ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6347

А.Н.Квинихидзе, Д.Цв.Стоянов

ЛОКАЛЬНЫЙ ДВУХЧАСТИЧНЫЙ КВАЗИПОТЕНЦИАЛ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

P2 - 6347

А.Н.Квинихидзе,* Д.Цв.Стоянов

ЛОКАЛЬНЫЙ ДВУХЧАСТИЧНЫЙ КВАЗИПОТЕНЦИАЛ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Направлено в ТМФ

* Институт математики АН Гр.ССР

В предыдущей работе [1] на основе рассмотрения запаздывающей части трехчастичной функции Грина были получены трехмерные уравнения для релятивистской задачи трех тел. Причем они отличаются от нерелятивистских уравнений Фаддеева [2] лишь релятивистской кинематикой. Однако аналоги двухчастичных потенциалов взаимодействий - квазипотенциалы - оказались [1,3] в общем случае функцией семи аргументов, инвариантных относительно трехмерных вращений, и поэтому не связаны с квазипотенциалами, заданными в системе центра масс двух частиц.

В данной работе делается попытка сформулировать релятивистскую задачу трех скалярных частиц в терминах так называемых локальных квазипотенциалов [4], зависящих лишь от двух аргументов: от собственной энергии двух частиц и скалярного квадрата разности релятивистских относительных импульсов. Это намного упростит уравнения в том смысле, что для задания их нам необходимо будет знать двухчастичные величины, в том числе и волновые функции связанных состояний, вычисленные лишь в системе центра масс двух частиц. Ниже также указан способ построения локальных квазипотенциалов через физические амплитуды рассеяния двух частиц при любой величине константы взаимодействия.

В целях упоминания некоторых известных свойств локальных квазипотенциалов обратимся сначала к релятивистской задаче двух тел.

2. Локальный квазипотенциал в теории поля

Квазипотенциальный подход к релятивистской задаче двух тел, основанный на трехмерном уравнении Логунова-Тавхелидзе [3], интенсивно исследовался в ряде последующих работ. Были предложены различные возможности получения уравнений квазипотенциального типа из квантовой теории поля. В частности, одно из них [1,5], имеющее непосредственное отношение к данной работе, в случае двух бесспиновых частиц в системе центра масс имеет вид:

$$T(E,\vec{p},\vec{q}) = V(E,\vec{p},\vec{q}) + \int \frac{V(E,\vec{p},\vec{k})\,d\vec{k}\;T(E,\vec{k},\vec{q})}{2\sqrt{m_1^2+\vec{k}^2}\sqrt{m_2^2+\vec{k}^2}\left(\sqrt{m_1^2+\vec{k}^2}+\sqrt{m_2^2+\vec{k}^2}-E\right)}\,. \tag{2.1}$$

Здесь E – энергия, $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\vec{k}$ – относительные импульсы системы центра инерции в начальном, конечном и промежуточном состояниях. Физическая релятивистская инвариантная амплитуда рассеяния определяется из условия

$$f(s,t) = 16\pi^3 T(E,\vec{p},\vec{q}) \qquad \left|\begin{array}{l} s = \left(\sqrt{m_1^2+\vec{p}^{\,2}}+\sqrt{m_2^2+\vec{p}^{\,2}}\right)^2 = \\ = \left(\sqrt{m_1^2+\vec{q}^{\,2}}+\sqrt{m_2^2+\vec{q}^{\,2}}\right)^2 = E^2. \\ t = -(\vec{p}-\vec{q})^2 \end{array}\right. \tag{2.2}$$

Уравнение (3.1) является одним из возможных обобщений уравнения Липпмана-Швингера на случай квантовой теории поля. При этом квазипотенциал V является комплексной функцией энергии и относительных импульсов. Квазипотенциальное уравнение сильно упрощается, если V является функцией только разности относительных импульсов и полной энергии, т.е. в случае локальности квазипотенциала[x/]. Существование локального квазипотенциала было строго доказано в случае слабой связи[4], причем был указан способ его построения. Локальный потенциал, построенный этим методом, дает решение уравнения (2.1), совпадающее на массовой поверхности с физической амплитудой рассеяния.

