С346.4б
И-851

26/II-72
ЯФ, 1972, т.16, в.5, с.1012-1022.

СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

2195/2-72

Р2 - 6333

П.С. Исаев, В.И. Хлесков

РЕАКЦИЯ $\gamma + \gamma \to \pi + \pi$ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ РАЗНОСТЬ МАСС ПИОНОВ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

P2 - 6333

П.С. Исаев, В.И. Хлесков

РЕАКЦИЯ $\gamma + \gamma \rightarrow \pi + \pi$
МАСС
И ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ РАЗНОСТЬ ПИОНОВ

Процессы соударения встречных электрон-позитронных и электрон-электронных пучков могут быть использованы для исследования ряда очень важных проблем, таких, как:

а) проверка КЭД на малых расстояниях/1/;

б) глубоко-неупругое рождение адронов/2-4/;

в) аннигиляция электрон-позитронной пары в адроны/5/ и пары μ -мезонов, π -мезонов, K -мезонов, барионов/6/;

г) рождение пар адронов в процессах $e+e \to e+e$ + пара адронов/1,7-10/;

д) проверка C -инвариантности при высоких энергиях/11/;

е) проверка возможностей использования РСАС и алгебры токов при высоких энергиях/11/, а также ряда других проблем.

Большой интерес вызывает процесс $e+e \to e+e+\pi+\pi$, из которого при определенных кинематических условиях можно выделить процесс взаимодействия света со светом $\gamma+\gamma \to \pi+\pi$. Связь дифференциальных сечений этих процессов приведена в работе/10/ и имеет вид:

$$\frac{d\sigma_{ee \to ee\pi\pi}}{d\omega_1\, d\omega_2\, d\Omega_{\pi_1}\, d\Omega_{\pi_2}\, d\Omega_e} = f\, \frac{d\sigma_{\gamma\gamma \to \pi\pi}}{d\Omega_\pi}, \qquad (1)$$

где функция f не зависит от углов, а зависит от энергий лептонов и π-мезонов; ω_1 и ω_2 - энергии π -мезонов. В области низких энергий ($E_\gamma \le$ ≤ 1 Гэв) процесс $\gamma+\gamma \to \pi+\pi$ может быть изучен теоретически с достаточно высокой степенью точности. В этом случае можно провести исследования по изучению $\pi\pi$ -взаимодействия, поляризационных эффектов в $\gamma+\gamma \to \pi+\pi$

– реакции, по проверке низкоэнергетической теоремы (томсоновский предел комптон-эффекта $\gamma+\pi \to \gamma+\pi$). С ростом энергии γ-квантов можно ставить задачи по изучению четности резонансов, рожденных при взаимодействии света со светом.

Настоящая работа посвящается детальному теоретическому исследованию процесса $\gamma+\gamma \to \pi+\pi$ с помощью метода дисперсионных соотношений в области энергий $E_\gamma \leq 1$ Гэв. Процесс $\gamma+\gamma \to \pi+\pi$ рассматривается как составная часть реакции $e+e \to e+e+\pi+\pi$. Следовательно, дисперсионные соотношения записываются для виртуальных γ-квантов. "Массы" виртуальных пространственноподобных фотонов выбирались малыми в сравнении с их энергией. Такой выбор "масс" обеспечивает преимущественный вклад двухфотонной диаграммы в процесс $e+e \to e+e+\pi+\pi$ в низшем порядке по электрическому заряду и малые вклады продольных (времениподобных) компонент γ-квантов в сечение $\gamma+\gamma \to \pi+\pi$.

В интересующей нас области энергий ($E_\gamma \leq 1$ Гэв) можно ограничиться рассмотрением низших парциальных s- и d-волн. (Система, состоящая из двух π-мезонов (конечное состояние) имеет положительную зарядовую четность $C=+1$ и поэтому в реакции $\gamma+\gamma \to \pi+\pi$ отсутствуют волны с нечетным ℓ).

В дисперсионных уравнениях вклады интегралов по левым разрезам приближенно описываются борновскими членами и ω- и ρ-резонансами. В прямом канале использовалось двухчастичное условие унитарности с двухпионным промежуточным состоянием.

В работе рассчитаны сечения s и d-парциальных волн реакций $\gamma+\gamma \to \pi+\pi$ и сечение процесса $e+e \to e+e+\pi+\pi$. Для расчетов использовались данные о фазах парциальных волн $\pi\pi$-рассеяния. Были рассмотрены два известных варианта (*down-up* и *down* , см. рис. 2а) фазы $\delta^{T=0}_{\ell=0}$ $\pi\pi$-амплитуды и по одному варианту фаз $\delta^{T=2}_{\ell=0}$ и $\delta^{T=0,2}_{\ell=2}$ (см. рис. 2б). Исследовано влияние изменения порогового поведения $\delta^{T=0}_{\ell=0}$ фазы $\pi\pi$-рассеяния (разброс экспериментальных значений достаточно широк вблизи порога) и высокоэнергетического поведения фазы на сечения процессов $\gamma+\gamma \to \pi+\pi$ и $e+e \to e+e+\pi+\pi$. Исследовано влияние неупругих процессов на ход сечений.

Связь амплитуд процессов $\gamma+\gamma \to n\pi^{+} + n\pi^{-}$ (n – целое число) со спектральными функциями токов/13/, введенными Вайнбергом/14/, дает связь решений дисперсионных уравнений для s и d –волн, зависящих от "масс" виртуальных фотонов с собственной электромагнитной энергией π – мезона /23/, и позволяет теоретически рассчитать электромагнитную разность масс $\pi^{\pm}$ и π^{0} –мезонов.

§1. Дисперсионные соотношения для изотопических амплитуд

Обозначим через $k=(k_0, \vec{k})$, $k'=(k'_0, \vec{k}')$ и $k_1(j)=(\omega_1(j), \vec{k}_1(j))$, $k_2(-j)=(\omega_2(-j), \vec{k}_2(-j))$ импульсы γ –квантов с векторами поляризации ϵ_μ и ϵ'_ν и импульсы конечных π –мезонов с изотопическими индексами j, соответственно. Будем считать в дальнейшем, что $k_1^2 = k_2^2 = \mu_\pi^2$ и $k^2 = k'^2 = -m_\gamma^2$.

