(\hat{K}_{43} + \hat{K}_{21})$$

$$\hat{M}_2 = \frac{1}{2}(\hat{K}_{23} + \hat{K}_{41}) \qquad \hat{N}_2 = \frac{1}{2}(\hat{K}_{32} + \hat{K}_{41})$$

$$\hat{M}_3 = \frac{1}{2}(\hat{K}_{31} + \hat{K}_{42}) \qquad \hat{N}_3 = \frac{1}{2}(\hat{K}_{24} + \hat{K}_{31})$$

$$\hat{\bar{M}}^2 = \hat{M}_1^2 + \hat{M}_2^2 + \hat{M}_3^2 \qquad \hat{\bar{N}}^2 = \hat{N}_1^2 + \hat{N}_2^2 + \hat{N}_3^2 .$$

Собственные числа двух последних операторов равняются $\frac{1}{4}s(s+2)$ и $\frac{1}{4}(s^2 - 1)$ соответственно, поскольку

$$\hat{\bar{M}}^2 + \hat{\bar{N}}^2 = (\hat{S}^0)^2 - \frac{3}{8}, \qquad \hat{\bar{M}}^2 - \hat{\bar{N}}^2 = \frac{1}{2}\hat{S}^0 .$$

Далее, все операторы $\hat{M}_l$ коммутируют со всеми операторами $\hat{N}_l$, и обе тройки этих операторов удовлетворяют структурным уравнениям группы трехмерных вращений, а именно:

$$\hat{M}_1\hat{M}_2 - \hat{M}_2\hat{M}_1 = i\hat{M}_3, \quad \hat{M}_3\hat{M}_1 - \hat{M}_1\hat{M}_3 = iM_2, \quad \hat{M}_2\hat{M}_3 - \hat{M}_3\hat{M}_2 = iM_1,$$

$$\hat N_1 \hat N_2 - \hat N_2 \hat N_1 = i\hat N_3 , \quad \hat N_3 \hat N_1 - \hat N_1 \hat N_3 = i N_2 , \quad \hat N_2 \hat N_3 - \hat N_3 \hat N_2 = i N_1 .$$

Поэтому собственные числа m и n операторов $\hat M_3$ и $\hat N_3$ равняются $m = -\frac{p+1}{2}, -\frac{p+1}{2}+1, \ldots, \frac{p+1}{2}$, $n = -\frac{p}{2}, -\frac{p}{2}+1, \ldots, \frac{p}{2}$, если $s = p+1$, и

$$m = -\frac{p}{2}, -\frac{p}{2}+1, \ldots, \frac{p}{2}, \quad n = -\frac{p+1}{2}, -\frac{p+1}{2}+1, \ldots, \frac{p+1}{2},$$

если $s = -p-2$. Собственные же числа операторов $\hat K_{31}$ и $\hat K_{42}$ равняются $m+n$ и $m-n$, соответственно.

4. Отделение переменных ξ и η

Уравнение Дирака мы будем решать для неквантованного спинорного поля и поэтому будем обозначать это поле буквой u, а не ψ. Общее решение системы уравнений

$$\hat K_{31} u = (m+n) u , \qquad \hat K_{42} u = (m-n) u$$

есть $u = \sum_{k=1}^{4} J_k \Phi_k$, где Φ_k – произвольные функции от ζ и θ, а спиноры J_k следующим образом зависят от ξ и η

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} I_1 \exp\left\{ i\left(m+n-\frac{1}{2}\right)\xi + i\left(m-n+\frac{1}{2}\right)\eta \right\},$$

$$J_2 = \frac{1}{2\pi} I_2 \exp\left\{ i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\xi + i\left(m-n-\frac{1}{2}\right)\eta \right\},$$

$$J_3 = \frac{1}{2\pi} I_3 \exp\left\{ i\left(m+n+\frac{1}{2}\right)\xi + i\left(m-n+\frac{1}{2}\right)\eta \right\},$$

$$J_4 = \frac{1}{2\pi} I_4 \exp\left\{ i\left(m+n-\frac{1}{2}\right)\xi + i\left(m-n-\frac{1}{2}\right)\eta \right\}.$$

В свою очередь, спиноры I_k задаются колоннами чисел

$$I_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad I_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad I_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} i \\ -1 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}, \quad I_4 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}.$$

