ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6334

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Г.В.Ефимов, В.Г.Малышкин, О.А.Могилевский,
Х.Намсрай

ПОПРАВКИ К АНОМАЛЬНОМУ МАГНИТНОМУ МОМЕНТУ ЛЕПТОНОВ В НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

1972

P2 - 6334

Г.В.Ефимов, В.Г.Малышкин,[1] О.А.Могилевский,[2]
Х.Намсрай

ПОПРАВКИ К АНОМАЛЬНОМУ МАГНИТНОМУ МОМЕНТУ ЛЕПТОНОВ В НЕЛОКАЛЬНОЙ ТЕОРИИ СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Направлено в ЯФ

[1] Саратовский государственный университет
[2] Институт теоретической физики АН УССР

Ефимов Г.В., Малышкин В.Г.,
Могилевский О.А., Намсрай Х.

P2-6334

Поправки к аномальному магнитному моменту лептонов в нелокальной теории слабых взаимодействий

В рамках последовательной нелокальной квантовой теории поля рассматриваются две модели слабых взаимодействий: четырехфермионное и с промежуточным W -бозоном. В низшем порядке теории возмущений вычислены вклады этих взаимодействий в аномальный магнитный момент лептонов. На основании экспериментальных данных получены ограничения на величину элементарной длины l .

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1972

Efimov G.V., Malyshkin V.G.,
Mogilevsky O.A., Namsray Kh.

P2-6334

Corrections to Anomalous Lepton Magnetic Moment in Nonlocal Theory of Weak Interactions

Two models of weak interactions: four-fermion one and that with an intermediate W- boson - are considered in the framework of successive nonlocal quantum field theory. The contributions of these interactions to the anomalous lepton magnetic momenta are calculated in the lowest order of perturbation theory. The constraints to the value of the experimental length l are obtained basing on the experimental data.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1972

Введение

В последнее время заметно усилился интерес к экспериментальной проверке локальности квантовой теории поля. При этом обычно ставятся два основных вопроса:

1) определение эффективности того или иного опыта в смысле проникновения в область малых длин;

2) извлечение информации об элементарной длине из уже имеющихся опытных данных.

Ответ на эти вопросы может быть решен следующим образом. В выражение для измеряемой величины A вводятся факторы, нарушающие локальность. В результате A приобретает поправочный член δA, зависящий от ℓ, энергии E и т.п. Тогда можно написать соотношение (Δ – точность эксперимента)

$$|\delta A(\ell, E)| \underset{\approx}{<} \Delta. \tag{B.1}$$

При решении вопроса 1) используют знак $\approx$, в этом случае соотношение показывает, до каких ℓ можно продвинуться в данном опыте. Что же касается вопроса 2), то здесь нужно использовать знак $<$, тогда неравенство (B.1) дает оценку на ℓ, совместимую с экспериментом, в котором нет расхождения с локальной теорией.

Как видно из (В.1), имеются различные пути проникновения в область малых длин. В частности, используются эксперименты при высоких энергиях, но со сравнительно невысокой точностью. Второй путь связан с использованием процессов при малых энергиях, но с высокой точностью. Сюда относятся, прежде всего, измерения магнитных моментов электрона /1/, мюона /2/ и измерение лэмбовского сдвига.

Вычисление поправок к аномальному магнитному моменту электрона и мюона проводилось многими авторами. В частности, оценки вкладов за счет различных вариантов слабого и сильного взаимодействия проделаны в работах /3-7/. Подобные вычисления требуют привлечения методов нелокальной теории, и надежные оценки могут быть получены в рамках последовательной схемы введения нелокальности. Мы имеем в виду отсутствие трудностей, связанных с нарушением унитарности, причинности, градиентной инвариантности.

Обычно при расчете поправок за счет четырехфермионного слабого взаимодействия используется регуляризационная процедура Паули-Вилларса в формализме Гупта /8,9/. Эта процедура эквивалентна введению в теорию формфакторов из класса мероморфных функций. Как известно, это приводит к появлению дополнительных особенностей в амплитудах физических процессов и, следовательно, к нарушению унитарности и причинности S -матрицы. Вклад промежуточных W -бозонов учитывается в рамках ξ - формализма Ли и Янга /11/, предполагающего наличие в теории состояний с индефинитной метрикой. Помимо уже перечисленных трудностей, этот подход реально может быть использован лишь в низших порядках теории возмущений. На это указывает, хотя бы, расхождение в результатах, полученных различными авторами (см. сводку в /6/).

Несколько лет тому назад в работах [10] была построена самосогласованная нелокальная теория скалярного поля, которая затем была обобщена на случай электродинамики [17] и слабых взаимодействий [12,13]. Использование в качестве формфакторов целых функций и подходящий выбор промежуточной регуляризации позволили построить S – матрицу, удовлетворяющую в каждом порядке по константе связи требованиям конечности, унитарности, макропричинности и градиентной инвариантности.

В настоящей работе в рамках такого подхода вычислены поправки к аномальному магнитному моменту лептона. Рассмотрен вклад за счет четырехфермионного слабого взаимодействия, а также вклад промежуточного W – бозона, выяснен физический смысл формфактора.

1. Постановка задачи

Исходный лагранжиан, описывающий электромагнитное и слабое взаимодействие лептонов и заряженного векторного бозона, выбирается в форме [x]:

$$\mathfrak{L}(x) = \mathfrak{L}_0(x) + \mathfrak{L}_{em}(x) + \mathfrak{L}_w(x) \tag{1.1}$$

---

[x] Нами принята следующая система обозначений:

$$\gamma_\alpha \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_\alpha = 2g_{\alpha\beta}, \quad O_\alpha = \gamma_\alpha(1+\gamma_5), \quad \gamma_5^2 = 1,$$

$$g_{\alpha\beta} = 0 \text{ при } \alpha \neq \beta, \quad g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1$$

$$\hat{p} = p_0\gamma_0 - \vec{p}\,\vec{\gamma}, \quad (kp) = p_0 k_0 - \vec{p}\vec{k}$$