В системе центра масс введем релятивистские амплитуды $T^{j}_{\alpha\beta}(t, \cos\phi_t)$ следующим образом:

$$< f \,|\, \hat{S} \,|\, i > = i\, \frac{1}{(2\pi)^2}\, \frac{1}{4\omega k_0}\, \delta^{(4)}(k+k'-k_1-k_2)\, T^{j}_{\alpha\beta}(t, \cos\phi_t)\, \epsilon^{\alpha}\, \epsilon'^{\beta}.$$

Здесь

$$t = 4k_0^2 = 4\omega^2 \;; \quad \omega_1 = \omega_2 = \omega \;; \quad k_0 = k'_0 \;;$$

ϕ_t – угол рассеяния, α и β принимают три значения x, y, z. Амплитуды $T^{j}_{\alpha\beta}(t, \cos\phi_t)$ описывают взаимодействие двух виртуальных фотонов с определенными поляризациями (продольными, поперечными). Временные компоненты векторов поляризации исключены/10/.

Заметим, что конечное двухпионное состояние может иметь три значения полного изотопического спина T = 0,1,2. Требования C –инвариантности исключают значение T = 1.

Таким образом:

$$
\begin{aligned}
T^{\pi^+\pi^-}_{\alpha\beta}(t, \cos\phi_t) &= \frac{1}{\sqrt{3}}\, T^{(T=0)}_{\alpha\beta}(t, \cos\phi_t) + \frac{1}{\sqrt{6}}\, T^{(T=2)}_{\alpha\beta}(t, \cos\phi_t) \\
T^{\pi^0\pi^0}_{\alpha\beta}(t, \cos\phi_t) &= \frac{2}{\sqrt{6}}\, T^{(T=2)}_{\alpha\beta}(t, \cos\phi_t) - \frac{1}{\sqrt{3}}\, T^{(T=0)}_{\alpha\beta}(t, \cos\phi_t) .
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

В прямом t -канале мандельстамовские переменные имеют вид:

$$t = (k + k')^2 = 4k_0^2 = 4\omega^2$$

$$s = (k-k_2)^2 = -m_\gamma^2 + \mu_\pi^2 - \frac{t}{2} - 2\sqrt{\left(\frac{t}{4} + m_\gamma^2\right)\left(\frac{t}{4} - \mu_\pi^2\right)}\, \cos\phi_t$$

$$u = (k-k_1)^2 = -m_\gamma^2 + \mu_\pi^2 - \frac{t}{2} + 2\sqrt{\left(\frac{t}{4} + m_\gamma^2\right)\left(\frac{t}{4} - \mu_\pi^2\right)}\, \cos\phi_t .$$

Дисперсионное уравнение для изотопических амплитуд в комплексной t- плоскости имеет вид:

$$
\begin{aligned}
T^{(T)}_{\alpha\beta}(t, \cos\phi_t) = {} & \frac{1}{\pi} \int\limits_{4\mu_\pi^2}^{\infty} \frac{Im\, T^{(T)}_{\alpha\beta}(t', \cos\phi_t)}{t' - t - i\epsilon}\, dt' + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{-4m_\gamma^2} \frac{Im\, T^{(T)}_{\alpha\beta}(t', \cos\phi_t)}{t' - t}\, dt' + \\
& - 4\, \frac{\mu_\pi^2 \cos^2\phi_t + m_\gamma^2}{1 - \cos^2\phi_t} \\
& + \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\infty} \frac{Im\, T^{(T)}_{\alpha\beta}(f', \cos\phi_t)}{t' - t}\, dt' ,
\end{aligned}
\qquad (2)
$$

здесь $T = 0{,}2$. Разрезы в комплексной t -плоскости определяются двухчастичными порогами:

$$t \geq 4\mu_\pi^2, \quad s \geq 2(\mu_\pi^2 - m_\gamma^2), \quad u \geq 2(\mu_\pi^2 - m_\gamma^2).$$

В прямом канале за низшее двухчастичное промежуточное состояние принято двухпионное состояние (учитываются только сильные взаимодействия, члены высшего порядка по электромагнитной константе связи $a = \frac{e^2}{4\pi \hbar c}$ отбрасываются).

В кроссинг-каналах пороговые значения определены из условия положительности энергии пространственноподобных виртуальных фотонов:

$$k_0 = E_- - E'_- \geq 0 , \qquad k'_0 = E_+ - E'_+ \geq 0$$

(E_-, E_+, E'_-, E'_+ – энергии начальных и конечных электронов и позитронов во встречных пучках). Зависимость разрезов от t и $\cos\phi_t$ представлена на рис. 1.

В дисперсионном уравнении (2) интегралы по левым разрезам от кроссинг-каналов приближенно учтем борновскими членами и ω– и ρ –резонансами.

В мезонной электродинамике борновские члены записываются в виде[12]:

$$B^i_{a\beta}(t,\cos\phi_t) = -4e^2\left\{\frac{k_{1a}(j)\,k_{2\beta}(-j)}{u-\mu_\pi^2+i\epsilon} + \frac{k_{1\beta}(j)\,k_{2a}(-j)}{s-\mu_\pi^2+i\epsilon} - \frac{1}{2}\delta_{a\beta}\right\}.$$

В такой записи индексы a и β связаны с линейно поляризованными фотонами. В системе координат с осями x, y, z, направленными вдоль векторов $[\vec{k}\times[\vec{k}\times\vec{k}_1]]$, $[\vec{k}\times\vec{k}_1]$ и $\vec{k}$ соответственно, взаимодействие поперечных фотонов описывается xx и yy– компонентами матрицы $B_{a\beta}$. Эти компоненты однозначно связаны со спиральными борновскими членами, приведенными в работе[16]. Действительно, если учесть, что положительной спиральности соответствуют $\epsilon_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\epsilon_y = \frac{i}{\sqrt{2}}$, а отрицательной – $\epsilon_x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\epsilon_y = -\frac{i}{\sqrt{2}}$ компоненты векторов поляризации[17], то B_{xx} и B_{yy} приводят к приведенным в работе[16] амплитудам $T_{+1,-1}$ и $T_{+1,+1}$. Вклад борновских членов в дисперсионное уравнение (2) для изотопических амплитуд записывается в виде[12]:

$$B^{(T)}_{a\beta}(t,\cos\phi_t) = \frac{8e^2}{\sqrt{3}}(\sqrt{2})^{-\frac{T}{2}}\left\{\frac{(k_{1a}k_{2\beta})_{u=\mu_\pi^2}}{u-\mu_\pi^2} + \frac{(k_{1\beta}k_{2a})_{s=\mu_\pi^2}}{s-\mu_\pi^2}\right\}.$$

Для вычисления вклада ω- и ρ -резонансов используем известные эффективные гамильтонианы для $\omega\pi\gamma$ и $\rho\pi\gamma$ вершин/18/. Реакция $\gamma+\gamma\to\pi^0+\pi^0$ содержит оба резонанса в s- и u -каналах. Амплитуда процесса $\gamma+\gamma\to\pi^++\pi^-$ содержит лишь вклад ρ -мезона.