Если обозначить локальный квазипотенциал через $V(E,(p-q)^2)$, уравнение (2.1) примет вид

$$T(E,\vec{p},\vec{q}) = V(E,(\vec{p}-\vec{q})^2) + \int \frac{V(E,(\vec{p}-\vec{k})^2)\,d\vec{k}\,T(E,\vec{k},\vec{q})}{2\sqrt{m_1^2+\vec{k}^2}\,\sqrt{m_2^2+\vec{k}^2}\,(\sqrt{m_1^2+\vec{k}^2}+\sqrt{m_2^2+\vec{k}^2}-E)}. \tag{2.3}$$

Помимо того, что решение этого уравнения на массовой поверхности совпадает с физической амплитудой рассеяния, ниже, при рассмотрении трехчастичной задачи, нам понадобится, чтобы оно обладало простыми полюсами по переменной E везде, где существуют связанные состояния. Последнее утверждение можно строго доказать при известных ограничениях на локальный квазипотенциал, и ниже мы будем считать, что оно справедливо. Иными словами, предполагается, что однородное уравнение

$$2\sqrt{m_1^2+\vec{p}^2}\,\sqrt{m_2^2+\vec{p}^2}\,(\sqrt{m_1^2+\vec{p}^2}+\sqrt{m_2^2+\vec{p}^2}-E)\,\phi_E(\vec{p}) = \int V(E,(\vec{p}-\vec{q})^2)\,d\vec{q}\,\phi_E(\vec{q}) \tag{2.4}$$

имеет решения при значениях энергии E, равных массам связанных состояний, допустимых в данной двухчастичной подсистеме. Условие нормировки запишем в виде[1,5]

[x/] (Поскольку полная энергия E выступает в роли внешнего параметра уравнения, здесь термин "локальность" имеет прямой смысл и означает наличие трехмерной δ-функции в квазипотенциале, записанном в координатном представлении).

$$\int 2\sqrt{m_1^2+\vec{p}^{\,2}}\sqrt{m_2^2+\vec{p}^{\,2}}\,\phi_E^+(\vec{p})\,\phi_E(\vec{p})\,d\vec{p} + \int \phi_E^+(\vec{p})\frac{\partial V(E,(\vec{p}-\vec{q})^2)}{\partial E}\phi_E(\vec{q}) = 2E. \quad (2.5)$$

§3. Релятивистская матрица рассеяния трех частиц

В последующем изложении мы займемся трехчастичными уравнениями и покажем, что ядро их K' /1/ можно заменить новым, в котором уже часть, соответствующая парным взаимодействиям, будет выражаться через локальные квазипотенциалы. Здесь важно подчеркнуть, что все 16 амплитуд, получаемых как решения этих уравнений с новым ядром, на массовой поверхности совпадают с физическими.

Для введения нового ядра с локальными квазипотенциалами оказывается достаточным рассмотрение уравнения для T -матрицы упругого рассеяния трех частиц, обозначенной в работе /1/ через M_{00}. В системе центра масс трех частиц оно имеет вид:

$$M_{00}(P_0\,;\vec{\tilde{p}},\vec{\bar{p}};\vec{\tilde{q}},\vec{\bar{q}}) = K'(P_0\,;\vec{\tilde{p}},\vec{\bar{p}};\vec{\tilde{q}},\vec{\bar{q}}) +$$

$$+\int \frac{K'(P_0\,;\vec{\tilde{p}},\vec{\bar{p}};\vec{\tilde{k}},\vec{\bar{k}})\,d\vec{\tilde{k}}\,d\vec{\bar{k}}\,M_{00}(P_0\,;\vec{\tilde{k}},\vec{\bar{k}};\vec{\tilde{q}},\vec{\bar{q}})}{2\omega_1(\vec{k})\,\omega_2(\vec{k})\,\omega_3(\vec{k})\,(\omega_1(\vec{k})+\omega_2(\vec{k})+\omega_3(\vec{k})-P_0)}, \quad (3.1)$$