Матрица, составленная из этих колонн, равна

$$(I_1\, I_2\, I_3\, I_4) = \frac{1}{2}(H_2 - H_3)(H_4 + iH_0).$$

5. Отделение переменной ζ

Подставив $u = \sum_{k=1}^{4} J_k \Phi_k$ в уравнение

$$\hat{S}^0 u = \left(s + \frac{1}{2}\right) u,$$

получим систему уравнений

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \zeta} = (s+1-2n)\,\Phi_2 + \left[\left(m-n+\frac{1}{2}\right) tg\zeta + \left(m+n-\frac{1}{2}\right) ctg\zeta\right] \Phi_1$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial \zeta} = -(s+1+2n)\,\Phi_1 - \left[\left(m-n-\frac{1}{2}\right) tg\zeta + \left(m+n+\frac{1}{2}\right) ctg\zeta\right] \Phi_2$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \zeta} = (s-2m)\,\Phi_4 + \left[\left(m-n+\frac{1}{2}\right) tg\zeta - \left(m+n+\frac{1}{2}\right) ctg\zeta\right] \Phi_3$$

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial \zeta} = -(s+2m)\,\Phi_3 - \left[\left(m-n-\frac{1}{2}\right) tg\xi - \left(m+n-\frac{1}{2}\right) ctg\xi\right] \Phi_4,$$

распавшуюся на две по существу одинаковые подсистемы. Решение получается с помощью тесно связанных с полиномами Якоби функций $z^{\ell}_{a,b}(\zeta) = P^{\ell}_{-a,b}(\cos 2\zeta)$, равных

$$z^{\ell}_{a,b}(\zeta) = i^{-a-b}\sqrt{(\ell-a)!\,(\ell+a)!\,(\ell-b)!\,(\ell+b)!}\;(\cos\zeta)^{2\ell}\times$$

$$\times\sum_{k=A}^{B}\frac{(-1)^k\,(tg\,\zeta)^{2k-a-b}}{k!\,(\ell+a-k)!\,(\ell+b-k)!\,(k-a-b)!},$$

где 2ℓ, $\ell+a$, $\ell+b$ – неотрицательные целые числа, $A=max(0,\,a+b)$, $B=min(\ell+a,\,\ell+b)$. Сводка многочисленных свойств этих функций приведена в /5/. С помощью этих свойств можно проверить приводимые здесь результаты.

При $s=p+1$ общее неособенное решение есть

$$\Phi_1 = z_1\,g\cos\theta,\quad \Phi_2 = z_2\,g\cos\theta,\quad \Phi_3 = iz_3\,f\cos\theta,\quad \Phi_4 = iz_4\,f\cos\theta,$$

где f и g – произвольные функции от θ,

$$z_1 = \sqrt{\frac{p+2}{2}-n}\;z^{\frac{p+1}{2}}_{m,\,n-\frac{1}{2}}(\zeta),\qquad z_3 = -i\sqrt{\frac{p+1}{2}-m}\;z^{\frac{p}{2}}_{n,\,m+\frac{1}{2}}(\zeta),$$

$$z_2 = i\sqrt{\frac{p+2}{2}+n}\;z^{\frac{p+1}{2}}_{m,\,n+\frac{1}{2}}(\zeta),\qquad z_4 = \sqrt{\frac{p+1}{2}+m}\;z^{\frac{p}{2}}_{n,\,m-\frac{1}{2}}(\zeta).$$

При $s=-p-2$ общее неособенное решение есть

$$\Phi_1 = i\,z_1\,f\cos\theta,\quad \Phi_2 = iz_2\,f\cos\theta,\quad \Phi_3 = z_3\,g\cos\theta,\quad \Phi_4 = z_4\,g\cos\theta,$$

где

$$z_1 = \sqrt{\frac{p+1}{2}+n}\;z^{\frac{p}{2}}_{m,\,n-\frac{1}{2}}(\zeta),\qquad z_3 = i\sqrt{\frac{p+2}{2}+m}\;z^{\frac{p+1}{2}}_{n,\,m+\frac{1}{2}}(\zeta),$$

$$z_2 = -i\sqrt{\frac{p+1}{2}-n}\;z^{\frac{p}{2}}_{m,\,n+\frac{1}{2}}(\zeta),\qquad z_4 = \sqrt{\frac{p+1}{2}-m}\;z^{\frac{p+1}{2}}_{n,\,m-\frac{1}{2}}(\zeta).$$

Независимо от s функции z_k связаны следующим образом:

$$z_3 \sin\zeta - z_4 \cos\zeta = -z_1, \qquad z_2 \cos\zeta + z_1 \sin\zeta = -z_3,$$

$$z_3 \cos\zeta + z_4 \sin\zeta = -z_2, \qquad z_2 \sin\zeta - z_1 \cos\zeta = -z_4.$$