С учетом известного из алгебры токов и кварковой модели соотношения $g_{\omega\pi\gamma}\simeq 3g_{\rho\pi\gamma}$ /18/ и соотношения $M_\omega\simeq M_\rho$ вклад резонансных членов в уравнение (2) для изотопических амплитуд запишется в виде/12/:

$$P^{(T)}_{\alpha\beta}(t,\cos\phi_t)=\frac{32g^2_{\omega\pi\gamma}}{9\sqrt{3}}\left(-\frac{22}{8\sqrt{2}}\right)^{\frac{T}{2}}\times\left[\frac{\{u\}_{u=M^2_\omega}}{u-M^2_\omega}+\frac{\{s\}_{s=M^2_\omega}}{s-M^2_\omega}\right], \quad (3)$$

где

$$\{u\}=(kk')k_{2\alpha}k_{1\beta}+(k_1k_2)k'_\alpha k_\beta+((kk')(k_1k_2)-(k_1k')(k_2k))\delta_{\alpha\beta}-$$

$$-k_{1\beta}k'_\alpha(kk_2)-k_{2\alpha}k_\beta(k_1k'),\qquad \{s\}=\{u[k_1\to k_2]\}.$$

В описанной выше системе координат в матрицах $B_{\alpha\beta}$ и $P_{\alpha\beta}$ отличными от нуля будут следующие компоненты:

$$\begin{pmatrix} xx & 0 & xz\\ 0 & yy & 0\\ zx & 0 & zz\end{pmatrix}.$$

§2. Дисперсионные соотношения для парциальных амплитуд

В области низких энергий основной вклад в амплитуду процесса будут вносить низшие s- и d -парциальные волны, т.е.

$$T^{(T)}_{\alpha\beta}(t,\cos\phi_t)=T^{(T)}_{\alpha\beta}(t)_s+5T^{(T)}_{\alpha\beta}(t)_d\,P_2(\cos\phi_t)+\dots \quad (4)$$

Для выделения s- и d -волн из дисперсионного уравнения (2) поступим следующим образом.

Если мы положим в соотношении (4) $\cos\phi_t = \frac{1}{\sqrt{3}}$, то

$$P_2\left(\cos\phi_t = \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0, \qquad T^{(T)}_{\alpha\beta}\left(t, \cos\phi_t = \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \simeq T^{(T)}_{\alpha\beta}(t)_s ,$$

т.е. для фиксированного угла $\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ дисперсионное уравнение (2) сводится к дисперсионному уравнению для s -волны.

Чтобы выделить d -волну, положим в уравнении (2)

$$\cos\phi_t = \sqrt{\frac{7}{15}} \qquad \left(P_2\left(\cos\phi_t = \sqrt{\frac{7}{15}}\right) = \frac{1}{5}\right)$$

и вычтем из этого уравнения дисперсионное уравнение для s -волны, тогда

$$T^{(T)}_{\alpha\beta}\left(t, \cos\phi_t = \sqrt{\frac{7}{15}}\right) - T^{(T)}_{\alpha\beta}\left(t, \cos\phi_t = \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \simeq T^{(T)}_{\alpha\beta}(t)_d .$$

Таким образом, уравнения для s-и d-волн реакции записываются в виде:

$$T^{(T)}_{\alpha\beta}(t)_s = \frac{1}{\pi}\int_{4\mu_\pi^2}^{\infty} \frac{Im\, T^{(T)}_{\alpha\beta}(t')_s}{t'-t-i\epsilon}\, dt' + B^{(T)}_{\alpha\beta}\left(t, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + P^{(T)}_{\alpha\beta}\left(t, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$T^{(T)}_{\alpha\beta}(t)_d = \frac{1}{\pi}\int_{4\mu_\pi^2}^{\infty} \frac{Im\, T^{(T)}_{\alpha\beta}(t')_d}{t'-t-i\epsilon}\, dt' + B^{(T)}_{\alpha\beta}\left(t, \sqrt{\frac{7}{15}}\right) - B^{(T)}_{\alpha\beta}\left(t, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \tag{5}$$

$$+ P^{(T)}_{\alpha\beta}\left(t, \sqrt{\frac{7}{15}}\right) - P^{(T)}_{\alpha\beta}\left(t, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Условие двухчастичной унитарности для парциальных амплитуд имеет вид:

$$Im\, T^{(T)}_{\alpha\beta}(t)_\ell = e^{-i\delta^{(T)}_\ell(t)} \sin\delta^{(T)}_\ell(t)\, T^{(T)}_{\alpha\beta}(t)_\ell . \tag{6}$$

Здесь $\delta^{(T)}_\ell(t)$ - фазы парциальных амплитуд $\pi\pi$ -рассеяния с изоспином T.