где p_i – трехмерный импульс i -ой частицы, P_0 – полная энергия, играющая роль внешнего параметра в данном уравнении. $\vec{\tilde{p}}_i$, $\vec{\bar{p}}_i$ – трехмерные относительные импульсы i -ой системы Якоби /1/, $\omega_i(p)=\sqrt{m_i^2+\vec{p}_i^{\,2}}$. Физическая S -матрица данного процесса связана с M_{00} следующим образом:

$$< 1', 2', 3' | S | 1, 2, 3 > = \delta(\vec{p}_1 - \vec{q}_1)\, \delta(\vec{p}_2 - \vec{q}_2)\, \delta(\vec{p}_3 - \vec{q}_3) +$$

$$+ i\pi \delta^{(4)}(P - Q) \Big[\prod_{n=1}^{3} \omega_n(\vec{p})\, \omega_n(\vec{q})\Big]^{-1/2} M_{00} \Big|_{P_0 = \sum_{n=1}^{3} \omega_n(\vec{p}) = \sum_{n=1}^{3} \omega_n(\vec{q})} . \qquad (3.2)$$

Следовательно,

$$M_{00}\Big|_{P_0 = \sum_n \omega_n(\vec{p}) = \sum_n \omega_n(\vec{q})} = (16\pi^3)^{-1} \sum_{l=1}^{3} \delta(\vec{q}_l - \vec{p}_l)\, \omega_l(\vec{p})\, f(s_l, t_l) + \frac{\pi^2}{i} [T_{00}]$$

$$S_i = (\vec{p}_k + \vec{p}_j)^2 \qquad t_l = (\vec{p}_k - \vec{q}_k)^2, \qquad (3.3)$$

где $f_l(s_l, t_l)$ – физические двухчастичные амплитуды рассеяния l -ой двухчастичной подсистемы, зависящие от своих S и t – переменных; $[T_{00}]$ – часть, соответствующая связным диаграммам Фейнмана.

В уравнении (3.1) произведем замену переменных $\vec{k}_l$, $\vec{p}_l$, $\vec{q}_i$ новыми $\underline{\vec{k}}_l$, $\underline{\vec{p}}_i$, $\underline{\vec{q}}_l$:

$$\underline{\vec{k}}_i = \vec{k}_i - \vec{k}_i \frac{\mu_k \omega_j(\vec{k}) - \mu_j \omega_k(\vec{k}) - \dfrac{\vec{k}_i \vec{k}_i}{\omega_j(\vec{k}) + \omega_k(\vec{k}) + \sqrt{s_i(\vec{k})}}}{\sqrt{s_i(k)}} = \qquad (3.4)$$

$$= k_j - k_i \frac{\omega_j(\vec{k}) - \dfrac{\vec{k}_i \vec{k}_j}{\omega_j(\vec{k}) + \omega_k(\vec{k}) + \sqrt{s_i(\vec{k})}}}{\sqrt{s_i(\vec{k})}}$$

---

x/ Многие свойства преобразования (3.4) легче выявляются, если записать его в виде пространственной части 4-вектора $\Lambda_i(\omega_j(\vec{k}), \vec{k}_j)$, т.е. $\underline{\vec{k}}_i = \Lambda_i(\omega_j(\vec{k}), \vec{k}_j)$, где Λ_i – матрица лоренц- преобразования, которая переводит 4-вектор $(\omega_j(k) + \omega_k(k)$, $\vec{k}_j + \vec{k}_k)$ в $(\sqrt{s_i(\vec{k})}, \vec{0})$.

аналогично для $\vec{p}_i$ и $\vec{q}_i$, где

$$s_i(k) = [\omega_j(\vec{k}) + \omega_k(\vec{k})]^2 - (\vec{k}_j + \vec{k}_k)^2 = \sqrt{m_j^2 + \vec{\underline{k}}_i^2} + \sqrt{m_k^2 + \vec{\underline{k}}_i^2} \; . \tag{3.5}$$

Закон преобразования фазового объема известен

$$\frac{d\vec{\bar{k}}_i}{\omega_j(\vec{k})\,\omega_k(\vec{k})} = \frac{d\vec{\underline{k}}_i\left(\sqrt{m_j^2 + \vec{\underline{k}}_i^2} + \sqrt{m_k^2 + \vec{\underline{k}}_i^2}\right)}{\sqrt{m_j^2 + \vec{\underline{k}}_i^2}\,\sqrt{m_k^2 + \vec{\underline{k}}_i^2}\,\sqrt{\vec{\bar{k}}_i^2 + s_i(\vec{k})}} \; . \tag{3.6}$$