6. Решение временно́го уравнения

Нам остается удовлетворить уравнению $\hat{M} u = m u$, в силу которого

$$\cos\theta \frac{\partial \Phi_1}{\partial\theta} + (s+2)\sin\theta\ \Phi_1 = (s+1+im)(\Phi_3 \sin\zeta - \Phi_4 \cos\zeta)$$

$$\cos\theta \frac{\partial \Phi_2}{\partial\theta} + (s+2)\sin\theta\ \Phi_2 = (s+1+im)(\Phi_3 \cos\zeta + \Phi_4 \sin\zeta).$$

$$\cos\theta \frac{\partial \Phi_3}{\partial\theta} - (s-1)\sin\theta\ \Phi_3 = (im-s)(\Phi_2 \cos\zeta + \Phi_1 \sin\zeta)$$

$$\cos\theta \frac{\partial \Phi_4}{\partial a} - (s-1)\sin\theta\ \Phi_4 = (im-s)(\Phi_2 \sin\zeta - \Phi_1 \cos\zeta).$$

Отсюда заключаем, что при $s = p+1$ и при $s = -p-2$ функции f и g подчиняются системе уравнений

$$i \frac{df}{d\theta} \cos\theta - i(p+1) f \sin\theta = (p+1-im) g$$

$$i \frac{dg}{d\theta} \cos\theta + i(p+2) g \sin\theta = (p+2+im) f,$$

одно из решений которой имеет вид

$$f = N_{p+1}\, e^{-i(p+1)\theta} F_{p+1}(\theta)$$

$$g = N_{p+1} \frac{p+2+im}{p+2} e^{-i(p+2)\theta} F_{p+2}(\theta),$$

где F_{p+1} - гипергеометрическая функция

$$F_{p+1}(\theta) = F\left(-im,\ 1+im;\ p+2;\ \frac{e^{-i\theta}}{2\cos\theta}\right),$$

N_{p+1} - нормировочный множитель, равный

$$N_{p+1} = \frac{\sqrt{\Gamma(p+2+im)\,\Gamma(p+2-im)}}{r^{3/2}\,(p+1)!}.$$

При вычислении нормировочного множителя надо учесть, что

$$F_{p+1}(0) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+2-im}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+3+im}{2}\right)}.$$

Полученные таким образом решения уравнения Дирака обозначим $u^{s+\frac{1}{2}}_{m,n}(\theta, \xi, \eta, \zeta)$. Они описывают электронные состояния. Позитронные состояния описываются решениями

$$v^{s+\frac{1}{2}}_{m,n}(\theta, \xi, \eta, \zeta) = iH_0\, u^{-s-\frac{1}{2}}_{n,m}(-\theta, \xi, \eta, \zeta),$$

которым соответствует другое решение системы уравнений для f и g, а именно:

$$f = -\epsilon\ N_{p+1}\, e^{i(p+1)\theta} F_{p+1}(-\theta)\ ,$$

$$g = \epsilon\ N_{p+1}\ \frac{p+2+im}{p+2}\ e^{i(p+2)\theta} F_{p+1}(-\theta)\ ,$$

где $\epsilon = 1$ при $s = p+1$ и $\epsilon = -1$ при $s = -p-2$.

7. Операторы рождения и уничтожения электронов и позитронов

Спинорные поля $u^{s+\frac{1}{2}}_{m,n}$, $v^{s+\frac{1}{2}}_{m,n}$ составляют ортонормированный базис в пространстве решений уравнения Дирака. Разлагая операторы ψ , $\bar{\psi}$ в ряды по этому базису

$$\psi = \Sigma\ (\ u^{s+\frac{1}{2}}_{m,n}\ A^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} + v^{s+\frac{1}{2}}_{m,n}\ B^{s+\frac{1}{2}*}_{m,n}\ )$$

$$\bar{\psi} = \Sigma\ (\ \bar{u}^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} A^{s+\frac{1}{2}*}_{m,n} + \bar{v}^{s+\frac{1}{2}}_{m,n}\ B^{s+\frac{1}{2}}_{m,n}\ )\ ,$$

получаем

$$A^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} = (\ \bar{u}^{s+\frac{1}{2}}_{m,n}\ , \psi\ )\ , \qquad B^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} = (\ \bar{\psi}\ ,\ v^{s+\frac{1}{2}}_{m,n}\ )\ ,$$

$$A^{s+\frac{1}{2}}_{m,n}{}^{*} = (\ \bar{\psi}\ ,\ u^{s+\frac{1}{2}}_{m,n}\ )\ , \qquad B^{s+\frac{1}{2}*}_{m,n} = (\ \bar{v}^{s+\frac{1}{2}}_{m,n}\ ,\ \psi\ )\ .$$

Операторы A и A^* следует называть операторами уничтожения и рождения электрона, а операторы B и B^* - операторами уничтожения и рождения позитрона.