Подставляя условие унитарности (6) в дисперсионные уравнения (5), получим линейные сингулярные интегральные уравнения. Подобные уравнения решаются сведением их к краевой задаче Римана /19/. Степень неоднозначности ее решения связана с индексом κ задачи, который определяется выражением:

$$\kappa = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{4\mu_\pi^2}^{\infty} d\,\ell n\, e^{2i\,\delta_\ell^{(T)}(t)} .$$

Если фазы $\delta_\ell^{(T)}(t)$ при $t \to \infty$ асимптотически стремятся к нулю, то решения интегральных уравнений (4) единственны и записываются в виде:

$$T_{\alpha\beta}^{(T)}(t)_\ell = X^+(t)\, A_{\alpha\beta}^+(t) + B_{\alpha\beta}^{(T)}(t)_\ell + P_{\alpha\beta}^{(T)}(t)_\ell$$

$$X^+(t) = e^{i\delta_\ell^{(T)}(t)} \exp\left\{ \frac{t}{\pi} P \int\limits_{4\mu_\pi^2}^{\infty} \frac{\delta_\ell^{(T)}(t')}{t'(t'-t)} dt' \right\}$$

$$A_{\alpha\beta}^+(t) = \frac{1}{\pi} P \int\limits_{4\mu_\pi^2}^{\infty} \frac{e^{i\delta_\ell^{(T)}(x)} \sin \delta_\ell^{(T)}(x) \left(B_{\alpha\beta}^{(T)}(x) + P_{\alpha\beta}^{(T)}(x)_\ell \right)}{(x-t)\quad X^+(x)} dx.$$

Здесь интегралы понимаются в смысле главного значения.

§3. Парциальные сечения процесса $\gamma + \gamma \to \pi + \pi$ и сечение реакции $e + e \to e + e + \pi + \pi$

Полное сечение процесса $\gamma + \gamma \to \pi + \pi$ выражается в виде суммы s- и d-парциальных сечений

$$\sigma\,(t)_{\gamma\gamma \to \pi\pi} = \sigma_{\gamma\gamma \to \pi\pi}(t)_s + \sigma_{\gamma\gamma\to\pi\pi}(t)_d ,$$

которые связаны с парциальными амплитудами следующим образом:

$$\sigma_{\gamma\gamma\to\pi\pi}(t)_\ell = (2\ell + 1) \frac{|\vec{k}_1|}{16\pi |\vec{k}|} \frac{1}{t} T^*_{\alpha\beta}(t)_\ell\; T_{\alpha'\beta'}(t)_\ell\; e^{\alpha\alpha'}\; e^{\beta\beta'} , \qquad (7)$$

здесь $e^{\alpha\alpha'}$ и $e^{\beta\beta'}$ – поляризационные матрицы плотности виртуальных фотонов.

Наиболее интересным представляется случай, когда электрон и позитрон в реакции $e + e \to e + e + \pi + \pi$ во встречных пучках рассеивается вперед. Для этого случая матрица плотности виртуальных фотонов имеет вид [10]:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & K(t) \end{pmatrix},$$

где:

$$K(t) = 16 \frac{m_\gamma^2}{t^2} [(2E - \sqrt{t}) E + \frac{m_\gamma^2}{2}] ; \quad E, E - k_0 \gg m_e ;$$

E – энергия встречных пучков; k_0 – энергия виртуальных фотонов.

Здесь формула (7), например, для сечения d -волны принимает форму:

$$\sigma_{\gamma\gamma\to\pi\pi}(t)_d = \sigma^{\perp\perp}_{\gamma\gamma\to\pi\pi}(t)_d + K(t)\, \sigma^{\parallel\perp}_{\gamma\gamma\to\pi\pi}(t)_d + K^2(t)\, \sigma^{\parallel\parallel}_{\gamma\gamma\to\pi\pi}(t)_d ;$$

$$\sigma^{\perp\perp}_{\gamma\gamma\to\pi\pi}(t)_d = \frac{5}{64\pi} \frac{|\vec{k}_1|}{|\vec{k}|} \frac{1}{t} \{ |T_{xx}(t)_d|^2 + |T_{yy}(t)_d|^2 \} ;$$

$$\sigma^{\parallel\perp}_{\gamma\gamma\to\pi\pi}(t)_d = \frac{5}{16\pi} \frac{|\vec{k}_1|}{|\vec{k}|} \frac{1}{t} |T_{xz}(t)_d|^2 ; \qquad (8)$$

$$\sigma^{\parallel\parallel}_{\gamma\gamma\to\pi\pi}(t)_d = \frac{5}{16\pi} \frac{|\vec{k}_1|}{|\vec{k}|} \frac{1}{t} |T_{zz}(t)_d|^2 .$$

Для виртуальных фотонов с малой массой ($m_\gamma^2 \ll \mu_\pi^2$) в сечении достаточно учитывать лишь поперечные амплитуды.

В работе/12/ s –волна данной реакции была рассчитана для резонансной параметризации фазы $\delta_s^0(t)$ $\pi\pi$ –рассеяния, что соответствует выбору *down–up* набора экспериментальных значений. Фаза асимптотически стремилась при больших t к π, т.е. индекс κ задачи Римана для такой параметризации был равен единице и решение было неоднозначным.

В настоящей работе рассмотрены две другие параметризации фазы $\delta_s^0(t)$–*down–up* и *down*, которые показаны на рис. 2а) непрерывными линиями/20/. Пунктиром обозначены пороговые модификации фазы $\delta_s^0(t)$ (в пределах экспериментальных данных). Экспериментально известные фазы/21/ $\delta_s^2(t)$ и $\delta_d^2(t)$ и аналитические кривые, используемые для расчетов на ЭВМ, приведены на рис. 2б). Для фазы $\delta_d^0(t)$ была использована кривая с резонансом в точке, соответствующей массе f -мезона. Второй раз кривая проходит точку $\pi/2$ в области f'-мезона. Существование у фазы $\delta^0_d(t)$ f -резонанса экспериментально подтверждается в работе/15/.

Результаты расчетов сечений s-волны реакции $\gamma+\gamma \to \pi + \pi$ для взаимодействия поперечных фотонов представлены на рис. 3а) и б) соответственно для *down-up* и *down* параметризации $\delta^0_s(t)$ фазы $\pi\pi$-рассеяния (пунктирные линии соответствуют пороговому изменению фазы $\delta^0_s(t)$).

На рис. 4а) и б) представлены кривые для *down-up* и *down* -параметризации $\delta^0_s(t)$ фазы $\pi\pi$-рассеяния, соответственно, для реакции с участием одного или двух продольных фотонов. Все приведенные кривые, за исключением сечений с $\pi\pi$ $(T=2)$ конечным состоянием, имеют резонансные особенности в области σ мезона. Для *down-up* параметризации резонансный пик выражен более явно. Все сечения взаимодействия продольных фотонов приблизительно на порядок меньше сечений взаимодействия поперечных фотонов. Однако в полное сечение (8) вклады сечений продольных фотонов входят с множителем $K(t) \sim m^2_\gamma$, и, вследствие малости m^2_γ, их абсолютный вклад очень мал.