Нетрудно показать, что переменные передачи импульса t_l, фигурирующие в (3.3) в качестве аргументов двухчастичных физических амплитуд, могут быть выражены простым образом через новые переменные $\vec{\underline{p}}_l$ и $\vec{\underline{q}}_l$, а именно:

$$t_l = -(\vec{\underline{p}}_l - \vec{\underline{q}}_l)^2 \; . \tag{3.7}$$

В новых переменных уравнение (3.1) принимает вид:

$$M_{00}(P_0\,;\vec{\bar{p}},\vec{p}\,;\vec{\bar{q}},\vec{q}) = K'(P_0\,;\vec{\bar{p}},\vec{p}\,;\vec{\bar{q}},\vec{q}) +$$

$$+\frac{K'(P_0;\vec{\bar{p}}\vec{\underline{p}};\vec{\bar{k}},\vec{\underline{k}})\,d\vec{\bar{k}}_i\,d\vec{\underline{k}}_i\,S_i(\vec{\underline{k}})\,M_{00}(P_0;\vec{\bar{k}},\vec{\underline{k}};\vec{\bar{q}},\vec{\underline{q}})}{2\sqrt{m_i^2 + \vec{\bar{k}}_i^2}\,\sqrt{m_k^2 + \vec{\underline{k}}_i^2}\,\sqrt{m_j^2 + \vec{\underline{k}}_i^2}\,\sqrt{\vec{\bar{k}}_i^2 + s_i(\underline{k})}\,\left(\sqrt{k_i^2 + s_i(\underline{k})} + \omega_i(\underline{k}) - P_0\right)} \; . \tag{3.8}$$

Чтобы избежать громоздкости в определении нового трехчастичного квазипотенциала, запишем уравнения (3.1) и (3.8) в символической операторной форме:

$$M_{00} = K^{r} + \frac{i}{\pi^2} K^{r} G_0 M_{00} . \tag{3.9}$$

Рассмотрим функцию $\{M_{00}\}$, связанную с M_{00} следующим образом:

$$\{M_{00}\} = \frac{1}{16\pi} \sum_{l=1}^{3} \delta(\vec{p}_l - \vec{q}_l)\omega_l(\vec{p}) a_l(\vec{p}) f_l((P_0 - \omega_l(\vec{p}))^2 - \vec{\tilde{p}}_l^{\,2}; -(\vec{p}_l - \vec{q}_l)^2) a_l(\vec{q}) + \\ + \frac{\pi^2}{i}[T_{00}], \tag{3.10}$$

где

$$a_l(\vec{p}) = \left[\frac{(\sqrt{(P_0 - \omega_l(\vec{\underline{p}}))^2 - \vec{\tilde{p}}_l^{\,2}} + \sqrt{s_l(\underline{\vec{p}})})\sqrt{\vec{\tilde{p}}_l^{\,2} + s_l(\underline{\vec{p}})}}{\sqrt{s_l(\underline{\vec{p}})}(P_0 - \omega_l(\underline{\vec{p}}) + \sqrt{\vec{\tilde{p}}_l^{\,2} + s_l(\underline{\vec{p}})})} \right]^{1/2}. \tag{3.11}$$

Нетрудно видеть, что $a_l(\vec{p})$ на массовой поверхности $P_0 = \omega_1(\vec{p}) + \omega_2(\vec{p}) + \omega_3(\vec{p})$ превращается в единицу, поэтому, согласно (3.3), на массовой поверхности $\{M_{00}\}$ и M_{00} совпадают. Учитывая явный вид G_0 и $a_l(p)$, легко показать, что функции, соответствующие операторам

$$\{M_{00}\} \frac{i}{\pi^2} G_0 \{M_{00}\} \ldots \frac{i}{\pi^2} G \{M_{00}\} = F ,$$

на массовой поверхности имеют вид, аналогичный (3.3):

$$F/_{P_0 = \sum\limits_{l=1}^{3}} = \Sigma\; \delta(p_l - q_l)\omega_l(p) F_l(s_l, t_l) + F_0 , \tag{3.12}$$