При переходе к евклидовой метрике амплитуда

$$F^E(p_1, p_2, \ldots, p_n) = F(p_1^E, p_2^E, \ldots, p_n^E),$$

$$p^E = (ip_4, \vec{p}),$$

$$\mathfrak{L}_0 = -\frac{1}{2} : \partial_\alpha A_\beta(x)\,\partial_\alpha A_\beta(x) : -\frac{1}{2} : G_{\mu\nu}(x)\,G^{+}_{\mu\nu}(x) : +$$

$$+ M^2 : W_\mu(x)\,W^{+}_\mu(x) : + \sum_a : \overline{\Psi}_a (i\hat{\partial} - m_a)\Psi_a : \tag{1.2}$$

$$\mathfrak{L}_{em} = -e : \bar{L}(x)\hat{A}(\ell;x)L(x) : + \tag{1.3а}$$

$$+ ie : \{W_\mu(x)\,G^{+}_{\mu\nu}(x) - G_{\mu\nu}(x)\,W^{+}_\mu(x)\} : A_\nu(\ell;x) +$$

$$+ e^2 : \{W_\mu(x)\,W^{+}_\nu(x) - g_{\mu\nu}W_\lambda(x)\,W^{+}_\lambda(x)\} : A_\mu(\ell;x)\,A_\nu(\ell;x) \tag{1.3б}$$

$$\mathfrak{L}_w = \begin{cases} f : [\bar{L}(x)O_a\,\nu(\ell;x)W_a(x) + \bar{\nu}(\ell;x)O_a\,L(x)W^{+}_a(x)] : & (1.4а) \\ \text{или} & \\ \frac{G}{\sqrt{2}} : (\bar{L}(x)O_a\,\nu(\ell,x))(\bar{\nu}(\ell;x)O_a\,L(x)) : & (1.4б) \end{cases}$$

Здесь $A_\mu(\ell;x)$ – электромагнитное поле, $W_\mu(x)$ поле заряженного векторного бозона массы M.

$$G_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu W_\nu(x) - \partial_\nu W_\mu(x) \tag{1.5}$$

Для лептонных полей принята запись в виде двухкомпонентных спиноров

$$L(x) = L^{(j)}(x) = \begin{Bmatrix} e(x) \\ \mu(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Psi_e(x) \\ \Psi_\mu(x) \end{Bmatrix} \tag{1.6}$$

$$L(\ell;x) = \nu^{(j)}(x) = \begin{Bmatrix} \nu_e(\ell;x) \\ \nu_\mu(\ell;x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Psi_{\nu_e}(\ell;x) \\ \Psi_{\nu_\mu}(\ell;x) \end{Bmatrix}$$

Суммирование в (1.2) идет по фермионным полям $(a = e, \mu, \nu_e, \nu_\mu)$ $f^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} G M^2$, где G – универсальная константа слабого взаимодействия $(G = 10^{-5}/m_p$.

Нелокальность в лагранжиан взаимодействия входит через поля нейтральных частиц

$$A_\mu(\ell;x) = K_A(\ell_A^2\Box)A_\mu(x) = \int d^4y\, K_A(x-y)A_\mu(y) \tag{1.7}$$

$$\nu(\ell;x) = K_\nu(\ell_\nu^2\Box)\nu(x) = \int d^4y\, K_\nu(x-y)\,\nu(y),$$

при этом $K_j(x-y) = K_j(\ell_j^2\Box)\delta^{(4)}(x-y)$ принадлежит подходящему пространству нелокальных обобщенных функций /10/, а параметры ℓ_A и ℓ_ν имеют смысл элементарной длины.

"Хронологические" спаривания операторов заряженных полей определим обычным образом:

$$S_c^{(ij)}(x-y) = \langle 0|\,T\,[L^{(i)}(x)\bar{L}^{(j)}(y)]\,|0\rangle =$$

$$= \frac{\delta_{ij}}{(2\pi)^4 i}\int d^4p\,\frac{\hat{p}+m_j}{m_j^2-p^2-i\epsilon}\,e^{-ip(x-y)} \tag{1.8}$$

$$\Delta^{(1)}_{\alpha\beta}(x-y) = \langle 0|\,T\,[W_\alpha(x)W^+_\beta(y)]\,|0\rangle = \tag{1.9}$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{g_{\alpha\beta}-p_\alpha p_\beta/M^2}{M^2-p^2-i\epsilon}\,e^{-ip(x-y)}$$

$$\Delta^{(2)}_{\mu\nu;\alpha}(x-y) = \langle 0|\,T\,[G_{\mu\nu}(x)W^+_\alpha(y)]\,|0\rangle = \tag{1.10}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{p_\mu g_{\nu\alpha}-p_\nu g_{\mu\alpha}}{M^2-p^2-i\epsilon}\,e^{-ip(x-y)}$$

$$\Delta^{(2+)}_{\alpha;\mu\nu}(x-y) = \langle 0|\,T\,[W_\alpha(x)G^+_{\mu\nu}(y)]\,|0\rangle = \tag{1.11}$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4p\,\frac{p_\mu g_{\nu\alpha}-p_\nu g_{\mu\alpha}}{M^2-p^2-i\epsilon}\,e^{-ip(x-y)}$$

$$\Delta^{(3)}_{\mu\nu;\alpha\beta}(x-y) = \langle 0 | T[G_{\mu\nu}(x) G^{+}_{\alpha\beta}(y)] | 0 \rangle =$$

$$= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4p \, \frac{p_\mu p_\alpha g_{\nu\beta} + p_\nu p_\beta g_{\mu\alpha} - p_\mu p_\beta g_{\nu\alpha} - p_\nu p_\alpha g_{\mu\beta}}{M^2 - p^2 - i\epsilon} e^{-ip(x-y)} \tag{1.12}$$

Причинные же функции нейтральных нейтринного и фотонного полей запишем в форме [12]:

$$S_c^{\nu(ij)}(x-y) = \langle 0 | T[\nu^{(i)}(\ell;x) \bar{\nu}^{(j)}(\ell;y)] | 0 \rangle =$$

$$= K_\nu(\ell_\nu^2 \Box_x) K_\nu(\ell_\nu^2 \Box_y) \langle 0 | T[\nu^{(i)}(x) \nu^{(j)}(y)] | 0 \rangle = \tag{1.13}$$

$$= \frac{\delta_{ij}}{(2\pi)^4 i} \int d^4p \, \frac{[K_\nu(\ell_\nu^2 p^2)]^2}{-\hat{p} - i\epsilon} e^{-ip(x-y)}$$

$$D_{\alpha\beta}(x-y) = \langle 0 | T[A_\alpha(\ell;x) A_\beta(\ell;y)] | 0 \rangle = K_A(\ell_A^2 \Box_x) K_A(\ell_A^2 \Box_y) \langle 0 | T(A_\alpha(x) A_\beta(x)) | 0 \rangle$$

$$= -\frac{g_{\alpha\beta}}{(2\pi)^4 i} \int d^4p \, \frac{[K_A(\ell_A^2 p^2)]^2}{-p^2 - i\epsilon} e^{-ip(x-y)} . \tag{1.14}$$