На рис. 5а) и б) показаны сечения взаимодействия встречных пучков с образованием двух пионов, рассчитанные с помощью метода эквивалентных фотонов/1/ из сечений $\gamma+\gamma \to \pi+\pi$ (рис. 3а) и б)). Сечение процесса $e^+ + e^- \to e^+ + e^- + \pi^0 + \pi^0$ больше сечения процесса $e^+ + e^- \to e^+ + e^- + \pi^+ + \pi^-$. Этот результат противоположен результату, полученному в работе/22/. Различие объясняется тем, что в нашей работе учтены вклады ρ и ω -мезонов, которые существенным образом меняют ход сечений рождения нейтральных и заряженных π -мезонов.

Величины сечений, соответствующих разным параметризациям $\delta^0_s(t)$ фазы $\pi\pi$-рассеяния, различаются настолько, что вполне возможно их экспериментальное разрешение. Таким образом, имеется принципиальная возможность отличить *down-up* - решение от *down* -решения для фазы $\delta^0_s(t)$ $\pi\pi$ -рассеяния. Влияние порогового изменения фазы $\delta^0_s(t)$ (см. пунктирные линии на рис. 2а) существенно меняет поведение сечений $\gamma+\gamma \to \pi+\pi$ лишь в пороговой области энергий, и во всем интервале рассматриваемых энергий изменяет сечения $e+e \to e+e+\pi+\pi$ (рис. 5а, 5б). Интересно отметить, что для случая *down* -решения сечение процесса $e+e \to e+e+\pi\pi$ $(T=2)$ становится меньше модифицированного сечения $e+e \to e+e+\pi+\pi (T=0)$ (рис. 5б), что важно проверить экспериментально.

В работе было исследовано влияние быстроты спада $\delta_0^0(t)$ - фазы к нулю в области энергий $\geq$ 1 Гэв.

Сечение процесса $\gamma+\gamma \to \pi+\pi$ менялось при этом на 10-15% вблизи порога и существенно - при энергиях > 1 Гэв (рис. 6а, 6б). Следовательно, сечения процессов $\gamma+\gamma \to \pi+\pi$ и $ee \to ee\,\pi\pi$ в интересующей нас области энергий устойчивы к изменениям "хвоста" фаз $\pi\pi$ -рассеяния.

Наконец, рассматривалось влияние учета неупругих процессов. В условие унитарности (6) был добавлен постоянный множитель, который соответствовал увеличению мнимой части (6) примерно на 80% в области энергии > 1 Гэв. Влияние такого изменения на ход сечения $\gamma+\gamma \to \pi+\pi$ представлено на рис. 7. Из рисунка видно, что область низких энергий процесса $\gamma+\gamma \to \pi+\pi$ устойчива к этим изменениям.

Сечения d -волны реакции $\gamma+\gamma \to \pi+\pi$ представлены на рис. 8а) (взаимодействие поперечных фотонов) и на рис. 8б) (взаимодействие продольных фотонов).

Кривые носят явно резонансный характер в области f -мезона и в области f' -мезона. Из приведенных графиков следует, что относительный вклад d -волны в полное сечение процесса сравним с вкладом s -волны лишь в области f резонанса.

§4. Расчет электромагнитной разности масс $\pi^{\pm}$- и π^0 -мезонов

Электромагнитная разность масс пионов выражается через спектральные функции $\rho_V(m^2)$ и $\rho_A(m^2)$ векторной и аксиальной частей электромагнитного тока[23]

$$\mu_{\pi^+}^2 - \mu_{\pi^0}^2 = \frac{3a}{4\pi} \frac{1}{F_\pi^2} \int_0^\infty dm_\gamma^2 \int_0^\infty \frac{\rho_V(m^2) - \rho_A(m^2)}{m_\gamma^2 + m^2} dm^2 ,$$

где $F_\pi \simeq$ 95 Мэв – константа распада π-мезона. Следуя далее работе/23/ (см. также/13/), запишем амплитуду процесса $\gamma + \gamma \to \pi^+ + \pi^-$ в пределе $t \to \mu_\pi^2 \to 0$ в следующем виде:

$$T_{\alpha\beta}^{\pi^+\pi^-} \to 4\sqrt{2}\,\pi\alpha \left(g_{\alpha\beta} - \frac{k_\beta k'_\alpha}{m_\gamma^2} \right) \frac{1}{F_\pi^2} \int dm^2 \frac{\rho_V(m^2) - \rho_A(m^2)}{m_\gamma^2 + m^2} \tag{9}$$

(в пределе $t \to \mu_\pi^2 \to 0$ скалярное произведение $(kk') = \frac{t}{2} + m_\gamma^2$ стремится к m_γ^2).

Численные коэффициенты в соотношении (9) определены из равенства формул для полных сечений процесса, приведенных в работах /12/ и /13/. В частном случае, когда $\alpha = \beta = x$ для разности масс π мезонов, получаем выражение:

$$\mu_{\pi^+} - \mu_{\pi^0} = - \frac{3}{(4\pi)^2 \sqrt{2}\, 2\mu_\pi} \int_0^\infty T_{xx}(m_\gamma^2)\, dm_\gamma^2 \,. \tag{10}$$

Из сказанного выше следует, что для $\cos\phi_t = \frac{1}{\sqrt{3}}$ в описанном пределе можно ограничить рассмотрение лишь s-волной. Борновский член в данном случае не дает вклада, а резонансный член отличен от нуля лишь для $m_\gamma^2 < \sqrt{\frac{3}{2}}\, M_\omega^2$.

