6342

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 6342

Н.Н.Боголюбов, В.С.Владимиров, А.Н.Тавхелидзе

ОБ АВТОМОДЕЛЬНОЙ АСИМПТОТИКЕ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ. I

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

P2 - 6342

Н.Н.Боголюбов, В.С.Владимиров, А.Н.Тавхелидзе

ОБ АВТОМОДЕЛЬНОЙ АСИМПТОТИКЕ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ. I

§ I.

В настоящее время большое внимание уделяется теоретическим и экспериментальным исследованиям глубоконеупругих процессов взаимодействия лептонов с нуклонами, впервые выдвинутых в работах М.А.Маркова [I].

Такого рода исследования действительно представляют важную возможность изучения поведения матричных элементов коммутаторов токов вне энергетической поверхности, тогда как в случаях упругого рассеяния мы имеем дело с матричными элементами только на энергетической поверхности.

Так, например, в случае глубоконеупругого процесса рассеяния электрона на нуклоне:

$$e+N \to e+\ldots$$

соответствующие сечения определяются с помощью фурье-образа коммутаторов:

$$W_{\mu\nu}=\frac{1}{8\pi}\sum_{(\sigma)}\int\langle p,\sigma|[j_\mu(x),j_\nu(0)]|p,\sigma\rangle e^{iqx}dx, \qquad (\mathrm{I.I})$$

в которых j_ν – компоненты электромагнитного тока, q – четырехимпульс виртуального фотона: $q^2<0$, а матричные элементы берутся между одинаковыми однонуклонными состояниями $|p,\sigma\rangle$ с четырехимпульсом p массы M $(p^2=M^2)$ и спином σ $(\sigma=\pm\frac{1}{2})$. В качестве нормировки нуклонных состояний здесь используется обычная релятивистская нормировка:

$$\langle p,\sigma|p',\sigma'\rangle=2p^0(2\pi)^3\delta(\vec{p}-\vec{p}')\delta_{\sigma\sigma'}.$$

Асимптотические свойства изучаются в ситуации, когда:

$$-q^2 \to +\infty\ ;\ \nu = 2qp \to +\infty\ ;\ \xi = \frac{-q^2}{2qp} = const. \qquad (I.2)$$

Первые результаты в этом направлении были получены Бьеркеном[2] на основе алгебры токов, в дальнейшем получившие развитие в работах[3]. В работах[4] глубоконеупругие процессы лептонов с адронами и адронов с адронами изучались на основе обобщенного принципа автомодельности и анализа размерностей. В работах[5] эта проблема рассматривалась в рамках общих принципов квантовой теории поля.

В этой статье мы излагаем метод исследования асимптотического поведения выражений (I.I) на основе общих принципов локальной квантовой теории поля[7, 8]. Будут указаны условия, при которых в асимптотической области (I.2) имеет место автомодельное поведение выражений (I.I). Будет также установлена связь между характером автомодельного поведения и асимптотикой в окрестности светового конуса. Этот метод может быть непосредственно перенесен и на общую проблему глубоконеупругого взаимодействия лептонов с нуклонами.

Следует отметить, что исследование асимптотического поведения инклюзивных процессов с участием лишь адронов на основе общих принципов квантовой теории поля было дано в работах А.А.Логунова с сотрудниками[9].

Сделаем прежде всего ряд замечаний технического характера.

Тензор $W_{\mu\nu}(q,p)$ обычно выражают, учитывая закон сохранения электромагнитного тока, через две инвариантные функции $W_1(q,p)$ и $W_2(q,p)$:

$$W_{\mu\nu}=\left[-g_{\mu\nu}+\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right]W_1+\left(P_\mu-\frac{qP}{q^2}q_\mu\right)\left(P_\nu-\frac{qP}{q^2}q_\nu\right)\frac{W_2}{M^2}=$$

$$=\left[-g_{\mu\nu}+\frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right]\left[W_1+\frac{(qP)^2}{q^2M^2}W_2\right]+ \tag{I.3}$$

$$+\left[P_\mu P_\nu-(P_\mu q_\nu+q_\mu P_\nu)\frac{qP}{q^2}+g_{\mu\nu}\frac{(qP)^2}{q^2}\right]\frac{W_2}{M^2},$$

зависящие только от скалярных переменных q^2 и qP.

Положив

$$V_1=\frac{1}{q^2}\left[W_1+\frac{(qP)^2}{q^2M^2}W_2\right],\quad V_2=\frac{W_2}{q^2M^2}, \tag{I.4}$$

придадим представлению (I.3) "локальную" форму:

$$W_{\mu\nu}=(-g_{\mu\nu}q^2+q_\mu q_\nu)V_1+$$
$$+\left[P_\mu P_\nu q^2-(P_\mu q_\nu+q_\mu P_\nu)qP+g_{\mu\nu}(qP)^2\right]V_2. \tag{I.5}$$

При этом обычно исходят из утверждения о том, что фурье-образы $v_j(x,P)$ введенных функций $V_j(q,P)$ являются причинными [5], т.е. обращаются в нуль при $x^2<0$. Это утверждение однако пока не получило убедительного доказательства [6], и мы им пользоваться не будем. В качестве двух инвариантных причинных функций примем выражения:

$$F_1(q,P)=\frac{1}{M^2}\sum_{\mu,\nu}g_{\mu\mu}g_{\nu\nu}P_\mu P_\nu W_{\mu\nu}=\frac{P^\mu P^\nu}{M^2}W_{\mu\nu}, \tag{I.6}$$

$$F_2(q,p)=F_1(q,p)-\sum_{\mu} g_{\mu\mu} W_{\mu\mu}, \quad (g^{00}=-g^{11}=-g^{22}=-g^{33}=1) \qquad (I.7)$$

Учитывая релятивистскую инвариантность выражений (I.6) и (I.7), удобно перейти к системе отсчета, где $\vec{p}=0$. Тогда на основе (I.3) имеем:

$$W_{00}=\frac{\vec{q}^{\,2}}{q^2}W_1+\left(\frac{\vec{q}^{\,2}}{q^2}\right)^2 W_2,$$

$$W_{ij}=\left(\delta_{ij}+\frac{q_i q_j}{q^2}\right)W_1+\frac{q^{0\,2}}{q^4}\,q_i q_j W_2 \quad (i,j=1,2,3). \qquad (I.8)$$