Так как все компоненты спинорного поля ψ антикоммутируют друг с другом, то операторы $A^{s+\frac{1}{2}}_{m,n}$ и $B^{s+\frac{1}{2}}_{m,n}{}^{*}$ антикоммутируют со всеми операторами $A_{\mu,\nu}^{\sigma+\frac{1}{2}}$ и $B_{\mu,\nu}^{\sigma+\frac{1}{2}*}$, а так как антикоммутируют друг с другом и все компоненты спинорного поля $\bar{\psi}$, то операторы $A_{m,n}^{s+\frac{1}{2}*}$ и $B_{m,n}^{s+\frac{1}{2}}$ антикоммутируют со всеми операторами $A_{\mu,\nu}^{\sigma+\frac{1}{2}*}$ и $B_{\mu,\nu}^{\sigma+\frac{1}{2}}$. В дополнение к этому имеем (см. Исходные положения, п.4):

$$\{ A_{m,n}^{s+\frac{1}{2}}, B_{\mu,\nu}^{\sigma+\frac{1}{2}} \} = 0 , \quad \{ A_{m,n}^{s+\frac{1}{2}*}, B_{\mu,\nu}^{\sigma+\frac{1}{2}*} \} = 0 ,$$

$$\{ A_{m,n}^{s+\frac{1}{2}}, A_{\mu,\nu}^{\sigma+\frac{1}{2}*} \} = \{ B_{m,n}^{s+\frac{1}{2}}, B_{\mu,\nu}^{\sigma+\frac{1}{2}*} \} = \delta_{s\sigma}\, \delta_{m\mu}\, \delta_{n\nu} .$$

8. Операторы в пространстве решений уравнения Дирака

В рассматриваемом базисе в пространстве решений уравнения Дирака три определяющих этот базис оператора принимают предельно простой вид:

$$\hat{S}^0\, u_{m,n}^{s+\frac{1}{2}} = (s+\frac{1}{2})\, u_{m,n}^{s+\frac{1}{2}} , \quad \hat{S}^0\, v_{m,n}^{s+\frac{1}{2}} = -(s+\frac{1}{2})\, v_{m,n}^{s+\frac{1}{2}}$$

$$\hat{M}_3\, u_{m,n}^{s+\frac{1}{2}} = m\, u_{m,n}^{s+\frac{1}{2}} , \quad \hat{M}_3\, v_{m,n}^{s+\frac{1}{2}} = n\, v_{m,n}^{s+\frac{1}{2}}$$

$$\hat{N}_2\, u_{m,n}^{s+\frac{1}{2}} = n\, u_{m,n}^{s+\frac{1}{2}} , \quad \hat{N}\, v_{m,n}^{s+\frac{1}{2}} = m\, v_{m,n}^{s+\frac{1}{2}} .$$

Из операторов $\hat{M}_1$, $\hat{M}_2$ и $\hat{N}_1$, $\hat{N}_2$ удобно составить комбинации $\hat{M}_{\pm} = \hat{M}_1 \pm i\hat{M}_2$ и $\hat{N}_{\pm} = \hat{N}_1 \pm i\hat{N}_2$. Они равняются

$$\hat{M}_{+} = \frac{1}{2} e^{i(\xi+\eta)} \left(ctg\zeta \frac{\partial}{\partial\zeta} - tg\,\zeta \frac{\partial}{\partial\eta} - i\frac{\partial}{\partial\zeta} \right) + \frac{i}{4}(H_2 - iH_4)(H_1 - iH_3)$$

$$\hat{M}_{-} = \frac{1}{2} e^{-i(\xi+\eta)} \left(-ctg\zeta \frac{\partial}{\partial\xi} + tg\,\zeta \frac{\partial}{\partial\eta} - i\frac{\partial}{\partial\zeta} \right) + \frac{i}{4}(H_2 + iH_4)(H_1 + iH_3)$$

$$\hat{N}_{+} = \frac{1}{2} e^{i(\xi-\eta)} \left(-ctg\zeta \frac{\partial}{\partial\xi} - tg\zeta \frac{\partial}{\partial\eta} - i\frac{\partial}{\partial\zeta} \right) - \frac{i}{4}(H_2 + iH_4)(H_1 - iH_3)$$

$$\hat{N}_{-} = \frac{1}{2} e^{-i(\xi-\eta)} \left(ctg\,\zeta \frac{\partial}{\partial\xi} + tg\zeta \frac{\partial}{\partial\eta} - i\frac{\partial}{\partial\zeta} \right) - \frac{i}{4}(H_2 - iH_4)(H_1 + iH_3)$$