Приведем выражения для вкладов резонансов, которые получаются из соотношения (3):

$$P_{xx}^{\pi^+\pi^-}(y,z) = \frac{\sqrt{6}}{22} P_{xx}^{(T=2)}(y,z) = -\frac{\sqrt{3}}{8} P_{xx}^{(T=0)}(y,z) =$$

$$= \frac{2}{27} g_{\omega\pi\gamma}^2 M_\omega^4 \frac{(3-y^2)(1+y+2z) + \frac{4}{\sqrt{3}} y \sqrt{z(z+y)(3-2y^2)}}{(1+y+2z)^2 - \frac{4}{3} z(z+y)} ,$$

где $z = \frac{t}{4M_\omega^2}$ и $y = \frac{m_\gamma^2}{M_\omega^2}$. Окончательное выражение для разности масс π^{+-} и π^0 -мезонов можно записать в виде:

$$\Delta\mu_{\pi^+\pi^0} = \frac{\sqrt{2}\, g_{\omega\pi\gamma}^2 M_\omega^4}{(4\pi)^2\, 18\mu_\pi} C \,. \tag{11}$$

Множитель C определяется интегралами (9), (10) и зависит от поведения s -волны $\pi\pi$ -рассеяния.

Расчеты на ЭВМ привели к следующим значениям для константы C = 3,7; 6,2; 0,39, которые соответствуют приведенным в данной работе *down* и *down–up* параметризациям $\delta^0_s(t)$ и параметризации, описанной в работе/12/. Этим значениям соответствуют значения разности масс $\Delta\mu_{\pi^+\pi^0}$ = 4,2; 7,0; 0,44 Мэв. Лучшее согласие с экспериментальным значением $\Delta\mu_{\pi^+\pi^0}$ = 4,6 Мэв дает *down*-параметризация $\delta^0_s(t)$ фазы $\pi\pi$ -рассеяния. Описанные выше модификации фазы на пороге и на "хвосте" результатов существенно не изменили.

§5. Заключение

Полученные в данной работе амплитуды процесса $\gamma+\gamma \to \pi+\pi$ в пределе $\mu^2_\pi \to 0$ и $t \to 0$ не нормированы на томсоновский предел. Это, вероятно, есть причина достаточно больших сечений процессов с $\pi\pi\ (T=0)$, $\pi\pi\ (T=2)$ и $\pi^0\pi^0$ -конечными состояниями. (Нормировка $\gamma+\gamma \to \pi^+ + \pi^-$ амплитуды в указанном пределе близка к томсоновской).

Нормировка амплитуд на томсоновский предел возможна для дисперсионных соотношений с вычитанием. Соответствующая работа проводится в настоящее время.

В заключение выражаем благодарность Д.В. Ширкову, А.В. Ефремову и И.Ф. Гинзбургу за стимулирующие обсуждения.

Литература

1. S.J.Brodsky. Radiative Problems and Quantum Electrodynamics (1971 International Symposium on Electron and Photon Interaction at High Energies, Cornell University, Ithaca, New York, Aug. 23-27, 1971), SLAC-PUB-989 (TH) and (EXP), December, 1971.
(В этом обзорном докладе приводятся необходимые ссылки на работы других авторов.)

2. В.Е. Балкин, В.М. Буднев, И.Ф. Гинзбург. Письма в ЖЭТФ, 11, 559 (1970).

3. В.Е. Буднев, И.Ф. Гинзбург. ЯФ 13, 353, 1971.

4. Э.А. Чобан, В.М. Шехтер. Препринт 331, ФТИ им. А.Ф. Иоффе АН СССР, 1971.

5. R.Gatto. 4th International Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energy, Proceedings, Liverpool, Sept. 14th-20th, 1969.

6. J.Perez-Y.Jorba. 4th International Symposium on Electron and Photon Interactions at High Energy, Proceedings, Liverpool, Sept. 14th-20th, 1969.
(В этом обзорном докладе приводятся ссылки на соответствующие работы других авторов).

7. S.J.Brodsky, T.Kinoshita and H.Terazawa. Preprint CLNS-152, 1971.

8. N.Arteago-Romero, A.Jaccarini, J.Parisi and P.Kessler. Lett.Nuovo Cim., 4, 933 (1970); 1, 935 (1971).

9. G.Kramer, J.L.Uretsky, T.F.Walsh. "Annihilation of Electron-Positron Pairs into Mesons", Preprint DESY 70/44, Sept.1970.

10. П.С. Исаев, В.И. Хлесков. Сообщения ОИЯИ, Р2-5505, Дубна, 1971.

11. A.Pais. "Some theoretical aspects of colliding beams". Talk given at the Amsterdam Conference on Elementary Particles, July, 1971.

12. П.С. Исаев, В.И. Хлесков. Сообщения ОИЯИ, Е2-6160, Дубна, 1972.

13. H.Terazawa. Phys.Rev.Lett., 26, 1207 (1971 .

14. S.Weinberg. Phys.Rev.Lett., 18, 507 (1967).

15. B.Y.Oh, W.D.Walker. Proceedings of the Conference on $\pi\pi$ and $K\pi$ Interactions, Argonne, May, 1969, p. 300.

16. H.D.J.Abarbanel, M.L.Goldberger. Phys.Rev., 165, 1594 (1968).

17. В.Б. Берестецкий, Е.М. Лившиц, Л.П. Питаевский. "Релятивистская квантовая теория". "Наука", 4.1, Москва (1968).

18. Л.Д. Соловьев. "Физика высоких энергий и теория элементарных частиц". "Наукова думка", стр. 451, Киев (1967).

19. Ф.Д. Гахов. "Краевые задачи", Физматгиз, Москва, 1958.

20. L.I.Gutay. Proceedings of the Conference on $\pi\pi$ and $K\pi$ Interactions, Argonne, May, 1969, p. 241.

21. W.H.Katz, T.Ferbel, P.F.Slattery, H.Yuta. Proceedings of the Conference on $\pi\pi$ and $K\pi$ Interactions. Argonne, May, 1969, p. 300.

22. D.H.Lyth. Nucl.Phys., B30, 145 (1971).
23. T.M.Yan. Preprint, SLAC-PUP-928, July (1971).

Рукопись поступила в издательский отдел
16 марта 1972 года.