Аналогично, из (I.6) и (I.7) получим, обозначая $F_j(q)=F_j(q,M\delta)$,

$$F_1(q)=W_{00}=\frac{1}{8\pi}\sum_{(\sigma)}\int\langle M,\sigma|[j_0(\tfrac{x}{2}),j_0(-\tfrac{x}{2})]|M,\sigma\rangle e^{iqx}dx,$$

$$F_2(q)=\sum_{i=1}^{3}W_{ii}=\frac{1}{8\pi}\sum_{i=1}^{3}\sum_{(\sigma)}\int\langle M,\sigma|[j_i(\tfrac{x}{2}),j_i(-\tfrac{x}{2})]|M,\sigma\rangle e^{iqx}dx. \qquad (I.9)$$

Отсюда убеждаемся в наличии следующих свойств:

$$F_j(q)=-F_j(-q),$$

$$\epsilon(q^0)F_j(q)\geq 0, \text{ если } q^2<0. \qquad (I.10)$$

Условие спектральности в этом случае принимает вид

$$F_j(q)=0, \text{ если } q^2+2M|q^0|<0. \qquad (I.11)$$

В произвольной системе отсчета функции F_j выражаются через $\{W_j\}$ по формуле

$$F_1=-\left(1+\frac{\nu}{4M^2\xi}\right)W_1+\left(1+\frac{\nu}{4M^2\xi}\right)^2 W_2,$$

$$F_2=\left(2-\frac{\nu}{4M^2\xi}\right)W_1+\frac{\nu}{4M^2\xi}\left(1+\frac{\nu}{4M^2\xi}\right)W_2 \qquad (I.12)$$

и обратно $$W_1 = \frac{-F_1}{2\left(1+\frac{4M^2\xi}{\nu}\right)} + \frac{F_2}{2},$$

$$W_2 = \frac{1}{2\left(1+\frac{\nu}{4M^2\xi}\right)^2}\left[\left(2-\frac{\nu}{4M^2\xi}\right)F_1 + \left(1+\frac{\nu}{4M^2\xi}\right)F_2\right] \tag{I.I3}$$

Установим еще одно неравенство между функциями F_1 и F_2. Для этого возьмем некоторый единичный вектор $\vec{e}$, ортогональный к вектору $\vec{q}$. Тогда из (I.8) найдем, что

$$\frac{1}{8\pi}\sum_{(\sigma)}\int \langle M,\sigma | [\vec{e}\vec{j}(x), \vec{e}\vec{j}(0)] | M,\sigma \rangle e^{iqx} dx = \sum_{i,j} e_i e_j W_{ij} = W_1 \tag{I.I4}$$

и, следовательно,

$$\epsilon(q^0) W_1 \geq 0, \text{ если } q^2 < 0. \tag{I.I5}$$

Поэтому, благодаря (I.I3),

$$\epsilon(\nu)\left(F_2 - \frac{F_1}{1+\frac{4M^2\xi}{\nu}}\right) \geq 0, \text{ если } \xi > 0 \tag{I.I6}$$

и, в частности,

$$F_2 \geq F_1 \geq 0, \text{ если } \xi > 0, \ \nu > 0. \tag{I.I7}$$

Заметим, что в случае токов свободных полей

$$W_1^\circ = \frac{\nu}{4M^2\xi} W_2^\circ \tag{I.I8}$$

и, следовательно, в силу (I.I2)

$$F_1^\circ = \frac{\nu}{4M^2\xi} W_2^\circ, \quad F_2^\circ = \frac{3\nu}{4M^2\xi} W_2^\circ, \tag{I.I9}$$

так что выражение

$$F_2^\circ - F_1^\circ = \frac{\nu}{2M^2\xi} W_2^\circ = 2W_1^\circ \tag{I.20}$$

стремится при $\nu \to +\infty$ к конечному, отличному от нуля, пределу.

Теперь обратимся к случаю токов взаимодействующих полей. Предположим, как и в случае свободных полей, что разность $F_2 - F_1$ также стремится при $\nu \to +\infty$ к конечному и отличному от нуля пределу. Тогда, учитывая, что главные члены разложений при $\nu \to +\infty$ в (I.13) равны соответственно:

$$W_1 \sim \frac{1}{2}(F_2 - F_1), \quad W_2 \sim \frac{2M^2\xi}{\nu}(F_2 - F_1), \tag{I.21}$$

устанавливаем справедливость асимптотического равенства в области (I.2)

$$W_1 \sim \frac{\nu}{4M^2\xi} W_2 . \tag{I.22}$$

Считая, что не только разность $F_2 - F_1$, но и каждая из величин F_j имеет конечный и отличный от нуля предел при $\nu \to +\infty$,

$$F_j(\xi, \nu) \sim F_j(\xi), \tag{I.23}$$

приходим к автомодельным формулам Бьеркена

$$W_1(\xi, \nu) \sim f_1(\xi), \quad \frac{\nu}{4M^2} W_2(\xi, \nu) \sim f_2(\xi), \tag{I.24}$$

где, в силу (I.21),

$$f_1(\xi) = \frac{1}{2}\left[F_2(\xi) - F_1(\xi)\right], \quad f_2(\xi) = \xi f_1(\xi) . \tag{I.25}$$

При этом, в силу (I.17), $f_1(\xi) \geq 0$.

В §2 мы показываем, что при некоторых дополнительных предположениях асимптотическое поведение инвариантных функций F_j в области (I.2) является автомодельным и имеет вид (см. (2.21)):

$$F_j(\xi,\nu) \sim \frac{2\pi M^3}{k_j+1} \nu^{k_j} \int_{\xi}^{1} \rho \psi_j(\rho)(\rho-\xi)^{k_j+1} d\rho \tag{I.26}$$

(при некотором $k_j > -1$).

Для получения дальнейшей информации об асимптотическом поведении необходимы дополнительные требования, вытекающие из динамики процесса. В частности, зная экспериментальное поведение функций $W_j(\xi,\nu)$, мы получаем возможность определить функции $\psi_j(\rho)$ и числа k_j в асимптотическом представлении (I.26).