и действуют на базисные решения следующим образом

$$\hat{M}_{\pm}\, u^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} = \sqrt{\left(\frac{s+2}{2} \pm m\right)\left(\frac{s}{2} \mp m\right)}\; u^{s+\frac{1}{2}}_{m\pm 1,n}$$

$$\hat{M}_{\pm}\, v^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} = \sqrt{\left(\frac{s+1}{2} \pm n\right)\left(\frac{s-1}{2} \mp n\right)}\; v^{s+\frac{1}{2}}_{m,n\pm 1}$$

$$\hat{N}_{\pm}\, u^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} = \sqrt{\left(\frac{s+1}{2} \pm n\right)\left(\frac{s-1}{2} \mp n\right)}\; u^{s+\frac{1}{2}}_{m,n\pm 1}$$

$$\hat{N}_{\pm}\, v^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} = \sqrt{\left(\frac{s+1}{2} \pm m\right)\left(\frac{s}{2} \mp m\right)}\; v^{s+\frac{1}{2}}_{m\pm 1,n}$$

Чтобы найти результат действия операторов $\hat{K}_{0a}$ на базисные решения, достаточно знать их выражение при $\theta = 0$. Например,

$$(\hat{K}_{03} \pm i\hat{K}_{01})\,|_{\theta=0} = i \sin\zeta\, e^{\pm i\xi} \frac{\partial}{\partial\theta}\,|_{\theta=0} - \frac{i}{2} H_0 (H_3 \pm iH_1).$$

Удобно начать с решений $u^{s+\frac{1}{2}}_{m,n}$. Обозначая f_{p+1} и g_{p+1} значения функций f и g при $\theta = 0$, находим вспомогательные формулы

$$(p+2+im) f_{p+1} = \sqrt{(p+2)^2+m^2}\, g_{p+2},\quad (p+1+im) f_{p+1} = \sqrt{(p+1)^2+m^2}\, g_p$$

$$(p+2-im) g_{p+1} = \sqrt{(p+2)^2+m^2}\, f_{p+2},\quad (p+1-im) g_{p+1} = \sqrt{(p+1)^2+m^2}\, f_p.$$

Довольно громоздкие, хотя и элементарные выкладки позволяют проверить следующий результат:

$$(\hat{K}_{03} \pm i\hat{K}_{01})\, u^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} = \frac{\pm im}{s(s+1)} \sqrt{\left(\frac{s}{2} \mp m\right)\left(\frac{s+1}{2} \pm n\right)}\, u^{-s-\frac{1}{2}}_{m\pm\frac{1}{2},\, n\pm\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{i}{s} \sqrt{s^2+m^2} \sqrt{\left(\frac{s}{2} \mp m\right)\left(\frac{s-1}{2} \mp n\right)}\, u^{s-\frac{1}{2}}_{m\pm\frac{1}{2},\, n\pm\frac{1}{2}} -$$

$$- \frac{i}{s+1} \sqrt{(s+1)^2+m^2} \sqrt{\left(\frac{s+2}{2} \pm m\right)\left(\frac{s+1}{2} \pm n\right)}\, u^{s+\frac{3}{2}}_{m\pm\frac{1}{2},\, n\pm\frac{1}{2}}.$$

Воспользовавшись выражением $v^{s+\frac{1}{2}}_{m,n}$ через $u^{-s-\frac{1}{2}}_{n,m}$, теперь нетрудно получить результат действия рассматриваемой пары операторов на решения $v^{s+\frac{1}{2}}_{m,n}$:

$$(\hat{K}_{03} \pm i\hat{K}_{01})\, v^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} = \frac{\mp i\, m}{s(s+1)} \sqrt{\left(\frac{s}{2} \mp m\right)\left(\frac{s+1}{2} \pm n\right)}\; v^{-s-\frac{1}{2}}_{m\pm\frac{1}{2},\, n\pm\frac{1}{2}} -$$

$$- \frac{i}{s} \sqrt{s^2 + m^2}\, \sqrt{\left(\frac{s}{2} \mp m\right)\left(\frac{s-1}{2} \mp n\right)}\; v^{s-\frac{1}{2}}_{m\pm\frac{1}{2},\, n\pm\frac{1}{2}} +$$

$$+ \frac{i}{s+1} \sqrt{(s+1)^2 + m^2}\, \sqrt{\left(\frac{s+2}{2} \pm m\right)\left(\frac{s+1}{2} \pm n\right)}\; v^{s+\frac{3}{2}}_{m\pm\frac{1}{2},\, n\pm\frac{1}{2}} .$$