Этот выбор соответствует так называемому T^* – произведению Вика [14]. В соответствии с результатами [10,12,13] будем предполагать, что формфакторы $[K_i(\ell_i^2 p^2)]^2 = V_i(-\ell_i^2 p^2)$ удовлетворяют условиям:

(1) $V(z)$ – целая функция порядка роста $1/2 \leq \rho < 1$

(2) $[V(z)]^* = V(z^*)$ (1.15)

(3) $V(x) > 0$

(4) $V(0) = 1$ (5) $\int_0^\infty du\, u^2 V(u) < \infty$.

Свойства (1.15), как показано в работах /10-13/, позволяют сформулировать регуляризационную процедуру, в рамках которой построенная S -матрица конечна, унитарна, макропричинна и градиентно-инвариантна в каждом порядке теории возмущений.

2. Вычисление нейтринной петли

Прежде чем приступить к оценке вклада в аномальный магнитный момент лептона за счет слабых четырехфермионных взаимодействий, рассмотрим диаграмму

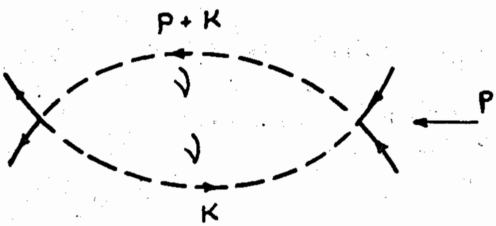

Рис. 1.

Соответствующий член S - матрицы, после проведения в (1.46) преобразования Фирца (см., например, /15/) может быть записан в форме

$$-\frac{G^2}{2} i : (\bar{L}(x) O_\alpha L(x)) \Pi_{\alpha\beta}(x-y) (\bar{L}(y) O_\beta L(y)) :$$

где $\Pi_{\alpha\beta}(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4 p\, e^{-ip(x-y)} \Pi_{\alpha\beta}(p)$, (2.1)

$$\Pi_{\alpha\beta}(p) = +\frac{i}{(2\pi)^4}\int d^4k\,Sp\,(\hat{k}\,O_\alpha\,(\hat{k}+\hat{p})O_\beta)\frac{V(-k^2\ell_\nu^2)V(-(p+k)^2\ell_\nu^2)}{[-k^2-i\epsilon][-(p+k)^2-i\epsilon]}\,.$$

Существует /10/ регуляризационная процедура R^δ, позволяющая перейти в этом выражении к евклидовой метрике. Тогда

$$\Pi^E_{\alpha\beta}(p) = \frac{-1}{(2\pi)^4}\int d^4k\,Sp\,(\hat{k}\,O_\alpha(\hat{k}+\hat{p})\,O_\beta)\frac{V(k^2\ell_\nu^2)\,V((p+k)^2\ell_\nu^2)}{k^2(p+k)^2} = \tag{2.2}$$

$$= -\int d^4x\,e^{ipx}\,Sp\,(S_c^{\nu E}(x)O_\alpha\,S_c^{\nu E}(x)\,O_\beta)\,.$$

Интегрирование в (2.2) ведется по 4-мерному евклидову пространству, $px = p_4x_4 + \vec{p}\,\vec{x}$.

Пропагатор нейтрино представим в виде

$$S_c^{\nu E}(x) = \frac{2\hat{x}i}{(2\pi)^2}\,\frac{1}{x^4}\,W\left(\frac{x^2}{\ell_\nu^2}\right), \tag{2.3}$$

где функция

$$W\left(\frac{x^2}{\ell_\nu^2}\right) = \frac{x^2}{2}\int_0^\infty dk.k\;V(k^2\ell_\nu^2)\,J_2(\sqrt{k^2x^2}) \tag{2.4}$$

благодаря условиям (1.15), обладает свойствами

$$W\left(\frac{x^2}{\ell_\nu^2}\right) = \begin{cases} 1 + O\left(\exp\left[-\left(\frac{x^2}{\ell_\nu^2}\right)\right]^\gamma\right), & x^2 \to \infty \\[2ex] \frac{x^4}{32\ell^4}\int_0^\infty du\cdot u\,V(u) + O\left(\frac{x^6}{\ell_\nu^6}\right), & x^2 \to 0 \end{cases} \tag{2.5}$$

$$(\gamma = \rho/(2\rho - 1)).$$

Подставляя (2.3) и (2.4) в (2.2), мы приходим к выражению:

$$\Pi^E_{\alpha\beta}(p) = -\frac{8}{\pi^4}\left(g_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial p^2} - 2p_\alpha p_\beta \frac{\partial^2}{\partial (p^2)^2}\right)\int d^4x\, e^{ipx}\,\frac{W^2(x^2/\ell_\nu^2)}{x^8} -$$

$$-\frac{2}{\pi^4} g_{\alpha\beta}\int d^4x\, e^{ipx}\,\frac{W^2(x^2/\ell_\nu^2)}{x^6} = -\frac{32}{\pi^4}\left(g_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial p^2} - 2p_\alpha p_\beta\frac{\partial^2}{\partial (p^2)^2}\right)\times$$

$$\times\int\limits_0^\infty \frac{dr}{r^6\sqrt{p^2}}\, W^2(r^2/\ell_\nu^2)\, J_1(\sqrt{p^2r^2}) - \tag{2.6}$$

$$-\frac{8}{\pi^2} g_{\alpha\beta}\int\limits_0^\infty \frac{dr}{r^4\sqrt{p^2}}\, W^2(r^2/\ell_\nu^2)\, J_1(\sqrt{p^2r^2})\,.$$

Воспользуемся далее представлением функции Бесселя

$$J_1(z) = \frac{z}{4i}\int\limits_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} d\zeta\,\frac{\left(\frac{z^2}{4}\right)^\zeta}{\sin\pi\zeta\,\Gamma(1+\zeta)\,\Gamma(2+\zeta)} \qquad (0<\beta<1) \tag{2.7}$$