Если потребовать, чтобы каждая из величин F_j имела конечный и отличный от нуля предел при $\nu \to +\infty$, то в асимптотическом равенстве (I.26) следует положить $k_j = 0$, и мы получаем

$$F_j(\xi,\nu) \sim 2\pi M^3 \int_{\xi}^{1} \rho \psi_j(\rho)(\rho-\xi) d\rho = F_j(\xi) \quad (j=1,2) \tag{I.27}$$

Если предположить, что функции $\psi_j(\rho)$ ограничены в окрестности точки $\xi = 1$, то правая часть (I.27) необходимо должна иметь в точке $\xi = 1$ нуль по крайней мере порядка 2,

$$F_j(\xi,\nu)\sim q_j\,(1-\xi)^2+\ldots \qquad (I.28)$$

В §3 найдено соответствующее асимптотическое поведение функций $\mathcal{F}_j(x,p)$ в окрестности светового конуса (см. формулу (3.I8) при $k=0$):

$$\mathcal{F}_j(x,p)\sim\frac{2i}{\pi}G_j(px)\,\frac{\mathcal{D}(x,0)}{x^2}\,,\quad x^2\sim 0, \qquad (I.29)$$

где .

$$G_j(z)=4\pi M^3\int_0^1\varphi_1^j(\xi)\cos z\xi\,d\xi \qquad (j=1,2) \quad (I.30)$$

Здесь всюду φ_k^j есть k - ая первообразная функции $\rho\psi_j(\rho)$, определяемая формулой (2.22).

В этом случае, когда в (I.27) выполнено условие

$$\int_0^1\rho^2\psi_j(\rho)d\rho=0, \qquad (I.3I)$$

асимптотика (I.29) принимает вид (см.(3.25)):

$$\mathcal{F}_j(x,p)\sim\frac{-4i}{\pi}Q_j(px)\frac{\partial}{\partial(px)}\mathcal{D}(x,0),\ x^2\sim 0, \qquad (I.32)$$

где

$$Q_j(z)=4\pi M^5\int_0^1\varphi_2^j(\xi)\sin z\xi\,d\xi\,. \qquad (I.33)$$

§ 2.

В этом параграфе мы исследуем асимптотическое поведение в области

$$-q^2 \to +\infty\,,\ \nu \doteq 2qp \to +\infty\,;\ \xi = \frac{-q^2}{2qp} = const \qquad (2.1)$$

функций F_1 и F_2, обладающих свойствами, перечисленными в § I.

Рассмотрим обобщенную функцию $\mathcal{F}$ медленного роста, зависящую от двух четырех-векторов и удовлетворяющую условиям:

I. $\mathcal{F}(x,p) = -\mathcal{F}(-x,p)$,

II. $\mathcal{F}(x,p) = 0$, если $x^2 < 0$,

III. $F(q,p) = 0$, если $\left|\frac{q^2}{2qp}\right| > 1 \quad (p^2 \doteq M^2)$,

IV. $\epsilon(q,p)F(q,p) \geq 0$, если $q^2 < 0$,

V. $F(\Lambda q, \Lambda p) = F(q,p)\,,\ \Lambda \in L_+^\uparrow$.

Здесь $F(q,p)$ есть фурье-образ $\mathcal{F}(x,p)$,

$$F(q,p) = \int \mathcal{F}(x,p)\, e^{iqx} dx\,.$$

В силу свойства V, задачу достаточно рассмотреть в системе покоя, где $p = (M, \vec{0})$. В этой системе отсчета функции

$$\mathcal{F}(x) \equiv \mathcal{F}(x, M, \vec{o}), \quad F(q) \equiv F(q, M, \vec{o})$$

зависят лишь от $x^0, |\vec{x}|$ и $q^0, |\vec{q}|$ соответственно и удовлетворяют следующим условиям:

I′. $F(q) = -F(-q)$,

II′. $\mathcal{F}(x) = 0$, если $x^2 < 0$,

III′. $F(q) = 0$, если

$$M - \sqrt{\vec{q}^{\,2} + M^2} < q^0 < -M + \sqrt{\vec{q}^{\,2} + M^2}, \tag{2.2}$$

IV′. $\epsilon(q^0) F(q) \geq 0$, если $q^2 < 0$.

Асимптотическая область (2.I) принимает вид:

$$-q^2 \to +\infty, \; \nu = 2Mq^0 \to +\infty; \; \frac{-q^2}{2Mq^0} = \xi, \; q^0 \sim |\vec{q}|. \tag{2.3}$$

Воспользуемся теперь для функции $F(q)$ известным интегральным представлением Йоста-Лемана-Дайсона [10] (см. также [11], симметричный случай):

$$F(q) = \int \epsilon(q^0)\, \delta\left[q^{0\,2} - (\vec{q} - \vec{u})^2 - \lambda^2\right] \psi(\vec{u}, \lambda^2)\, d\vec{u}\, d\lambda^2, \tag{2.4}$$

где $\psi(\vec{u}, \lambda^2)$ – некоторая обобщенная функция медленного роста, носитель которой содержится в множестве

$$\left[(\vec{u}, \lambda^2) : |\vec{u}| \leq M, \; \lambda^2 \geq \left(M - \sqrt{M^2 - \vec{u}^{\,2}}\right)^2\right].$$

Как следует из вывода представления (2.4), функция $\psi(\vec{r},\lambda^2)$ зависит лишь от $|\vec{r}|$ и λ^2. Поэтому представление (2.4) можно переписать в виде

$$F(q)=2\pi\epsilon(q^0)\int_0^\infty d\lambda^2\int_0^M r^2dr\,\psi(r,\lambda^2)\int_{-1}^{1}d\mu\,\delta(q^2-r^2+2r|\vec{q}|\mu-\lambda^2).$$

В переменных ξ,ν и $r=M\rho$ это представление принимает вид

$$F(\xi,\nu)=\frac{2\pi M^3\epsilon(\nu)}{|\nu|}\int_0^\infty d\lambda^2\int_0^1\rho^2d\rho\,\psi(\rho M,\lambda^2)\int_{-1}^{1}d\mu\,\times \tag{2.5}$$
$$\times\,\delta\left(\xi+\frac{\rho^2M^2}{\nu}+\frac{\lambda^2}{\nu}-\rho\mu\sqrt{1+\frac{4M^2\xi}{\nu}}\right).$$

Отметим, что из условий (2.2) следует, что

$$F(\xi,\nu)=0,\ \text{если}\ \ |\xi|>1. \tag{2.6}$$

Предположим, что обобщенная функция $\rho^2\psi(\rho M,\lambda^2)$, входящая в представление (2.5), локально абсолютно интегрируема по λ^2, т.е. для любой основной функции $\varphi(\rho)$ выражение

$$\left| \int_0^1 \psi(\rho M, \lambda^2) \varphi(\rho) \rho^2 d\rho \right|$$

есть обычная функция, интегрируемая по λ^2 на каждом конечном интервале.