где F_l и F_0 – функции релятивистски-инвариантных аргументов, и не содержащие δ -функций, выделенных в (3.12). Поэтому, подобно (3.10), можно ввести функции

$$\{F\} = \sum_{l=1}^{3} \delta(\vec{p}_l - \vec{q}_l)\omega_l(\vec{p}) a_l(\vec{p}) F_l(P_0 - \omega_l(\vec{p}))^2 - \vec{\tilde{p}}_l^{\,2}, -(\underline{p}_l - \underline{q}_l)^2) a_l(\vec{q}) + F_0 . \tag{3.13}$$

Определим новый трехчастичный квазипотенциал W с помощью ряда

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} W_n , \qquad (3.14)$$

члены которого удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} &\{M_{00}\} = W_1 \\ &0 = W_2 + \{W_1 \frac{i}{\pi^2} G_0 W_1\} \\ &0 = W_3 + \{W_1 \frac{i}{\pi^2} G_2 W_2 + W_2 \frac{i}{\pi^2} G_0 W_1 + W_1 \frac{i}{\pi^2} G_0 W_1 \frac{i}{\pi^2} C_0 W_1\} . \\ &\quad \ldots \end{aligned} \qquad (3.15)$$

Здесь фигурные скобки надо понимать в смысле равенств (3.10) и (3.12). Уравнения (3.15) можно рассматривать как рекуррентные соотношения для членов ряда (3.14). Прежде всего заметим, что решение уравнения (3.1) либо (3.8) не меняется на массовой поверхности при замене старого квазипотенциала новым. Действительно, запишем уравнение (3.8) с новым квазипотенциалом в качестве ядра:

$$N_{00} = W + \frac{i}{\pi^2} N_{00} G_0 W , \qquad (3.16)$$

где N_{00} – решение уравнения (3.8), отвечающее новому ядру W . Отсюда

$$\{N_{00}\} = \{W\} + \{W \frac{i}{\pi^2} G_0 W\} + \{W \frac{i}{\pi^2} G_0 W \frac{i}{\pi^2} G_0 W\} + \ldots \qquad (3.17)$$

С другой стороны, суммируя левые и правые стороны равенств (3.15), имеем:

$$\{M_{00}\} = W + \{W \frac{i}{\pi^2} G_0 W + W \frac{i}{\pi^2} G_0 W \frac{i}{\pi^2} G_0 W + \ldots\} . \qquad (3.18)$$

Из определения квазипотенциала W (3.15) также следует

$$\{W\} = W . \tag{3.19}$$

Тогда, сравнивая (3.16) и (3.17), приходим к выводу, что

$$\{N_{00}\} = \{M_{00}\} . \tag{3.20}$$

Поскольку на массовой поверхности $a_i(p)=1$, то последнее равенство означает, что решение уравнения (3.16) в физической области изменения аргументов совпадает с физической релятивистской амплитудой рассеяния трех частиц.

$$(N_{00} - M_{00})\Big|_{P_0 = \sum_{l=1}^{3} \omega_l(\vec{p}) = \sum_{l=1}^{3} \omega_l(\vec{q})} = 0 . \tag{3.21}$$

Рассмотрим некоторые свойства нового квазипотенциала, вытекающие непосредственно из определения (3.15). Нетрудно видеть, что он представим в виде

$$W = \sum_{m=1}^{3} W^m + W_T , \tag{3.22}$$

где W^m соответствует парному взаимодействию в m-ой двухчастичной подсистеме и поэтому в импульсном представлении имеет множитель $\delta(\vec{p}_m - \vec{q}_m)$.

W_T - часть, соответствующая чисто трехчастичным взаимодействиям. Это видно из того, что каждый член ряда (3.14), согласно соотношениям (3.15), представим в виде (3.22). Записывая W^m в виде суммы ряда

$$W^m = \sum_{n=1}^{\infty} W_n^m \tag{3.23}$$

и вводя обозначение

$$\{T_m\} = \frac{1}{16\pi^3}\,\omega_m(\vec{p})\ a_m(\vec{p}) f_m((P_0-\omega_m(\vec{p}))^2-\vec{\tilde{p}}_m^{\,2},\ -(\underline{\vec{p}}_m-\underline{\vec{q}}_m)^2)\ a_m(q)\ , \qquad (3.24)$$