Чтобы найти результат действия на базисные решения другой пары операторов, нет нужды повторять аналогичные выкладки, так как можно воспользоваться коммутатором

$$\hat{K}_{04} \pm i\,\hat{K}_{02} = i < \hat{N}_{\mp} , \hat{K}_{03} \pm i\hat{K}_{01} > .$$

С помощью этой формулы находим

$$(\hat{K}_{04} \pm i\hat{K}_{02})\, u^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} = \frac{\mp m}{s|s+1|} \sqrt{\left(\frac{s}{2} \mp m\right)\left(\frac{s+1}{2} \mp n\right)}\; u^{-s-\frac{1}{2}}_{m\pm\frac{1}{2},\, n\mp\frac{1}{2}} +$$

$$+ \sqrt{1 + \frac{m^2}{s^2}}\, \sqrt{\left(\frac{s}{2} \mp m\right)\left(\frac{s-1}{2} \pm n\right)}\; u^{s-\frac{1}{2}}_{m\pm\frac{1}{2},\, n\mp\frac{1}{2}}$$

$$+ \sqrt{1 + \frac{m^2}{(s+1)^2}}\, \sqrt{\left(\frac{s+2}{2} \pm m\right)\left(\frac{s+1}{2} \mp n\right)}\; u^{s+\frac{3}{2}}_{m\pm\frac{1}{2},\, n\mp\frac{1}{2}} ,$$

$$(\hat{K}_{04} \pm i\hat{K}_{02})\, v^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} = \frac{\mp m}{s|s+1|} \sqrt{\left(\frac{s}{2} \pm m\right)\left(\frac{s+1}{2} \pm n\right)}\; v^{-s-\frac{1}{2}}_{m\mp\frac{1}{2},\, n\pm\frac{1}{2}} -$$

$$-\sqrt{1+\frac{m^2}{s^2}}\; \sqrt{\left(\frac{s}{2} \pm m\right)\left(\frac{s-1}{2} \mp n\right)}\; v^{s-\frac{1}{2}}_{m\mp\frac{1}{2},\, n\pm\frac{1}{2}} -$$

$$-\sqrt{1+\frac{m^2}{(s+1)^2}}\; \sqrt{\left(\frac{s+2}{2} \mp m\right)\left(\frac{s+1}{2} \pm n\right)}\; v^{s+\frac{3}{2}}_{m\mp\frac{1}{2},\, n\pm\frac{1}{2}} .$$

Мы знаем, как действует на базисные решения $\hat{S}^0$ – один из пяти операторов $\hat{S}^a$. Результат действия остальных четырех таких операторов можно получить, воспользовавшись формулой

$$\hat{S}^a = \frac{1}{4}\, \epsilon^{abcpq}\, \hat{K}_{bc}\, \hat{K}_{pq} ,$$

где ϵ^{abcpq} – антисимметричный тензор, $\epsilon^{01234} = -1$. С помощью этой формулы находим

$$(\hat{S}^1 \pm i\hat{S}^3)\, u^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} = -im\, \frac{2s+1}{s(s+1)} \sqrt{\left(\frac{s}{2} \pm m\right)\left(\frac{s+1}{2} \mp n\right)}\; u^{-s-\frac{1}{2}}_{m\mp\frac{1}{2},\, n\mp\frac{1}{2}}$$

$$\pm \frac{i}{s} \sqrt{s^2+m^2}\; \sqrt{\left(\frac{s}{2} \pm m\right)\left(\frac{s-1}{2} \pm n\right)}\; u^{s-\frac{1}{2}}_{m\mp\frac{1}{2},\, n\mp\frac{1}{2}}$$

$$\pm \frac{i}{s+1} \sqrt{(s+1)^2+m^2}\; \sqrt{\left(\frac{s+2}{2} \mp m\right)\left(\frac{s+1}{2} \mp n\right)}\; u^{s+\frac{3}{2}}_{m\mp\frac{1}{2},\, n\mp\frac{1}{2}} ,$$

$$(\hat S^1 \pm i\hat S^3)\, v^{s+\frac12} = -i\,m\,\frac{2s+1}{s(s+1)}\sqrt{\left(\frac{s}{2}\pm m\right)\left(\frac{s+1}{2}\mp n\right)}\; v^{-s-\frac12}_{m\mp\frac12,\, n\mp\frac12}$$