Пусть $f(\xi)$ – произвольная бесконечно дифференцируемая финитная на $(0,\infty)$ функция. Умножая равенство (2.5) на $f(\xi)$ и "интегрируя" по ξ, при $\nu > 0$ получим[ж/]

$$\int F(\xi,\nu) f(\xi) d\xi = \frac{2\pi M^3}{\nu} \int_0^\infty d\lambda^2 \int_0^1 \rho^2 d\rho\, \psi(\rho M, \lambda^2) \int_{-1}^1 d\mu \int d\xi \times \tag{2.7}$$

$$\times \delta\left(\xi - \rho\mu + \frac{\lambda^2}{\nu} + \frac{\chi}{\nu}\right) f(\xi),$$

где обозначено

$$\chi \equiv \chi(\rho, \mu, \xi, \nu) = \rho^2 M^2 - \rho\mu\nu\left(\sqrt{1 + \frac{4M^2\xi}{\nu}} - 1\right). \tag{2.8}$$

При достаточно больших ν функция χ – аналитическая по всем аргументам и разлагается в ряд по обратным степеням ν:

$$\chi = \rho^2 M^2 - 2\rho M\mu\xi + \frac{2}{\nu}\rho M^2\mu\xi^2 + \dots,$$

ж/ Равенство (2.7) можно считать определением обобщенной функции $F(\xi,\nu)$ при каждом фиксированном $\nu > 0$.

равномерно сходящийся вместе со всеми своими производными по всем рассматриваемым аргументам (при условии, что ρ, μ и ξ изменяются в ограниченной области). Заметим, что интегрирование по λ^2 в (2.7) фактически производится по конечному интервалу, определяемому носителем функции f из условия $\xi = \rho\mu - \frac{\lambda^2}{\nu} - \frac{\chi}{\nu} > 0$, так что $0 \le \lambda^2 \le \nu + \alpha$ при некотором $\alpha > 0$, где $\alpha = \sup(-\chi)$.

Во внутреннем интеграле в (2.8) сделаем замену переменной интегрирования ξ по формуле:

$$z = \xi - \rho\mu + \frac{\chi}{\nu}, \quad \xi = z + \rho\mu + \frac{\chi_1}{\nu}, \quad \frac{d\xi}{dz} = 1 + \frac{\chi_2}{\nu}. \tag{2.9}$$

Из свойств функции χ вытекает, что функции $\chi_j(\rho,\mu,z,\nu)$ $(j=1,2)$ при достаточно больших ν обладают такими же свойствами, что и функция χ. Равенство (2.8) теперь принимает следующий вид:

$$\int F(\xi,\nu) f(\xi) d\xi = \frac{2\pi M^3}{\nu} \int_0^\infty d\lambda^2 \int_0^1 \rho^2 d\rho\, \Psi(\rho M, \lambda^2) \int_{-1}^{1} d\mu \int dz \times$$
$$\times f\left(z + \rho\mu + \frac{\chi_1}{\nu}\right)\left(1 + \frac{\chi_2}{\nu}\right)\delta\left(z + \frac{\lambda^2}{\nu}\right). \tag{2.10}$$

Снимая в (2.10) δ-функцию, получим далее

$$\int F(\xi,\nu) f(\xi) d\xi = \frac{2\pi M^3}{\nu} \int_0^\infty d\lambda^2 \int_0^1 \rho^2 d\rho\, \Psi(\rho M, \lambda^2) \int_{-1}^{1} d\mu \times \tag{2.11}$$
$$\times f\left(-\frac{\lambda^2}{\nu} + \rho\mu + \frac{\chi_1}{\nu}\right)\left(1 + \frac{\chi_2}{\nu}\right)$$

Заметим, что в (2.II) функции X_j зависят от λ^2 лишь через отношение $\frac{\lambda^2}{\nu}$, которое изменяется в ограниченном интервале, поскольку $0 \le \lambda^2 \le \nu + \alpha_1$, где $\alpha_1 = \sup X_1$.

Теперь мы ограничим класс рассматриваемых весовых функций $\rho^2\psi(\rho M, \lambda^2)$, предполагая, что, помимо условия локальной интегрируемости по λ^2, при некотором $k > -1$ существует слабый предел

$$\lim_{\lambda^2 \to +\infty} \frac{\rho^2 \psi(\rho M, \lambda^2)}{\lambda^{2k}} = \rho^2 \psi_0(\rho); \tag{2.I2}$$

это условие означает, что для любой основной функции $\varphi(\rho)$

$$\frac{1}{\lambda^{2k}} \int \psi(\rho M, \lambda^2) \varphi(\rho) \rho^2 d\rho \to \int \psi_0(\rho) \varphi(\rho) \rho^2 d\rho, \quad \lambda^2 \to +\infty.$$

Условие (2.I2) переписывается в виде:

$$\rho^2 \psi(\rho M, \lambda^2) = \theta(\lambda^2) \lambda^{2k} \rho^2 \psi_0(\rho) + \rho^2 \psi_1(\rho, \lambda^2), \tag{2.I3}$$

где

$$\rho^2 \varepsilon(\rho, \lambda^2) = \frac{\rho^2 \psi_1(\rho, \lambda^2)}{\lambda^{2k}} \to 0, \quad \lambda^2 \to +\infty. \tag{2.I4}$$

Подставляя выражения (2.I3) и (2.I4) в (2.II), получим

$$\int F(\xi, \nu) f(\xi) d\xi = J_1(\nu) + J_2(\nu), \tag{2.I5}$$

где

$$J_1(\nu)=\frac{2\pi M^3}{\nu}\int_0^\infty \lambda^{2k} d\lambda^2 \int_0^1 \rho^2 d\rho\, \psi_0(\rho) \int_{-1}^1 d\mu\, f\left(-\frac{\lambda^2}{\nu}+\rho\mu+\frac{X_1}{\nu}\right)\left(1+\frac{X_2}{\nu}\right), \tag{2.16}$$

$$J_2(\nu)=\frac{2\pi M^3}{\nu}\int_1^\infty \lambda^{2k} d\lambda^2 \int_0^1 \rho^2 d\rho\, \varepsilon(\rho,\lambda^2) \int_{-1}^1 d\mu\, f\left(-\frac{\lambda^2}{\nu}+\rho\mu+\frac{X_1}{\nu}\right)\left(1+\frac{X_2}{\nu}\right)+$$

$$+\frac{2\pi M^3}{\nu}\int_0^1 d\lambda^2 \int_0^1 \rho^2 d\rho\, \psi_1(\rho,\lambda^2) \int_{-1}^1 d\mu\, f\left(-\frac{\lambda^2}{\nu}+\rho\mu+\frac{X_1}{\nu}\right)\left(1+\frac{X_2}{\nu}\right). \tag{2.17}$$