получим следующие соотношения между отдельными членами ряда (3.23):

$$\{T_m\} = W_1^m$$

$$0 = W_2^m + \{W_1^m \frac{i}{\pi^2} G_0 W_1^m\} \qquad (3.25)$$

$$0 = W_3^m + \{W_2^m \frac{i}{\pi^2} G_0\ W_1^m + W_1^m \frac{i}{\pi^2} G_0\ W_2^m + W_1^m \frac{i}{\pi^2} G_0' W_1^m \frac{i}{\pi^2} G_0 W_1^m\}.$$

$$\cdots$$

После несложных алгебраических преобразований для W^m имеем следующее выражение:

$$W^m = \delta(\vec{\tilde{p}}_n - \vec{\tilde{q}}_m)\,\omega_m(\vec{p})\, a_m(\vec{p})\, V_m^{(2)}((P_0-\omega_m)^2 - \vec{\tilde{p}}_m^{\,2}\ ,\ (\underline{p}_m - \underline{q}_m)^2)\ a_m(q)\ , \qquad (3.26)$$

где $V_m^{(2)}(E,(\vec{p}-\vec{q})^2)$– функция лишь двух аргументов, определяемая системой равенств

$$V_m^{(2)} = \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn}^{(2)}$$

$$\frac{1}{16\pi^3}\ f\ (E,-(\underline{\vec{p}}-\underline{\vec{q}})^2)\ =\ V_{m1}^{(2)}(E,(\underline{\vec{p}}-\underline{\vec{q}})^2) \qquad (3.27)$$

$$0 = V_{m2}^{(2)}(E,(\underline{\vec{p}}-\underline{\vec{q}})^2) + \int \frac{V_{m1}^{(2)}(E,(\underline{\vec{p}}-\underline{\vec{k}})^2)\, d\underline{\vec{k}}\ V_{m1}^{(2)}(E,(\underline{\vec{k}}-\underline{\vec{q}})^2)}{2\sqrt{m_l^2+\underline{\vec{k}}^2}\sqrt{m_j^2+\underline{\vec{k}}^2}\,(\sqrt{m_l^2+\underline{\vec{k}}^2}+\sqrt{m_j^2+\underline{\vec{k}}^2}-E)}\Bigg|_{\underline{q}^2=\underline{p}^2=b(E)}\ .$$

Здесь $m \neq l \neq j \neq m\,;\quad \sqrt{b_m^2(E)+m_l^2} + \sqrt{b_m^2(E)+m_j^2} \equiv E\,.$

Резюмируя изложенное выше, можно сказать, что нами найдена возможность введения такого эффективного трехчастичного квазипотенциала $\mathbb{W}$, парная часть которого выражается через функции лишь двух аргументов $V_m^{(2)}$. Причем T -матрица рассеяния трех релятивистских частиц, полученная с помощью уравнения (3.16), на массовой поверхности совпадает с физической. Нетрудно убедиться в том, что функция $V_m^{(2)}$, определяемая равенствами (3.2), удовлетворяет изложенным в §2 необходимым требованиям на локальный квазипотенциал уравнения (2.1). В случае слабой связи можно показать ее тождественность с локальным квазипотенциалом, построенным методом работы /4/. Следовательно, функция $V_m^{(2)}(E,(\underline{\vec{p}}-\underline{\vec{q}})^2)$ является локальным квазипотенциалом уравнения (2.1) для m -ой двухчастичной подсистемы.

§4. Релятивистские амплитуды всех возможных переходов в системе трех тел

В этом параграфе мы покажем, что в рамках предположения, сделанного относительно двухчастичных T -матриц, отвечающих локальным квазипотенциалам, все 16 амплитуд рассеяния, полученных как решения уравнений работы /1/ с новым трехчастичным квазипотенциалом $\mathbb{W}$, совпадают на массовой поверхности с физическими амплитудами рассеяния. Напомним, что для амплитуды рассеяния N_{00} это было доказано в §3. Введем обозначения:

$$\mathbb{W}_i^{(2)}(P_0-\omega_i(\vec{p}),\tilde{\vec{p}}_i,\underline{\vec{p}}_i,\underline{\vec{q}}_i) = \tag{4.1}$$