и введем функцию

$$v(\zeta) = \frac{1}{\Gamma(2-\zeta)}\,w(\zeta) = \frac{1}{\Gamma(2-\zeta)}\int\limits_0^\infty du\, u^{\zeta-3}\, W^2(u) \tag{2.8}$$

аналитическую в полуплоскости $Re\,\zeta > -2$ (см. (25)) и имеющую нули I порядка в точках $\zeta = 3,4\ldots$

Тогда

$$\Pi^E_{\alpha\beta}(p) = g_{\alpha\beta}\,\Pi^E_1(p^2) + p_\alpha p_\beta\,\Pi^E_2(p^2), \tag{2.9}$$

где

$$\Pi_1^E(p^2) = \frac{i}{\pi}\int\limits_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} d\zeta\,\frac{(p^2)^{\zeta}\ell_{\nu}^{2\zeta-2}(1+\zeta)v(1+\zeta)}{2^{2\zeta}\Gamma(\zeta)\Gamma(1+\zeta)\Gamma(3+\zeta)\sin^2\pi\zeta} \tag{2.10}$$

и

$$\Pi_2^E(p^2) = \frac{i}{2\pi}\int\limits_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} d\zeta\,\frac{(p^2)^{\zeta}\ell_{\nu}^{2\zeta}v(2+\zeta)}{2^{2\zeta}\Gamma^2(1+\zeta)\Gamma(4+\zeta)\sin^2\pi\zeta}\,. \tag{2.11}$$

Формулы (2.9)-(2.11) задают искомое разложение $\Pi_{\alpha\beta}(p^2)$ по степеням ℓ .

3. Вклад четырехфермионного слабого взаимодействия в аномальный магнитный момент лептона

Допустим, что слабое взаимодействие лептонов реализуется в форме (1.4б). В низшем порядке по G поправка к аномальному магнитному моменту лептона связана с двумя диаграммами

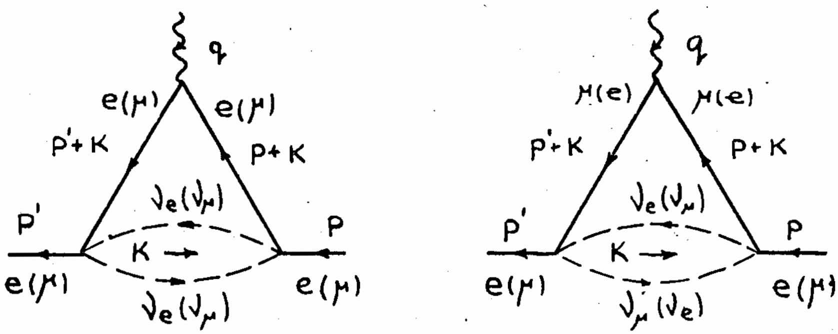

Рис. 2.

отвечающими "диагональному" и "недиагональному" членам в (1.4б). Элемент S -матрицы, соответствующий этим диаграммам, можно представить в виде:

$$-ie : (L(x)\Lambda^{\mu}(x, z/y) L(z)) A_{\mu}(y) : ,$$

где

$$\Lambda^{\mu}(x, z/y) = \frac{1}{(2\pi)^8} \int e^{ip(z-x)+iq(y-x)} \Lambda^{\mu}(p, q)\, d^4p\, d^4q ,$$

$$\Lambda^{\mu}(p, q) = \frac{G^2}{2i(2\pi)^4} \int d^4k\, \Pi_{\alpha\beta}(k) \times \sum_{j=e,\mu} O_{\alpha} \frac{m_j + \hat{p}' + \hat{k}}{(p' + k)^2 - m_j^2 + i\epsilon} \times \tag{3.1}$$

$$\times \gamma^{\mu} \frac{m_j + \hat{p} + \hat{k}}{(p + k)^2 - m_j^2 + i\epsilon} O_{\beta} .$$

Здесь p', p - внешние импульсы, $q = p' - p$.

Пользуясь регуляризационной процедурой R^{δ}, перейдем в (3.1) к евклидовой метрике и учтем вклад члена Π_1 (2.10). Тогда

$$\Lambda_{\mu}^{E(1)} = \frac{G^2}{8i\pi^5} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} d\zeta \frac{\ell_{\nu}^{2\zeta-2} (1+\zeta)\, \nu(1+\zeta)}{2^{2\zeta}\Gamma(\zeta)\Gamma(1+\zeta)\Gamma(3+\zeta)\sin^2 \pi\zeta} \times \tag{3.2}$$

$$\times \sum_{j=e,\mu} \int d^4k \frac{[(\hat{p} + \hat{k})\gamma_{\mu}(\hat{p}' + \hat{k}) + m_j^2 \gamma_{\mu}](1 + \gamma_5)}{[(p+k)^2 + m_j^2][(p'+k)^2 + m_j^2]} (k^2)^{\zeta} .$$

Примем во внимание далее формулу Фейнмана

$$\frac{1}{b_1^{\mu_1}\ldots b_n^{\mu_n}} = \frac{\Gamma(\mu_1+\ldots+\mu_n)}{\Gamma(\mu_1)\ldots\Gamma(\mu_n)} \int_0^1 da_1\ldots da_n\,\delta(1-\Sigma a_j)\frac{a_1^{\mu_1-1}\ldots a_n^{\mu_n-1}}{[\sum_{j=1}^{n} b_j a_j]^{\mu_1+\ldots\mu_n}} \quad (3.3)$$

и удержим в (3.2) члены, дающие вклад в аномальный магнитный момент. После интегрирования по k и перехода на массовую поверхность лептонов $(p^2 = p'^2 = m_L^2)$, мы получим:

$$\Lambda_\mu^{(1)}(q) = \Lambda_\mu^{(1)}(p,q)\big|_{p^2=p'^2=m_L^2} = -\frac{G^2 m_L \sigma_{\mu\nu} q^\nu}{(2\pi)^3}\times$$

$$\times\int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} d\zeta \frac{\ell^{2\zeta-2}\,v(1+\zeta)}{2^{2\zeta}\Gamma(\zeta)\Gamma(1+\zeta)\Gamma(3+\zeta)\sin^2\pi\zeta}\sum_{j=e,\mu}\times \quad (3.4)$$

$$\times\int_0^1 da\, a^{-1-\zeta}(1-a)^{1+\zeta}(1+a)[m_j^2 - a m_L^2]^\zeta .$$