В интеграле $J_1(\nu)$ сделаем замену переменной интегрирования $\lambda^2=\nu\tau$,

$$J_1(\nu)=2\pi M^3\nu^k\int_0^\infty d\tau\, \tau^k \int_0^1 \rho^2 d\rho\, \psi_0(\rho)\int_{-1}^1 d\mu\, f\left(-\tau+\rho\mu+\frac{X_1}{\nu}\right)\left(1+\frac{X_2}{\nu}\right)= \tag{2.18}$$

$$=2\pi M^3\nu^k\int_0^1 \rho^2 d\rho\, \psi_0(\rho)\int_0^\infty d\tau\, \tau^k\int_{-1}^1 d\mu\, f\left(-\tau+\rho\mu+\frac{X_1}{\nu}\right)\left(1+\frac{X_2}{\nu}\right).$$

Из свойств функций f и X_j вытекает предельное соотношение

$$\int_0^\infty d\tau\, \tau^k\int_{-1}^1 d\mu\, f\left(-\tau+\rho\mu+\frac{X_1}{\nu}\right)\left(1+\frac{X_2}{\nu}\right)\to\int_0^\rho d\tau\, \tau^k\int_{\tau/\rho}^1 d\mu\, f(\rho\mu-\tau)=$$

$$=\frac{1}{\rho(k+1)}\int_0^\rho f(\xi)(\rho-\xi)^{k+1}d\xi \quad \text{при} \quad \nu\to+\infty$$

вместе со всеми производными по ρ (в смысле равномерной сходимости по ρ на каждом конечном интервале). Поэтому в (2.18) возможен переход к пределу при $\nu \to +\infty$ под знаком интеграла, и мы получаем

$$\nu^{-k} J_1(\nu) \to \frac{2\pi M^3}{k+1} \int_0^1 \rho\, d\rho\, \Psi_0(\rho) \int_0^{\rho} d\xi\, f(\xi)\, (\rho-\xi)^{k+1} = \tag{2.19}$$

$$= \frac{2\pi M^3}{k+1} \int d\xi\, f(\xi) \int_{\xi}^{1} \rho\, d\rho\, \Psi_0(\rho)\, (\rho-\xi)^{k+1}.$$

Теперь рассмотрим интеграл $J_2(\nu)$. Имеем

$$\tau^k \int_{-1}^{1} d\mu\, f\left(-\tau+\rho\mu+\frac{x_1}{\nu}\right)\left(1+\frac{x_2}{\nu}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} R\left(\omega,\rho;\frac{1}{\nu}\right) e^{i\omega\tau}\, d\omega, \tag{2.20}$$

где $R(\omega,\rho;\frac{1}{\nu})$ – равномерно ограниченная функция при всех достаточно больших ν в топологии пространства быстро убывающих бесконечно дифференцируемых функций по ω и бесконечно дифференцируемых функций по ρ. Учитывая, что верхний предел интегрирования по λ^2 в (2.17) конечен и равен $\nu+\alpha_1$ и подставляя выражение (2.20) при $\tau=\frac{\lambda^2}{\nu}$ в первое слагаемое (2.17) и учитывая, что второе слагаемое в (2.17) порядка $\frac{1}{\nu}$, получим

$$J_2(\nu) = 2\pi M^3 \nu^{k-1} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_1^{\nu+\alpha_1} d\lambda^2\, e^{i\frac{\lambda^2}{\nu}\omega} \int_0^1 \rho^2 d\rho\, \varepsilon(\rho,\lambda^2)\, R\left(\omega,\rho;\frac{1}{\nu}\right) + O\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Откуда выводим

$$|\nu^{-k}J_2(\nu)|\le 2\pi M^3\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{\nu}\int_1^{\nu+\alpha_1}d\lambda^2\Big|\int_0^1\rho^2 d\rho\,\varepsilon(\rho,\lambda^2)R(\omega,\rho;\frac{1}{\nu})\Big|+O\Big(\frac{1}{\nu^{k+1}}\Big)=$$

$$=2\pi M^3\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{1+\omega^2}\frac{1}{\nu}\int_1^{\nu+\alpha_1}d\lambda^2\Big|\int_0^1\rho^2 d\rho\,\varepsilon(\rho,\lambda^2)(1+\omega^2)R(\omega,\rho;\frac{1}{\nu})\Big|+O\Big(\frac{1}{\nu^{k+1}}\Big)\to$$

$$\to 0,\ \nu\to+\infty.$$

Отсюда и из (2.19) и (2.15) вытекает асимптотическое равенство в области (2.1)

$$F(\xi,\nu)\sim 2\pi M^3\Gamma(k+1)\nu^k\varphi_{k+2}(\xi), \tag{2.21}$$

где обозначено

$$\varphi_k(\xi)=\frac{1}{\Gamma(k)}\int_\xi^1\rho\psi_0(\rho)(\rho-\xi)^{k-1}d\rho\,. \tag{2.22}$$

"Интеграл" в (2.22) следует понимать как k -ую первообразную[*] обобщенной функции $\rho\psi_0(\rho)$, обращающуюся в нуль при $\xi>1$.

Из неотрицательности функции $F(\xi,\nu)$ при $\xi>0$ и $\nu>0$ следует, что функция $\varphi_{k+2}(\xi)$ в (2.21) есть неотрицательная мера, определенная при $\xi>0$ (и обращающаяся в нуль при $\xi>1$). При $\xi=0$ эта мера не определена, и возможная неопределенность ее есть $C\delta(\xi)$.

---

[*] При k – нецелом определение первообразной см., например, в [12].

Таким образом, при условии (2.I2) имеет место автомодельное поведение (2.2I).