$$\pm\frac{i}{s}\sqrt{s^2+m^2}\sqrt{\left(\frac{s}{2}\pm m\right)\left(\frac{s-1}{2}\pm n\right)}\; v^{-s-\frac12}_{m\mp\frac12,\, n\mp\frac12}$$

$$\pm\frac{i}{s+1}\sqrt{(s+1)^2+m^2}\sqrt{\left(\frac{s+2}{2}\mp m\right)\left(\frac{s+1}{2}\mp n\right)}\; v^{s+\frac32}_{m\mp\frac12,\, n\mp\frac12},$$

$$(\hat S^2 \pm i\hat S^4)\, u^{s+\frac12}_{m,n} = m\,\frac{2s+1}{s|s+1|}\sqrt{\left(\frac{s}{2}\pm m\right)\left(\frac{s+1}{2}\pm n\right)}\; u^{-s-\frac12}_{m\mp\frac12,\, n\pm\frac12}$$

$$\pm\sqrt{1+\frac{m^2}{s^2}}\sqrt{\left(\frac{s}{2}\pm m\right)\left(\frac{s-1}{2}\mp n\right)}\; u^{s-\frac12}_{m\mp\frac12,\, n\pm\frac12}$$

$$\mp\sqrt{1+\frac{m^2}{(s+1)^2}}\sqrt{\left(\frac{s+2}{2}\mp m\right)\left(\frac{s+1}{2}\pm n\right)}\; u^{s+\frac32}_{m\mp\frac12,\, n\pm\frac12},$$

$$(\hat S^2 \pm i\hat S^4)\, v^{s+\frac12}_{m,n} = -m\,\frac{2s+1}{s|s+1|}\sqrt{\left(\frac{s}{2}\mp m\right)\left(\frac{s+1}{2}\mp n\right)}\; v^{-s-\frac12}_{m\pm\frac12,\, n\mp\frac12}$$

$$\pm\sqrt{1+\frac{m^2}{s^2}}\sqrt{\left(\frac{s}{2}\mp m\right)\left(\frac{s-1}{2}\pm n\right)}\; v^{s-\frac12}_{m\pm\frac12,\, n\mp\frac12}$$

$$\mp\sqrt{1+\frac{m^2}{(s+1)^2}}\sqrt{\left(\frac{s+2}{2}\pm m\right)\left(\frac{s+1}{2}\mp n\right)}\; v^{s+\frac32}_{m\pm\frac12,\, n\mp\frac12}.$$

9. Вторично квантованные операторы

Обозначим на время буквой μ тройку индексов $s+\frac{1}{2}$, m, n. Если некоторый оператор $\hat{K}$ действует в пространстве решений уравнения Дирака по правилу

$$\hat{K}\, u_\mu = \Sigma\, K^{(1)}_{\mu\nu}\, u_\nu\,, \qquad \hat{K}\, v_\mu = \Sigma\, K^{(2)}_{\mu\nu}\, v_\nu\,,$$

то ему соответствует вторично квантованный оператор ($\bar{\psi}$, $\hat{K}\psi$), нормальная форма которого имеет вид:

$$\hat{\mathfrak{K}} = \Sigma\, (A^*_\nu\, K^{(1)}_{\mu\nu}\, A_\mu - B^*_\mu\, K^{(2)}_{\mu\nu}\, B_\nu).$$

Соответствие между операторами $\hat{K}$ и $\hat{\mathfrak{K}}$ проявляется в коммутаторе

$$< \psi\,, \hat{\mathfrak{K}} > = \hat{K}\psi\,.$$

Выпишем простейшие операторы:

$$\hat{\mathfrak{E}} = e\,\Sigma\, (B^{s+\frac{1}{2}\,*}_{m,n}\, B^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} - A^{s+\frac{1}{2}\,*}_{m,n}\, A^{s+\frac{1}{2}}_{m,n})$$

$$\hat{\mathfrak{S}}^0 = \Sigma\, (s+\frac{1}{2})\, (A^{s+\frac{1}{2}\,*}_{m,n}\, A^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} + B^{s+\frac{1}{2}\,*}_{m,n}\, B^{s+\frac{1}{2}}_{m,n})$$

$$\hat{\mathfrak{M}}_3 = \Sigma\, (m A^{s+\frac{1}{2}\,*}_{m,n}\, A^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} - n B^{s+\frac{1}{2}\,*}_{m,n}\, B^{s+\frac{1}{2}}_{m,n})$$

$$\hat{\mathfrak{N}}_3 = \Sigma\, (n\, A^{s+\frac{1}{2}\,*}_{m,n}\, A^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} - m\, B^{s+\frac{1}{2}\,*}_{m,n}\, B^{s+\frac{1}{2}}_{m,n})\,.$$