Аналогично член Π_2 (2.11) приводит к выражению

$$\Lambda_\mu^{(2)}(q) = \frac{G^2 m_L \sigma_{\mu\nu} q^\nu}{4(2\pi)^3}\int_{-\beta'+i\infty}^{-\beta'-i\infty} d\zeta \frac{\ell_\nu^{2\zeta}\,v(2+\zeta)\Gamma(-1-\zeta)}{2^{2\zeta}\Gamma(-\zeta)\Gamma^2(1+\zeta)\Gamma(4+\zeta)\sin^2\pi\zeta}\times$$

$$(1<\beta'<2) \quad (3.5)$$

$$\sum_{j=e,\mu}\int_0^1 da\, a^{-1-\zeta}(1-a)^{2+\zeta}[m_j^2 - a m_L^2]^\zeta [(1-3a)+(1+\zeta)(1-a)^2] .$$

Объединяя (3.4) и (3.5), мы приходим к следующей поправке для аномального момента лептона:

$$\delta a_L^{weak} = \frac{i m_L^2 G^2}{12\pi^3 \ell_\nu^2} \sum_{j=e,\mu} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} d\zeta \, \frac{v(1+\zeta)\,\Gamma(2-\zeta)\left(\frac{m_j^2 \ell_\nu^2}{4}\right)^{\zeta}}{\sin^2 \pi\zeta \, \Gamma(\zeta)\,\Gamma(1+\zeta)} \times$$

$$\times \, {}_2F_1\left(-\zeta, 2-\zeta; 4; \frac{m_L^2}{m_j^2}\right) =$$

$$= -\frac{m_L^2 G^2 v(1)}{3\pi^4 \ell_\nu^2} - \sum_{j=e,\mu} \frac{m_L^2 m_j^2 G^2 v(2)}{24\pi^4} \times$$

$$\times \, {}_2F_1\left(-1, 1; 4; \frac{m_L^2}{m_j^2}\right)\left[\ln \frac{m_j^2 \ell_\nu^2}{4} + \frac{v'(2)}{v(2)} - 2\Psi(1) - \right. \tag{3.6}$$

$$\left. - \Psi(3) + \frac{{}_2F_1'(-\zeta, 1-\zeta; 4; m_L^2/m_j^2)}{{}_2F_1(-1, 1; 4; m_L^2/m_j^2)}\, \zeta = 1 \right] -$$

$$- \frac{m_L^2 G^2}{6\pi^4} \sum_{j=e,\mu} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{m_j^2 \ell_\nu^2}{4}\right)^n \frac{v(1+n)\, {}_2F_1(-n, 2-n; 4; m_L^2/m_j^2)}{(1-n)(n-1)!\,(n+1)!} \times$$

$$\times \left[\ln \frac{m_j^2 \ell_\nu^2}{4} + \frac{v'(1+n)}{v(1+n)} - \Psi(n) - \Psi(2+n) + \frac{1}{1-n} + \frac{{}_2F_1'\left(-\zeta, 2-\zeta; 4; \frac{m_L^2}{m_j^2}\right)}{{}_2F_1(-n, 2-n; 4; m_L^2/m_j^2)}\right].$$

В предположении малости $m_j^2 \ell_\nu^2 \ll 1$ имеем окончательно :

$$\delta a_L^{weak} = -\frac{m_L^2 G^2 v(1)}{3\pi^4 \ell_\nu^2} - \sum_{j=e,\mu} \frac{m_L^2 m_j^2 G^2 v(2)}{24\pi^4}\left(1 - \frac{1}{4}\frac{m_L^2}{m_j^2}\right) \ln \frac{m_j^2 \ell_\nu^2}{4} . \tag{3.7}$$

В настоящее время экспериментальные значения аномальных магнитных моментов

$$a_{exp}(e^-) = 0{,}5(\alpha/\pi) - 0{,}32846(\alpha/\pi)^2 + (0{,}54 \pm 0{,}58)(\alpha/\pi)^3$$

$$a_{exp}(\mu) = (11661{,}6 \pm 3{,}1)\,10^{-7}$$

полностью объясняются квантовой электродинамикой /16/. Поэтому естественно считать, что вычисленные нами вклады - порядка или меньше экспериментальной погрешности. Это дает возможность установить следующие ограничения на параметр нелокальности

$$\begin{aligned} \ell_\nu &\gtrapprox 10^{-19}\, v^{1/2}(1) \qquad (e) \\ \ell_\nu &\gtrapprox 10^{-17}\, v^{1/2}(1) \qquad (\mu) \end{aligned} \tag{3.8}$$

$v(1)$ - числовой параметр, связанный с формфактором $V(z)$. Роль его будет выяснена в §5.

4. Вклад промежуточного W - бозона в аномальный магнитный момент лептона

Предположим, что слабое взаимодействие лептонов осуществляется в форме (1.4а). Подобная модель интересна тем, что уже во втором порядке по f (т.е. в первом порядке по G) возникает поправка к аномальному магнитному моменту за счет диаграммы

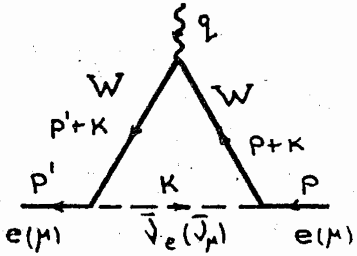

Рис. 3.