Теперь мы рассмотрим класс весовых функций $\rho^2\psi(\rho M,\lambda^2)$, абсолютно интегрируемых по λ^2 ; это означает, что для любой основной функции $\varphi(\rho)$

$$\int_0^\infty d\lambda^2 \left| \int \rho^2 d\rho\, \psi(\rho M,\lambda^2)\varphi(\rho)\right| < \infty .$$

Обозначим

$$\int_0^\infty d\lambda^2 \rho^2 \psi(\rho M,\lambda^2) = \rho^2 \psi_0(\rho). \qquad (2.23)$$

Из свойств функций f и χ_i вытекает, что последовательность функций

$$\int_{-1}^1 d\mu\, f\left(-\frac{\lambda^2}{\nu}+\rho\mu+\frac{\chi_1}{\nu}\right)\left(1+\frac{\chi_2}{\nu}\right), \quad \nu\to+\infty$$

равномерно ограничена по всем ρ и λ^2 и стремится к функции

$$\int_{-1}^1 f(\rho\mu)d\mu = \frac{1}{\rho}\int_0^\rho f(\xi)d\xi$$

равномерно по ρ и λ^2 в каждой конечной области вместе со всеми производными. Поэтому возможен переход к пределу при $\nu\to+\infty$ под знаком интеграла в (2.II), и мы получаем с учетом (2.23)

$$\frac{\nu}{2\pi M^3}\int F(\xi,\nu)f(\xi)d\xi \longrightarrow$$

$$\to \int_0^1 \rho d\rho\, \psi_0(\rho)\int_0^\rho f(\xi)d\xi = \int d\xi\, f(\xi)\int_\xi^1 \psi_0(\rho)\rho d\rho ,$$

т.е.

$$F(\xi,\nu)\sim\frac{2\pi M^3}{\nu}\int\limits_{\xi}^{1}\psi_0(\rho)\rho\,d\rho\,. \tag{2.24}$$

Учитывая обозначение (см. (2.22)), перепишем асимптотическое равенство (2.24) в виде:

$$F(\xi,\nu)\sim\frac{2\pi M^3}{\nu}\varphi_1(\xi). \tag{2.25}$$

Таким образом, при условии (2.23) имеет место автомодельное поведение (2.25). Напомним, что $\varphi_1(\xi)$ есть мера, она равна нулю при $\xi>1$. В точке $\xi=0$ она не определена и ее возможная неопределенность есть $C\delta(\xi)$.

§ 3.

Теперь изучим асимптотическое поведение вблизи светового конуса $x^2\sim 0$ функции $\mathcal{F}(x,p)$, удовлетворяющей условиям I – У § 2. В силу свойства лоренцовой инвариантности достаточно рассмотреть случай, когда $p=(M,\vec{0})$.

Применяя обратное преобразование Фурье к представлению (2.4), получим

$$\mathcal{F}(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int F(q)e^{-iqx}dq= \tag{3.1}$$

$$=-\frac{i}{2\pi}\int\limits_0^\infty \mathcal{D}(x,\lambda^2)\Delta(\vec{x},\lambda^2)d\lambda^2,$$

где $\mathcal{D}(x,\lambda^2)$, есть известная перестановочная функция для свободных скалярных полей частиц с массой λ^2 [13]:

$$\mathcal{D}(x,\lambda^2)=\frac{i}{(2\pi)^3}\int \epsilon(q^0)\delta(q^2-\lambda^2)e^{-iqx}dq\,; \qquad (3.2)$$

спектральная функция $\Delta(\vec{x},\lambda^2)\equiv\Delta(|\vec{x}|,\lambda^2)$ есть фурье-образ весовой функции $\psi(\vec{u},\lambda^2)\equiv\psi(|\vec{u}|,\lambda^2)$:

$$\Delta(r,\lambda^2)=\int\limits_{|\vec{u}|\le M}\psi(|\vec{u}|,\lambda^2)e^{i\vec{u}\vec{x}}d\vec{u}=4\pi\int\limits_0^M\psi(\rho M,\lambda^2)\frac{\sin\rho r}{r}\rho d\rho,$$

т.е.

$$\Delta\left(\frac{\tau}{M},\lambda^2\right)=4\pi M^3\int\limits_0^1\psi(\rho M,\lambda^2)\frac{\sin\rho\tau}{\tau}\rho d\rho,\quad \tau=rM. \qquad (3.3)$$

Из (3.3) следует, что функция $\Delta\left(\frac{\tau}{M},\lambda^2\right)$ - целая аналитическая по τ, полиномиально ограниченная вместе со всеми производными на вещественной оси.

Сначала рассмотрим тот случай, когда выполнено условие (2.12). В этом случае, в силу (2.13), функция $\Delta\left(\frac{\tau}{M^2},\lambda^2\right)$ представляется в виде:

$$\Delta\left(\frac{\tau}{M},\lambda^2\right)=4\pi M^3\theta(\lambda^2)\lambda^{2k}\int\limits_0^1\psi_0(\rho)\frac{\sin\rho\tau}{\tau}\rho d\rho+\Delta_1(\tau,\lambda^2), \qquad (3.4)$$

где обозначено

$$\Delta_1(\tau,\lambda^2)=4\pi M^3\int\limits_0^1\psi_1(\rho,\lambda^2)\frac{\sin\rho\tau}{\tau}\rho d\rho\,;$$

при этом, в силу (2.14),

$$\frac{|\Delta_1(\tau,\lambda^2)|}{\lambda^{2k}}\to 0\,,\ \lambda^2\to+\infty. \qquad (3.5)$$

равномерно по τ на $(-\infty, \infty)$ вместе со всеми производными по τ.

В произвольной системе отсчета формула (3.I) принимает следующий вид:

$$\mathcal{F}(x,p) = -\frac{i}{2\pi}\int_0^\infty \mathcal{D}(x,\lambda^2)\Delta\left[\sqrt{\left(\frac{px}{M}\right)^2 - x^2},\ \lambda^2\right] d\lambda^2. \qquad (3.6)$$

<u>Замечание</u>. Интеграл в (3.6) быстро сходится в смысле теории обобщенных функций. Действительно, $\Delta\left(\frac{\tau}{M^2}, \lambda^2\right)$ – полиномиального роста по λ^2, а для любой основной функции $\varphi(x)$ (из $\mathcal{S}$) справедлива оценка

$$\left|\int \mathcal{D}(x,\lambda^2)\varphi(x)dx\right| \leq \frac{K_N(\varphi)}{1+\lambda^{2N}}$$

при любом $N \geq 0$.