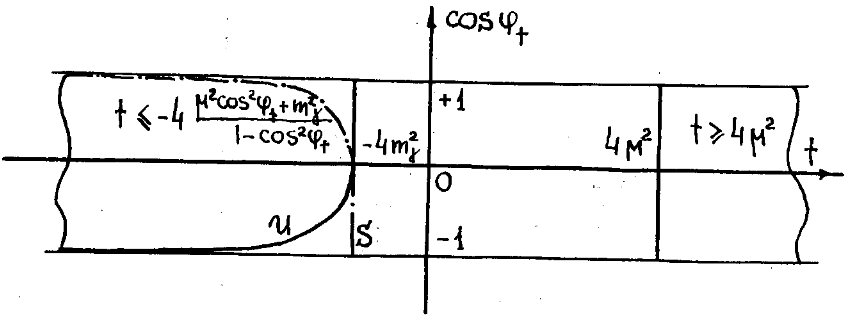


Рис. 1.

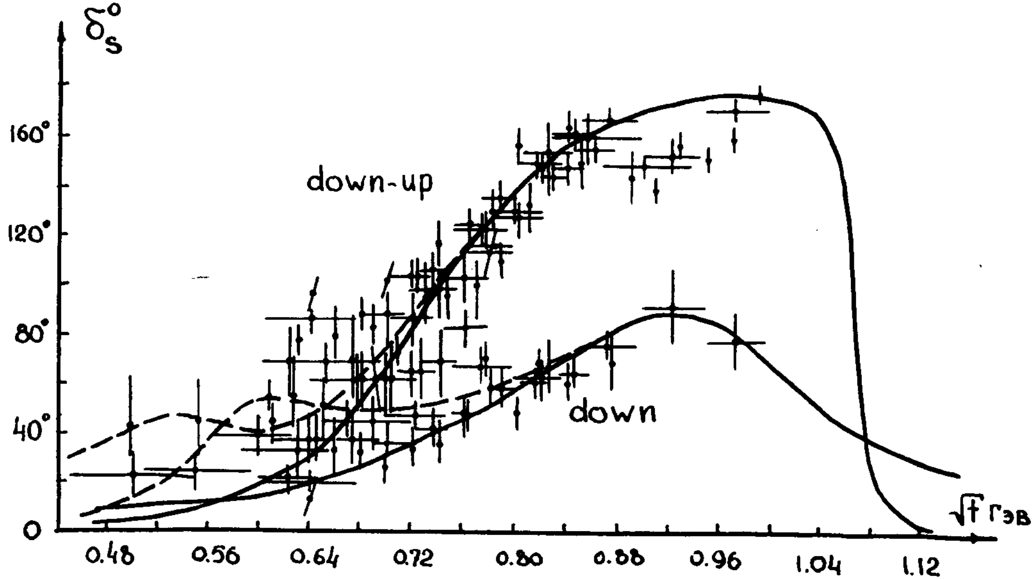

δ°s
160°
120°
80°
40°
0
down-up
down
0.48
0.56
0.64
0.72
0.80
0.88
0.96
1.04
1.12
√t ГэВ

Рис. 2а.

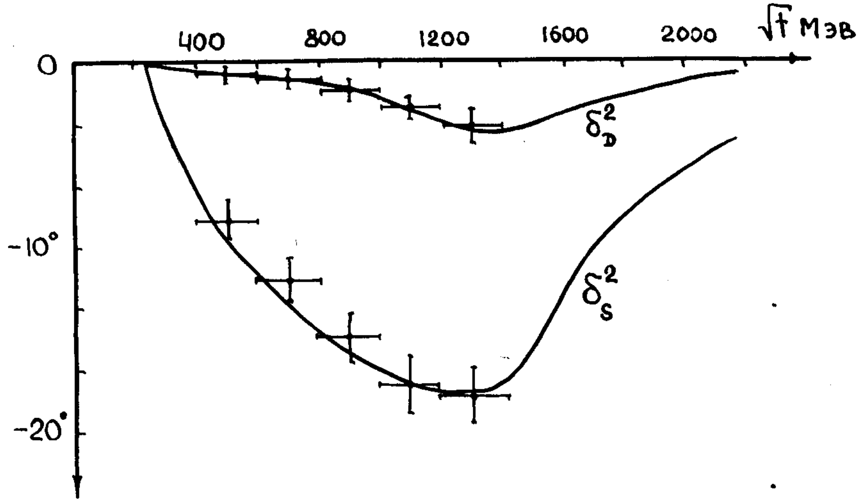
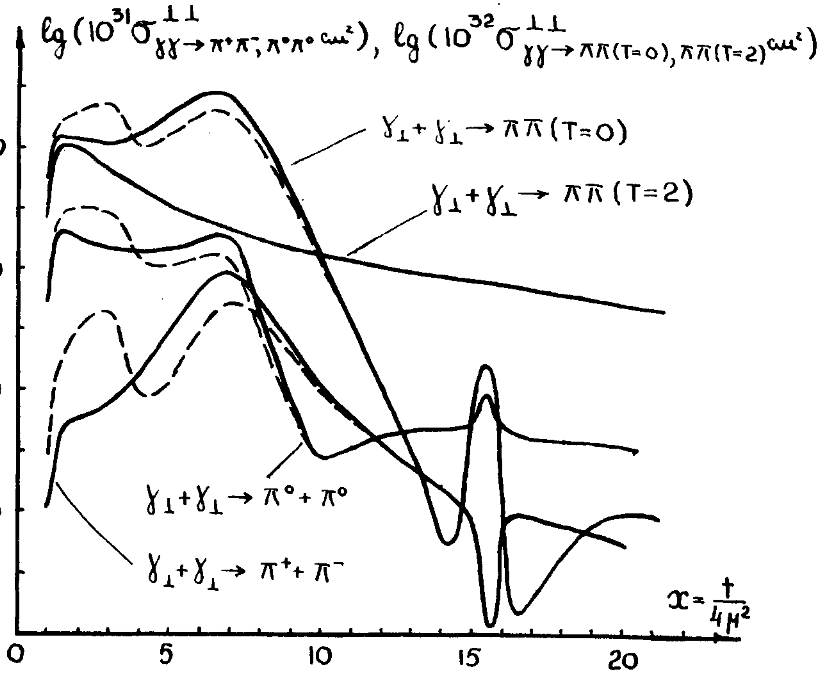
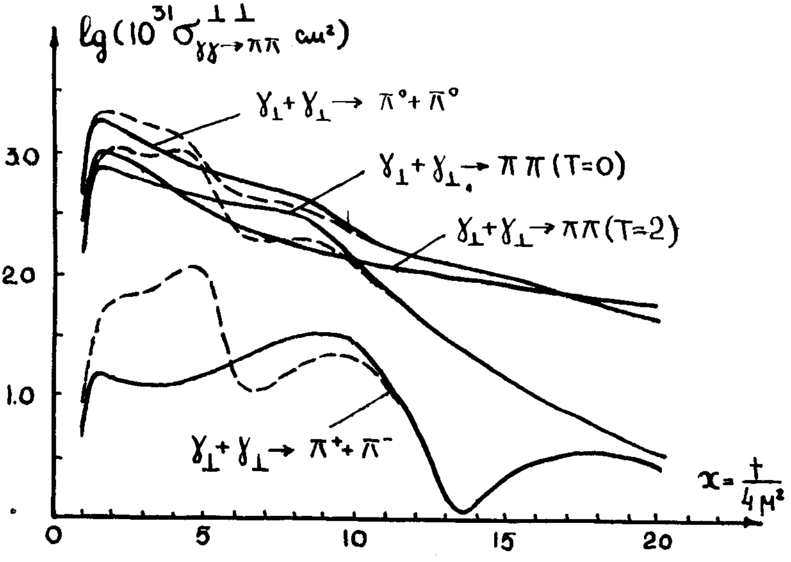