Соответствующий член S – матрицы имеет вид:

$$-ie : \bar{L}(x)\Lambda^{\mu}(x,z/y)L(z) : A_{\mu}(y)$$

$$\Lambda^{\mu}(x,z/y) = \frac{1}{(2\pi)^8}\int e^{ip(z-x)+iq(y-x)}\Lambda^{\mu}(p,q)\,d^4p\,d^4q = \tag{4.1}$$

$$= f^2 O_a\{S_c^{\nu}(x-z)\Delta^{(2+)}_{a,\mu\nu}(x-y)\Delta^{(1)}_{\nu,\beta}(y-z) - S_c^{\nu}(x-z)\Delta^{(1)}_{a,\nu}(x-y)\Delta^{(2)}_{\mu\nu,\beta}(y-z)\}\times O_{\beta}$$

Прежде чем приступить к дальнейшим вычислениям, заметим, что свойства (1.15) формфактора $V(z)$ позволяют представить его в форме:

$$V(z) = \frac{1}{2i}\int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} d\zeta\,\frac{u(\zeta)}{\sin\pi\zeta\,\Gamma(1+\zeta)}\left(\frac{z}{4}\right)^{\zeta}, \quad (2<\beta<3) \tag{4.2}$$

где функция

$$u(\zeta) = 2^{2\zeta}\frac{1}{\Gamma(-\zeta)}\int_0^{\infty}\frac{dt\,V(t)}{t^{1+\zeta}} \tag{4.3}$$

аналитична в полуплоскости $Re\,\zeta > -3$. Используя приведенное представление $V(z)$, а также (1.9)-(1.13), получаем для $\Lambda^{\mu}(p,q)$ в евклидовой метрике

$$\Lambda^{E}_{\mu}(p,q) = \frac{f^2}{(2\pi)^4}\int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} d\zeta\,\frac{u(\zeta)\ell_{\nu}^{2\zeta}}{\sin\pi\zeta\cdot 2^{2\zeta}\Gamma(1+\zeta)}\int d^4k\,\gamma_a\,\hat{k}\,\times$$

$$\times\frac{\{[(k+p')_{\mu}g_{\nu a}-(k+p')_{\nu}g_{\mu a}][g_{\nu\beta}-(k+p)_{\nu}(k+p)_{\beta}/M^2]+(p'\leftrightarrow p)\}}{(k^2)^{1-\zeta}[(k+p)^2+M^2][(k+p')^2+M^2]}\times \tag{4.4}$$

$$\times \gamma_\beta (1+\gamma_5) = \frac{f^2}{(2\pi)^4} \int\limits_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} d\zeta \frac{u(\zeta)\ell_\nu^{2\zeta}\Gamma(3-\zeta)}{2^{2\zeta}\Gamma(1+\zeta)\Gamma(1-\zeta)\sin\pi\zeta} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 d\alpha_1 d\alpha_2 d\alpha_3 \alpha_1^{-\zeta} \delta(1 - \Sigma\alpha_i) \times \tag{4.4}$$

$$\times \int d^4k \frac{f_\mu^E(k - \alpha_2 p - \alpha_3 p')}{[k^2 + A^E]^{3-\zeta}} (1+\gamma_5) .$$

Здесь введены следующие обозначения

$$f_\mu^E(k) = \gamma_\alpha \hat{k} \{[(k+p')_\mu g_{\nu\alpha} - (k+p')_\nu g_{\mu\alpha}][g_{\nu\beta} - (k+p)_\nu (k+p)_\beta / M^2] +$$

$$+(\text{члены} \quad p' \leftrightarrow p)\} \gamma_\beta \tag{4.5}$$

$$A^E = (1-\alpha_1)M^2 + \alpha_2(1-\alpha_2)p_E^2 + \alpha_3(1-\alpha_3)p_E'^2 - 2\alpha_2\alpha_3(p_E p_E')$$

Выделяя в $f_\mu^E(k - \alpha_2 p - \alpha_3 p')$ члены, четные по k и дающие вклад в аномальный магнитный момент, получаем:

$$f_\mu^E(k - \alpha_2 p - \alpha_3 p') = G_\mu^E(p, p') + \frac{k^2}{M^2} \mathcal{F}_\mu^E(p, p') , \tag{4.7}$$

где

$$G^E_\mu(p,p') = 2(a_2\hat{p} + a_3\hat{p}')[(1-a_3)p' - a_2 p]_\mu + [(1-a_2)\hat{p} - a_3\hat{p}'] \cdot \times$$

$$\times (a_2\hat{p} + a_3\hat{p}')[(1-a_2)\hat{p} - a_3\hat{p}'][(1-a_3)p' - a_2 p]_\mu / M^2 +$$

$$+ (\text{члены} \begin{array}{c} a_2 \leftrightarrow a_3 \\ p \leftrightarrow p' \end{array}) \qquad (4.8)$$

$$\mathcal{F}^E_\mu(p,p') = 2[(1-a_3)p' - a_2 p]_\mu [(1-a_2)\hat{p} - a_3\hat{p}'] +$$

$$+ \frac{1}{2}(a_2\hat{p} + a_3\hat{p}')[(1-a_3)p' - a_2 p]_\mu + \frac{1}{4}[(1-a_2)\hat{p} - a_3\hat{p}']\gamma_\mu [(1-a_2)\hat{p} - a_3\hat{p}'] +$$

$$+ (\text{члены} \begin{array}{c} a_2 \leftrightarrow a_3 \\ p \leftrightarrow p' \end{array}) \qquad (4.9)$$

Подставляя (4.7) в (4.4), получим после интегрирования по k

$$\Lambda^E_\mu(p,q) = \frac{f^2}{16\pi^2} \int\limits_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} d\zeta \frac{u(\zeta)\ell_\nu^{2\zeta}\Gamma(-\zeta)}{2^{2\zeta}\Gamma(1+\zeta)\Gamma(1-\zeta)\sin\pi\zeta} \times \qquad (4.10)$$

$$\times \int\limits_0^1 da_1 da_2 da_3 \delta(1 - \Sigma a_j) a_1^{-\zeta} A_E^{\zeta-1} [\frac{2A_E}{M^2}\mathcal{F}^E_\mu(p,p') - \zeta G^E_\mu(p,p')].$$

Рассмотрим теперь это выражение на массовой поверхности лептонов $(p^2 = p'^2 = m_L^2)$. Поправка к аномальному магнитному моменту представляется в виде:

$$\delta a_L^W = \frac{m_L^2 f^2}{8\pi^2 i M^2} \int\limits_{-\gamma+i\infty}^{-\gamma-i\infty} d\zeta \frac{u(\zeta)\Gamma(\zeta)\Gamma(2-\zeta)}{\sin\pi\zeta\,\Gamma^2(1+\zeta)} f_1(\zeta)(\frac{M^2\ell_\nu^2}{4})^\zeta + \qquad (4.11)$$

$$+\frac{i m_L^2 f^2}{4\pi^2 M^2}\int\limits_{-\gamma+i\infty}^{-\gamma-i\infty} d\zeta\,\frac{u(\zeta)\Gamma(2-\zeta)}{\sin\pi\zeta\,\Gamma(1+\zeta)}\,f_2(\zeta)\left(\frac{M^2\ell_\nu^2}{4}\right)^{\zeta}+$$

$$+\frac{i m_L^4 f^2}{8\pi^2 M^4}\int\limits_{-\gamma+i\infty}^{-\gamma-i\infty} d\zeta\,\frac{u(\zeta)\Gamma(4-\zeta)}{\sin\pi\zeta\,\Gamma(1+\zeta)}\,f_3(\zeta)\left(\frac{M^2\ell_\nu^2}{4}\right)^{\zeta},$$