$$= a_i(\vec{p})\,V_i^{(2)}((P_0-\omega_i(\vec{p}))^2-\tilde{\vec{p}}^{\,2};(\underline{\vec{p}}_i-\underline{\vec{q}}_i)^2)\,a_i(\vec{q})$$

$$\mathcal{T}_i^{(2)}(P_0-\omega_i(\vec{p}),\tilde{\vec{p}}_i,\underline{\vec{p}}_i,\underline{\vec{q}}_i) = \tag{4.2}$$

$$= a_i(\vec{p})\,T_i^{(2)}((P_0-\omega_i(\vec{p}))^2-\tilde{\vec{p}}_i^{\,2},\underline{\vec{p}}_i,\underline{\vec{q}}_i)\,a_i(\vec{q})$$

$$T_i = \delta(\vec{\tilde{p}}_i - \vec{\tilde{q}}_i)\, \omega_i(\vec{p})\, \mathcal{T}_i^{(2)}(P_0 - \omega_i(\vec{p}), \vec{\tilde{p}}_i, \vec{\underline{p}}_i, \vec{\underline{q}}_i) \tag{4.3}$$

$$\Phi_i^{(2)}(\vec{p}_i) = a_i^{-1}(\vec{p}) \left| \frac{D(\vec{\underline{p}}_i)}{D(\vec{\tilde{p}}_i)} \right| \phi_i^{(2)}(\vec{\underline{p}}_i) \tag{4.4}$$

$$G_i^{(2)} = G_{0i}^{(2)} + \frac{i}{\pi} G_{0i}^{(2)} W_i \; G_i^{(2)} \tag{4.5}$$

Здесь использована символическая запись, в которой $G_i^{(2)}$, $G_{0i}^{(2)}$ и $W_i^{(2)}$ рассматриваются как двухчастичные операторы.

$$G_i = \delta(\vec{\tilde{p}}_i - \vec{\tilde{q}}_i) \frac{\pi}{\omega_i(\vec{p})} G_i^{(2)}(P_0 - \omega_i(\vec{p}), \tilde{p}_i, \vec{\underline{p}}_i, \vec{\underline{q}}_i). \tag{4.6}$$

Выпишем некоторые соотношения, вытекающие из (4.1) – (4.6)

$$\mathcal{T}_i^{(2)} = W_i^{(2)} + \frac{i}{\pi} W_i^{(2)} G_{0i}^{(2)} \mathcal{T}_i^{(2)} \tag{4.7}$$

$$T_i = W_i + \frac{i}{\pi^2} W_i \, G_0 \, T_i \tag{4.8}$$

$$G_i^{(2)} = G_{0i}^{(2)} + \frac{i}{\pi} G_{0i}^{(2)} \mathcal{T}_i^{(2)} G_{0i}^{(2)} \tag{4.9}$$

$$G_i = G_0 + \frac{i}{\pi^2} G_0 \, T_i \, G_0 \tag{4.10}$$

$$G_i = G_0 + \frac{i}{\pi^2} G_0 \, W_i \, G_i . \tag{4.11}$$

Пусть $N_{\alpha\beta}$ и G – операторы перехода и функция Грина трех взаимодействующих частиц, отвечающие новому трехчастичному квазипотенциалу W. Это означает, что G удовлетворяет уравнению

$$G = G_0 + \frac{i}{\pi^2} G_0 \, W \, G , \tag{4.12}$$

а $N_{\alpha\beta}$, например, в приближении парного взаимодействия, удовлетворяет уравнению

$$N_{\alpha\beta} = \sum_{i\neq\alpha} W_i + \frac{i}{\pi^2} \sum_{i\neq\beta} N_{\alpha i} G_i W_i . \qquad (4.13)$$

Тогда нетрудно убедиться в том, что G и $N_{\alpha\beta}$ связаны между собой соотношением

$$G = G_\alpha + \frac{i}{\pi^2} G_\alpha N_{\alpha\beta} G_\beta , \qquad (4.14)$$

которое можно записать в виде:

$$G_0^{-1} + \frac{i}{\pi^2} N_{00} = G_0^{-1} G_\alpha G_0^{-1} + \frac{i}{\pi^2} G_0^{-1} G_\alpha N_{\alpha\beta} G_\beta G_0^{-1} . \qquad (4.13)$$