Для вычисления главного члена асимптотики функции $\mathcal{F}(x,p)$ в окрестности $x^2 \sim 0$ представим ее в соответствии с (3.4) в виде суммы двух слагаемых:

$$\mathcal{F}(x,p) = I_1(x,p) + I_2(x,p); \qquad (3.7)$$

где

$$I_1(x,p) = -\frac{i}{2\pi} 4\pi M^2 \int_0^\infty d\lambda^2 \lambda^{2k} \mathcal{D}(x,\lambda^2) \int_0^1 \frac{\sin \rho\sqrt{(px)^2 - M^2x^2}}{\sqrt{(px)^2 - M^2x^2}} \psi_0(\rho)\rho d\rho, \qquad (3.8)$$

$$I_2(x,p) = -\frac{i}{2\pi}\int_0^\infty d\lambda^2 \mathcal{D}(x,\lambda^2)\Delta_1\left[\sqrt{(px)^2 - M^2x^2},\ \lambda^2\right]. \qquad (3.9)$$

Для получения главного члена асимптотики интеграла I_1 вычислим

$$\int_0^\infty \lambda^{2k}\mathcal{D}(x,\lambda^2)\,d\lambda^2=\frac{i}{(2\pi)^3}\int_0^\infty d\lambda^2\lambda^{2k}\int \epsilon(q^0)\delta(q^2-\lambda^2)e^{-iqx}dq=$$

$$=\frac{i}{(2\pi)^3}\int\epsilon(q^0)(q^2)^k\theta(q^2)e^{-iqx}dq=-4(-\Box)^k\left[\frac{\mathcal{D}(x,0)}{x^2}\right]. \tag{3.10}$$

Здесь мы воспользовались формулой [11]

$$\Box\left[\epsilon(q^0)\theta(q^2)\right]=4\epsilon(q^0)\,\delta(q^2). \tag{3.11}$$

Поэтому

$$I_1(x,p)\sim\frac{2i}{\pi}G(px)(-\Box)^k\left[\frac{\mathcal{D}(x,0)}{x^2}\right],\quad x^2\sim 0, \tag{3.12}$$

где обозначено

$$G(z)=4\pi M^3\int_0^1 \psi_0(\rho)\,\frac{\sin\rho z}{z}\,\rho\,d\rho\,. \tag{3.13}$$

Если $\rho\psi_0(\rho)$ есть мера, то функция $G(z)$ выражается через функцию $\varphi_1(\xi)$, определяемую формулой (2.22) при $k=1$, по формуле

$$G(z)=4\pi M^3\int_0^1\varphi_1(\xi)\cos z\xi\,d\xi\,. \tag{3.14}$$

Теперь покажем, что интеграл I_2 имеет более слабую особенность на световом конусе, чем интеграл I_1. Из (3.9) имеем:

$$I_2(x,p)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^\infty d\lambda^2\Delta_1\left(\sqrt{(px)^2-M^2x^2},\lambda^2\right)\int\epsilon(q^0)\delta(q^2-\lambda^2)e^{-iqx}dq= \tag{3.15}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^4}\int\epsilon(q^0)\theta(q^2)\Delta_1\left(\sqrt{(px)^2-M^2x^2},\,q^2\right)e^{-iqx}dq\,.$$

Отсюда, в силу свойств функции Δ_1, следует, что в окрестности светового конуса $x^2 \sim 0$ имеет место асимптотическое равенство

$$I_2(x,p) \sim \frac{1}{(2\pi)^4} \int \epsilon(q^0)\theta(q^2)\Delta_1(px,q^2) e^{-iqx} dq. \qquad (3.16)$$

Введем псевдодифференциальный оператор $\Delta_1(px,-\Box)$, определив действие его на основные функции $\varphi(x)$ из $\mathcal{S}$ по правилу

$$\Delta_1(px,-\Box)\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \Delta_1(px,q^2)\tilde{\varphi}(q) e^{-iqx} dq, \qquad (3.17)$$

где $\tilde{\varphi}(q)$ – фурье-образ $\varphi(x)$. Расширим оператор $\Delta_1(px,-\Box)$ на обобщенные функции обычным способом. Тогда правая часть (3.16) переписывается в виде:

$$I_2(x,p) \sim \Delta_1(px,-\Box) \int \epsilon(q^0)\theta(q^2) e^{-iqx} dq =$$

$$= \frac{2i}{\pi} \Delta_1(px,-\Box) \left[\frac{\mathcal{D}(x,0)}{x^2} \right], \quad x^2 \sim 0,$$

здесь мы воспользовались формулой (3.11). В силу (3.5), псевдодифференциальный оператор $\Delta_1(px,-\Box)$ имеет более слабые особенности в окрестности $x^2 \sim 0$, чем оператор $(-\Box)^k$; следовательно, интеграл I_2 будет менее сингулярным при $x^2 \sim 0$, чем интеграл I_1.

Таким образом, в силу (3.7) и (3.12), мы имеем в окрестности $x^2 \sim 0$ следующее асимптотическое поведение функции $\mathcal{F}(x,p)$,

$$\mathcal{F}(x,p) \sim \frac{2i}{\pi} G(px)(-\Box)^k \left[\frac{\mathcal{D}(x,0)}{x^2} \right], \tag{3.18}$$

где функция $G(px)$ связана с функцией $\varphi_{k+2}(\xi)$, определяющей автомодельное поведение (2.21), формулой (3.14).

Найдем асимптотику функции $\mathcal{F}(x,p)$ при $x^2 \sim 0$ в том частном случае, когда $k=0$, $\rho\psi_0(\rho)$ – мера и

$$\int_0^1 \psi_0(\rho)\rho^2 d\rho = 0. \tag{3.19}$$

Тогда первообразная $\varphi_2(\xi)$ обращается в нуль при $\xi=0$. В этом случае, в силу (3.18), имеем:

$$\mathcal{F}(x,p) \sim \frac{2i}{\pi} G(px) \frac{\mathcal{D}(x,0)}{x^2}, \quad x^2 \sim 0, \tag{3.20}$$

где, в силу (3.13) и (3.19),

$$G(z) = 4\pi M^3 z \int_0^1 \psi_0(\rho) \left(\frac{\sin \rho z}{\rho z} - 1 \right) \frac{\rho^2}{z} d\rho =$$

$$= -4\pi M^3 z \int_0^1 \varphi_2(\xi) \sin z\xi \, d\xi = -\frac{z}{M^2} Q(z), \tag{3.21}$$

где

$$Q(z) = 4\pi M^5 \int_0^1 \varphi_2(\xi) \sin z\xi \, d\xi. \tag{3.22}$$

Подставляя (3.21) в (3.20), найдем при $x^2 \sim 0$

$$\mathcal{F}(x,p) \sim \frac{-2i}{\pi} Q(px) \frac{px}{M^2} \frac{i}{(2\pi)^3} \int \epsilon(q^0)\theta(q^2) e^{-iqx} dq = \tag{3.23}$$

$$= \frac{-2}{\pi M} Q(x^0 M) \frac{i}{(2\pi)^3} \int \frac{\partial}{\partial q^0} [\epsilon(q^0)\theta(q^2)] e^{-iqx} dq.$$