где

$$f_1(\zeta)=\frac{1}{\Gamma(2-\zeta)}\int_0^1 da\,a^{1-\zeta}(1-a)^{1+\zeta}(1+4a)\left(1-a\frac{m_L^2}{M^2}\right)^{\zeta} \qquad (4.12\text{а})$$

$$f_2(\zeta)=\frac{1}{\Gamma(2-\zeta)}\int_0^1 da\,a^{1-\zeta}(1-a)^{\zeta}\left(1-a\frac{m_L^2}{M^2}\right)^{\zeta-1} \qquad (4.12\text{б})$$

$$f_3(\zeta)=\frac{1}{\Gamma(4-\zeta)}\int_0^1 da\,a^{3-\zeta}(1-a)^{\zeta}\left(1-a\frac{m_L^2}{M^2}\right)^{\zeta-1} \qquad (4.12\text{в})$$

аналитичны в полуплоскости $Re\,\zeta>-1$.

Выражение (4.11) дает искомое разложение δa_L^W по степеням $(\ell_\nu^2 M^2)$. В предположении, что $\ell_\nu^2 M^2 \ll 1$ и $m_L^2/M^2 \ll 1$, легко получить

$$\delta a_L^W = \frac{m_L^2 G}{8\pi^2\sqrt{2}}\left[\ln\frac{M^2\ell_\nu^2}{4} - \frac{m_L^2}{M^2} + u'(0) - \Psi(1) - \frac{5}{6} + O(M^2\ell_\nu^2)\right]. \qquad (4.13)$$

Если считать $\ell_\nu \approx 10^{-17}$ см, а $M \approx 20$ Гэв, то

$$\delta a_l^W \approx -10^{-13}, \qquad \delta a_\mu^W \approx -0,5\cdot 10^{-8}.$$

Мы видим, что хотя поправка δa_L^W имеет место уже в первом порядке по G, величина ее при разумных значениях M и ℓ_ν мала, т.е. эффекты нелокальности в данной модели спрятаны столь глубоко, что не существует почти никаких надежд обнаружить их экспериментально.

5. К вопросу о выборе формфактора

В полученные нами выражения (3.7) и (4.11) входят неизвестные функции $v(z)$ и $u(z)$. Можно ли, руководствуясь какой-либо физической идеей, выбрать эти функции, или, что то же самое, формфактор $V(z)$ однозначно.

Как было показано в работе /17/, введение нелокальности в квантовую электродинамику соответствует изменению кулоновского потенциала:

$$\phi(r) = \begin{cases} \dfrac{e}{4\pi^2}\cdot\dfrac{1}{\ell}\displaystyle\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}}V(u) + O\left(\frac{r^2}{\ell^2}\right) & r \ll \ell \\[2ex] \dfrac{e}{4\pi}\cdot\dfrac{1}{r}\left[1 + O\left(\exp\left\{-\left(\dfrac{r^2}{\ell^2}\right)^\gamma\right\}\right)\right] & r \gg \ell,\ \gamma > 1. \end{cases}$$

Таким образом, потенциал $\phi(r)$ конечен при $r = 0$ и убывает при $r\to\infty$, причем при $r \gg \ell$ отклонение $\phi(r)$ от кулоновского порядка $O(\exp\{-(\frac{r^2}{\ell^2})^\gamma\}),\ \gamma > 1.$

В теории четырехфермионного слабого взаимодействия, рассматривая в статическом пределе диаграмму

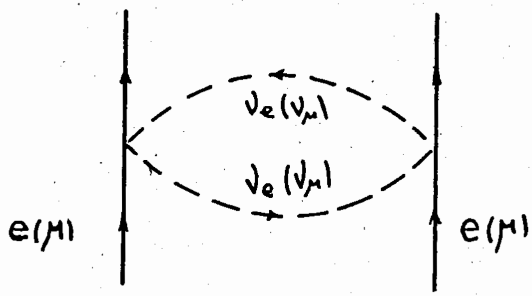

Рис. 4.

можно получить "слабый потенциал"

$$V^{weak}(\vec{r}) = (1+\vec{\sigma}_1\vec{\sigma}_2)\,V_1(r) + (\vec{\nabla}\vec{\sigma}_1)(\vec{\nabla}\vec{\sigma}_2)\,V_2(r). \tag{5.1}$$

При этом

$$V_1(r) = \frac{G}{\sqrt{2}(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\vec{r}}\,\Pi_1(k^2)\,d\vec{k} = \frac{G\sqrt{2}}{\pi^4}\,\frac{1}{r^5}\int_1^\infty \frac{dt}{t^4}\,\times$$
$$\times\,(t-2)\,W^2(tr^2/\ell^2)(t-1)^{-1/2} \tag{5.2}$$

$$V_2(r) = -\frac{G}{\sqrt{2}(2\pi)^3}\int e^{i\vec{k}\vec{r}}\,\Pi_2(k^2)\,d\vec{k} = -\frac{2\sqrt{2}G}{3\pi^4}\,\frac{1}{r^3}\int_1^\infty dt\,\frac{W^2(tr^2/\ell^2)(t-1)^{3/2}}{t^4} \tag{5.3}$$

Благодаря свойствам (2.5) формфактора $W(x^2/\ell^2)$, функции $V_1(r)$ и $V_2(r)$ регулярны при $r = 0$, а отклонение их от локальных потенциалов

$$V_1^{loc}(r) = -\frac{G}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{2\pi^3}\cdot\frac{1}{r^5} \tag{5.4}$$

$$V_2^{loc}(r) = -\frac{G}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{2\pi^3}\,\frac{1}{r^3} \tag{5.5}$$

при $r \gg \ell$ порядка $O(\exp\{-(\frac{r^2}{\ell^2})^{\gamma}\})$, $\gamma > 1$.