Остальные операторы для подробной записи слишком громоздки. Отметим только, что операторы $\hat{K}_{ab}$, так же как и операторы $\hat{K}_{ab}$, удовлетворяют структурным уравнениям группы изометрий мира де Ситтера, т.е.

$$<\hat{K}_{ab}, \hat{K}_{pq}> = \eta_{bp}\hat{K}_{aq} - \eta_{ap}\hat{K}_{bq} + \eta_{bq}\hat{K}_{pa} - \eta_{aq}\hat{K}_{pb} .$$

Все операторы, рассмотренные здесь и в разделе 8, инвариантны относительно канонической подстановки

$$u^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} \to \frac{e^{ia}}{\sqrt{1+|\lambda|^2}} \left(u^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} - i\lambda^* (-1)^s \, v^{-s-\frac{1}{2}}_{n,m} \right)$$

$$v^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} \to \frac{e^{i\beta}}{\sqrt{1+|\lambda|^2}} \left(v^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} + i\lambda (-1)^s \, u^{-s-\frac{1}{2}}_{n,m} \right)$$

$$A^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} \to \frac{e^{-ia}}{\sqrt{1+|\lambda|^2}} \left(A^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} + i\lambda (-1)^s \, B^{-s-\frac{1}{2}*}_{n,m} \right)$$

$$B^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} \to \frac{e^{i\beta}}{\sqrt{1+|\lambda|^2}} \left(B^{s+\frac{1}{2}}_{m,n} + i\lambda (-1)^s \, A^{-s-\frac{1}{2}*}_{n,m} \right) ,$$

где a и β – любые действительные числа, λ – произвольное комплексное число. Эта подстановка аналогична той, которую нашел Н.Н. Боголюбов /6/ в созданной им теории сверхпроводимости.

Таким образом, операторы, поставляемые непрерывной изометрической группой, в случае де Ситтера не дают возможности однозначно определить вакуумное состояние. Не уменьшают произвола в выборе вакуума и пространственные зеркальные отражения. Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть симметрию относительно гиперплоскости $x_2 = 0$. Она представляется оператором

$$P_2\; u(\theta,\xi,\eta,\zeta) = H_2\; u(\theta,\xi,-\eta,\zeta),$$

который действует на базисные решения следующим простым образом:

$$P_2\; u_{m,n}^{s+\frac{1}{2}} = u_{n,m}^{-s-\frac{1}{2}}, \qquad P_2\; v_{m,n}^{s+\frac{1}{2}} = -v_{n,m}^{-s-\frac{1}{2}}.$$

Однако симметрия относительно гиперплоскости $x_0 = 0$ накладывает ограничения $\alpha = \beta$, $\lambda = \lambda^*$. Это легко проверить, так как она представляется оператором

$$P_0\; u(\theta,\xi,\eta,\zeta) = iH_0\; u(-\theta,\xi,\eta,\xi),$$

действующим на базисные решения по правилам

$$P_0\; u_{m,n}^{s+\frac{1}{2}} = v_{n,m}^{-s-\frac{1}{2}}, \qquad P_0\; v_{m,n}^{s+\frac{1}{2}} = u_{n,m}^{-s-\frac{1}{2}}.$$

С такой же ситуацией мы встречаемся и в скалярном /7/, а не только в спинорном варианте. Вакуумное состояние в скалярном варианте было выбрано так, чтобы при больших значениях главного квантового числа волновые функции одночастичных состояний принимали квазиклассический вид. Такое же соображение и в спинорном варианте заставляет считать, что истинное вакуумное состояние отвечает значению $\lambda = 0$.

Литература

1. P.A.M.Dirac. Annals of Mathematics, 36, No. 3,657,1935.

2. Н.А. Черников, Н.С. Шавохина. Препринт ОИЯИ, Р2-6109, Дубна, 1971.

3. Н. А. Черников, Н.С. Шавохина. Препринт ОИЯИ Р2-6173, Дубна, 1971.

4. Н.С. Шавохина. ТМФ, 10, №3, 412, 1972.

5. Н.Я. Виленкин. Специальные функции и теория представлений групп, "Наука", 1965.

6. Н.Н. Боголюбов. ЖЭТФ, 34, 58, 1958.

7. N.A.Chernikov, E.A.Tagirov. Ann.Inst. Henri Poincare, v. IX, 2. Sect.A.Paris., 1968.

Препринт ОИЯИ, Р2-3777, Дубна, 1968.

Рукопись поступила в издательский отдел
24 марта 1972 года.