Принимая во внимание тождество

$$\frac{\partial}{\partial q^0}\left[\epsilon(q^0)\theta(q^2)\right]=2q^0\epsilon(q^0)\delta(q^2), \qquad (3.24)$$

продолжим равенство (3.23)

$$\mathcal{F}(x,p)\sim -\frac{4}{\pi M}Q(x^0M)\frac{i}{(2\pi)^3}\int q^0\epsilon(q^0)\delta(q^2)e^{-iqx}dq =$$

$$=-\frac{4i}{\pi M}Q(x^0M)\frac{\partial}{\partial x^0}\mathcal{D}(x,0),$$

т.е.

$$\mathcal{F}(x,p)\sim -\frac{4i}{\pi}Q(px)\frac{\partial}{\partial(px)}\mathcal{D}(x,0),\ x^2\sim 0, \qquad (3.25)$$

где коэффициент $Q(px)$ связан формулой (3.23) с функцией $\varphi_2(\xi)$, определяющей автомодельное поведение (2.21) функции $F(\xi,\nu)$ (при $K=0$).

Теперь рассмотрим случай, когда весовая функция $\rho^2\psi(\rho M,\lambda^2)$ абсолютно интегрируема по λ^2. В этом случае спектральная функция $\Delta\left(\frac{\tau}{M},\lambda^2\right)$ также абсолютно интегрируема по λ^2 на $[0,\infty)$.

Так как главная особенность функции $\mathcal{D}(x,\lambda^2)$ в окрестности $x^2\sim 0$ есть $\mathcal{D}(x,0)$, то, пользуясь (3.6), (2.23), мы можем написать

$$\mathcal{F}(x,p)\sim -\frac{i}{2\pi}\mathcal{D}(x,0)\int_0^\infty \Delta\left[\sqrt{\left(\frac{px}{M}\right)^2-x^2},\lambda^2\right]d\lambda^2\sim$$

$$\sim -\frac{i}{2\pi}\mathcal{D}(x,0)\int_0^\infty \Delta\left(\frac{px}{M},\lambda^2\right)d\lambda^2=$$

$$=-\frac{i}{2\pi}\mathcal{D}(x,0)\,4\pi M^3\int_0^\infty d\lambda^2\int_0^1\rho d\rho\,\psi(\rho M,\lambda^2)\frac{\sin\rho px}{\rho x},$$

т.е.

$$\mathcal{F}(x,p) \sim -\frac{i}{2\pi} G(px)\mathcal{D}(x,0), \quad x^2 \sim 0, \qquad (3.26)$$

где обозначено

$$G(z) = 4\pi M^3 \int_0^1 \rho\, d\rho\, \psi_0(\rho) \frac{\sin \rho z}{z}. \qquad (3.27)$$

Отсюда, предполагая, что $\rho\psi_0(\rho)$ – мера, из (2.25) выводим

$$G(z) = 4\pi M^3 \int_0^1 \varphi_1(\xi) \cos z\xi\, d\xi. \qquad (3.28)$$

Таким образом, опять коэффициент $G(px)$ при главной части особенности (3.26) в окрестности светового конуса выражается по формуле (3.28) через функцию $\varphi_1(\xi)$, определяющую автомодельное поведение (2.25).

Авторы признательны Д.И.Блохинцеву, А.А.Логунову, М.А.Маркову, В.А.Матвееву, Р.М.Мурадяну, О.А.Хрусталеву, В.П.Шелесту, Д.В.Ширкову за плодотворные дискуссии.

Цитированная литература

I. М.А.Марков, Нейтрино, " Наука", 1964, Препринт ОИЯИ, Е2-4370, Дубна (1969).

2. I.D.Bjorken, Lectures Varenna School, Course 41, Varenna, Italy (1967).

3. Broken Scale invariance and the light cone, Lectures from the Coral Gables conference on fundamental interactions at high energy, January 20-22, 1971.

4. В.А.Матвеев, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе, Сообщения ОИЯИ Р2-5443, Р-4578, Р2-4824, Дубна,(1969).
Проблемы физики элементарных частиц и атомного ядра, ЭЧАЯ, т.2, вып.I, стр.7 (1970).
A.Tavkhelidze, Deep inelastic lepton-hadron interaction. Proceedings of the Coral Gables conference. (1970).
V.A.Matveev, R.M.Muradyan, A.N.Tavkhelidze, Preprint JINR E2-5962 (1971).

5. H.Leutwyler, J.Stern, Nuclear Phys., B20, 77 (1970),
R.A.Brandt, Phys.Rev., D1, 2801 (1970),
R.Jackiw, R.Van Royen and G.B.West, Phys.Rev. D2, 2473 (1971).

6. J.W.Meyer and H.Suura, Phys.Rev., 160, 1366 (1967).

7. Н.Н.Боголюбов, А.А.Логунов, И.Т.Тодоров, Основы аксиоматического подхода в квантовой теории поля", "Наука", 1969.

8. Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев, М.К.Поливанов, "Вопросы теории дисперсионных соотношений", Физматгиз, 1958.

9. А.А.Логунов, М.А.Мествиришвили, Нгуен ван Хьеу, Препринт ИФВЭ 67-49-К, Серпухов,(1967).
А.А.Логунов, Нгуен Ван Хьеу, О.А.Хрусталев, Сборник, посвященный Н.Н.Боголюбову в связи с его шестидесятилетием. "Наука",1969.

В.В.Ежела, А.А.Логунов, М.А.Мествиришвили, Препринт ИФВЭ, СТФ, 71-99, Серпухов, 1971.
А.А.Логунов, М.А.Мествиришвили, О.А.Хрусталев, ТМФ, т. 9, № 1-2 (1971).

10. R.Jost and H.Lehmann, Nuovo Cimento 5, 1598 (1957), F.J.Dyson, Phys, Rev., 110, 579 (1958).
11. В.С.Владимиров "Методы теории функций многих комплексных переменных", "Наука", 1964.
12. В.С.Владимиров, "Уравнения математической физики", изд. II., "Наука", 1971.
13. Н.Н.Боголюбов, Д.В.Ширков. "Введение в теорию квантованных полей", ГТТИ, 1957.

Рукопись поступила в издательский отдел
22 марта 1972 г.