Формулы (2.10), (2.11) и (5.2), (5.3) можно обратить. В этом случае мы придем к выражению функции $v(z)$ через $V_1(r)$ или $V_2(r)$. Например:

$$v(1+\zeta) = \frac{\sqrt{2}}{G}\,\frac{8\pi^2\Gamma(\zeta)\Gamma(1+\zeta)\Gamma(3+\zeta)\sin\pi\zeta}{\Gamma(3+2\zeta)}\,\frac{2^{2\zeta}}{\ell^{2\zeta-2}}\int_0^\infty dr\, r^{2\zeta+2}V_1(r). \tag{5.6}$$

Требование сходимости графов Фейнмана означает, что функция $v(z)$ аналитична в полуплоскости $Re\, z > -2$. Это накладывает определенные ограничения на $V_1(r)$, а именно:

$$\int_0^\infty dr\, V_1(r) = 0\,. \tag{5.7}$$

Мы видим, что, в отличие от локальной теории, в нашем случае $V_1(r)$ на малых расстояниях имеет характер потенциала отталкивания.

В качестве примера рассмотрим потенциал

$$V_1(r) = \frac{G}{\sqrt{2}(2\pi)^3}\,\frac{1}{\ell^5}\times\begin{cases}[(1+A)\frac{\ell}{\ell_1} - A]\,, & 0 < r < \ell_1\\ -A\,, & \ell_1 < r < \ell\\ -A(\frac{\ell}{r})^5\,, & r > \ell,\end{cases} \tag{5.8}$$

показанный на рис. 5.

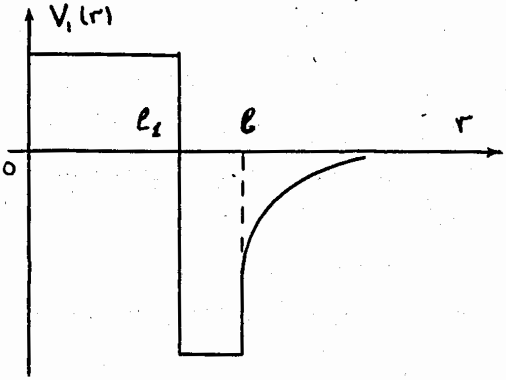

Рис. 5.

Здесь A – произвольный безразмерный параметр. После несложных вычислений получаем:

$$v(1+\zeta) = \frac{\Gamma(1+\zeta)\,\Gamma(3+\zeta)\,2^{2\zeta}}{\Gamma(4+2\zeta)\,\Gamma(2-\zeta)} \{A(1-\zeta)[1-(\frac{\ell_1}{\ell})^{2\zeta+2}] -$$

$$- (1-\zeta)(\frac{\ell_1}{\ell})^{2\zeta+2} + 2(2\zeta+3)\} \qquad (5.9)$$

и

$$v(1) = \frac{1}{3}\{A[1-(\frac{\ell_1}{\ell})^2] - (\frac{\ell_1}{\ell})^2 + 6\}. \qquad (5.10)$$

В приведенном примере функция $v(1+\zeta)$ имеет правильные аналитические свойства, но значение $v(1)$, входящее в оценки (3.8), может быть любым числом $\geq 5/3$ в зависимости от величины параметра A.

Итак, весь произвол нелокальной теории сосредоточен в выборе потенциала. Обычно используемая при вычислениях нелокальных поправок регуляризационная процедура Паули-Вилларса соответствует конкретному выбору потенциала. С физической точки зрения такой выбор ничем не предпочтительней других возможностей. Величины же поправок, полученных на основе того или иного выбора потенциала, могут существенно разниться между собой.

В настоящее время неясно, какую дополнительную информацию нужно привлечь для того, чтобы полностью устранить произвол в выборе формфактора.

Нам кажется, что эта проблема заслуживает дальнейшего изучения.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность В.А. Алебастрову, С.Б. Герасимову и Ш.З. Сельцеру за полезные обсуждения.

Литература

1. D.T.Wilkinson, H.R.Crane. (1963), Phys.Rev. 130,582.
   J.Gilleland, A.Rich, (1969). Phys.Rev.Lett. 23,1130.
   J.C.Wesley, A.Rich. (1970). Phys.Rev.Lett. 24,1320.
2. J.Bailey, et al. (1968). Phys.Lett. 28B, 287.
3. C.Jariskog. (1971). Nuovo Cim. vol. 6A, No 3,350.
4. R.D.Amado, L.Holloway. (1963). Nuovo Cim. 30,1083, 1572. N.Byers, F.Zachariasen. (1960).Nuovo Cim., 18, 1289 Ph.Meyer, D.Shiff. Nuovo Cim., 8, 217 (1964).
5. G.Segre. Phys. Lett., 7, 357 (1963).
   H.Pietschmann. Zeits.Phys., 178, 409 (1964).
   R.A.Schaffer. Phys.Rev., 135, B187 (1964).
   T.Burnett, M.J.Levine. Phys.Lett., 24B, 467 (1967).
6. S.J.Brodsky, J.D.Sullivan. Phys.Rev., 156, 1644(1967)

7. В.А. Петрунькин, С.А. Старцев, ФИАН, Препринт №57,(1971).
8. W.Pauli, F.Villars. Rev.Mod.Phys., 21, 434 (1949).
9. S.N.Gupta. Proc.Phys.Soc., 66A, 129 (1953).
10. Г.В. Ефимов. Commun. Math. Phys., 5, 42 (1967); 7, 138 (1968); ЯФ, 4,432(1966); Препринт ИТФ-68-52, 54,55, Киев, 1968.
11. T.D.Lee, C.N.Yang. Phys.Rev., 128,885 (1962) T.D.Lee.Phys.Rev., 128, 899 (1962).
12. В.А. Алебастров, Г.В. Ефимов, Ш.З. Сельцер. Препринт ОИЯИ, Р2-6129, Дубна, 1971.
13. Г.В. Ефимов, Ш.З. Сельцер. Препринт ОИЯИ, Р2-5104, Дубна, 1970.
14. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, 1957, Х. Умэдзава. Квантовая теория поля, ИЛ. Москва, 1958.
15. Л.В. Окунь. Слабое взаимодействие элементарных частиц. Физматгиз, 1963.
16. S.J. Brodsky, S.D.Drell. Ann.Rev. of Nucl. Sci., 20, 147, 1970.
17. Г.В. Ефимов. Препринт ОИЯИ, Р2-5694, Дубна, 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел
16 марта 1972 года.