При переходе на массовую поверхность слева, как было показано в §3, получим физическую амплитуду рассеяния $1 + 2 + 3 \longrightarrow 1 + 2 + 3$, связная часть которой выражается через 8 независимых инвариантных переменных. Физическая область изменения аргументов $s_i=(p_j+p_k)$; $s_i' =(q_j + q_k)^2$, соответствующих собственным энергиям двух частиц, определяется неравенствами $s_i > (m_j + m_k)^2$. Однако, как известно, аналитическое продолжение физической амплитуды в область $s_i <(m_j + m_k)^2$ должно иметь полюса по переменным s_i в точках, отвечающих значениям масс двухчастичных связанных состояний. Выпишем физическую амплитуду рассеяния трех частиц вблизи некоторых полюсов:

$$[N_{00}] \approx \frac{\pi^3 g_\alpha^\mu \times T_{\alpha 0}^\mu}{S_\alpha - M_\alpha^2} \qquad (4.15)$$

$$[N_{0 0}] \approx \frac{i\pi^4 g^{\mu}_{a} \times T^{\mu\nu}_{a\beta} \times g^{+\nu}_{\beta}}{(S_a - M^2_a)(S'_\beta - M^2_\beta)} \tag{4.16}$$

$$[N_{00}] \approx \frac{\pi^3 T^{\nu}_{0\beta} \times g^{+\nu}_{\beta}}{s'_\beta - M^2_\beta} . \tag{4.17}$$

Здесь g^{μ}_{a} – формфактор вершины, в которую входят две частицы a -ой двухчастичной подсистемы и частица, соответствующая полюсу связанного состояния в этой подсистеме $s_a = M^2_a$, причем импульсы всех трех частиц лежат на массовой поверхности. Индексы μ и ν нумеруют возможные состояния частиц с массой M_a. $T_{a\beta}$ представляют физические T -матрицы переходов из состояния (β) x/ в состояние (a) x/. Следуя рассуждениям параграфа 2, для двухчастичных функций Грина вблизи полюса связанного состояния имеем:

$$G^{(2)}_a(P_0 - \omega_a(\vec{p}), \tilde{\vec{p}}_a, \vec{p}_{-a}, \vec{q}_{-a}) G^{(2)^{-1}}_{0a}(P_0 - \omega_a(\vec{p}), \tilde{\vec{p}}_a, \vec{q}_{-a})\Big|_{P_0 = \sum_i \omega_i(q)} \approx \tag{4.18}$$

$$\approx \frac{i\pi \Phi^{(2)\mu}_{a}(\vec{p}) \times g^{+\mu}_{a}}{(P_0 - \omega_a(\vec{p}))^2 - \vec{p}^{\,2}_a - M^2_a}$$

$$G^{(2)^{-1}}_{0a}(P_0 - \omega_a(\vec{p}), \vec{p}_a, \vec{p}_{-a}) G^{(2)}_a(P_0 - \omega_a(\vec{p}), \vec{p}_a, \vec{p}_{-a}, \vec{q}_{-a}) \approx \tag{4.19}$$

$$\approx \frac{i\pi g^{\mu}_{a} \times \Phi^{+(2)\mu}_{a}(\vec{q})}{(P_0 - \omega_a(\vec{p}))^2 - \vec{p}^{\,2}_a - M^2_a}$$

---

x/ Напомним, что в работе /1/ мы условились обозначать через (a) состояние, в котором a -ая частица свободна, а две остальные образуют связанную систему, если $a = 1,2,3$, и состояние трех свободных частиц, если $a = 0$.

3. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze, Nuovo Cim. 29,380 (1963).
4. A.N.Tavkhelidze, Lectures on Quasipotential Method in Field Theory, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1964.
В.Г. Кадышевский, А.Н. Тавхелидзе. Квазипотенциальный метод в релятивистской задаче двух тел. В сборнике, посвященном 60-летию Н.Н. Боголюбова, стр. 261, М., "Наука", 1969.
5. A.N.Kvinikhidze, D.Ts.Stoyanov, JINR preprint, E2-5746, Dubna (1971).

Рукопись поступила в издательский отдел
24 марта 1972 года.