Рис. 2б.



lg(10^31 σ^⊥⊥ γγ→π⁺π⁻, π⁰π⁰ см²), lg(10^32 σ^⊥⊥ γγ→ππ(T=0), ππ(T=2) см²)
γ⊥ + γ⊥ → ππ (T=0)
γ⊥ + γ⊥ → ππ (T=2)
γ⊥ + γ⊥ → π⁰ + π⁰
γ⊥ + γ⊥ → π⁺ + π⁻
x = t/4μ²
4.0
3.0
2.0
1.0
0
5
10
15
20

Рис. 3а.



lg(10^31 σ^⊥⊥ γγ→ππ см²)
γ⊥ + γ⊥ → π⁰ + π⁰
γ⊥ + γ⊥ → ππ (T=0)
γ⊥ + γ⊥ → ππ (T=2)
γ⊥ + γ⊥ → π⁺ + π⁻
x = t/4μ²
3.0
2.0
1.0
0
5
10
15
20

Рис. 3б.

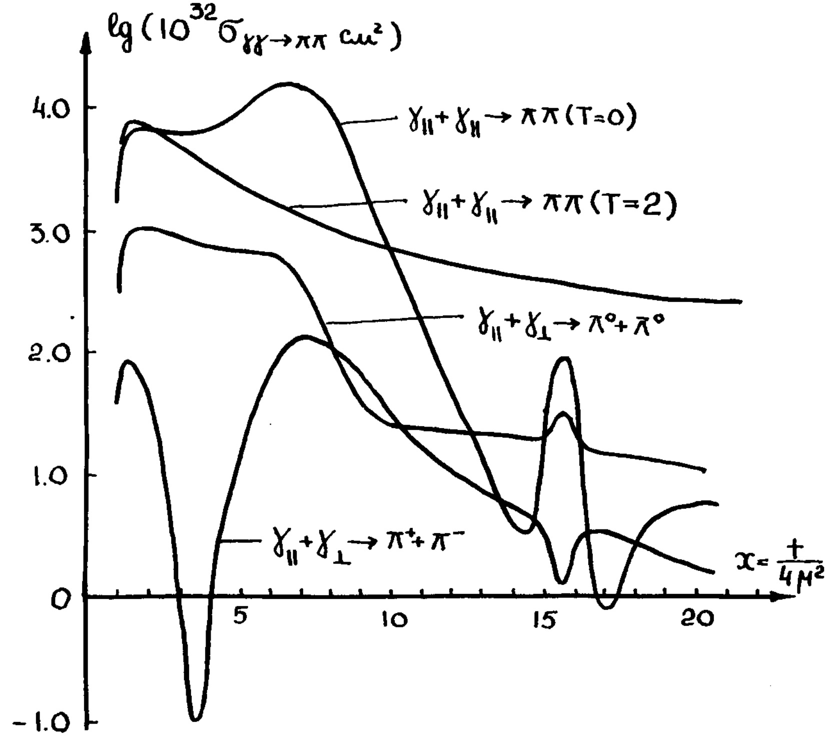

lg (10^32 σ γγ→ππ см²)
4.0
3.0
2.0
1.0
0
-1.0
γ∥+γ∥→ππ (T=0)
γ∥+γ∥→ππ (T=2)
γ∥+γ⊥→π°+π°
γ∥+γ⊥→π⁺+π⁻
x = t/4M²
5
10
15
20

Рис. 4а.

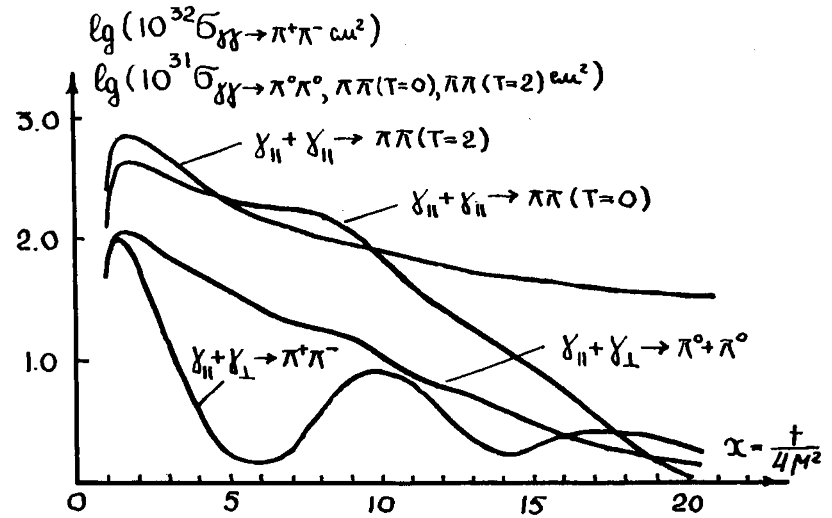

lg (10^32 σ γγ→π⁺π⁻ см²)
lg (10^31 σ γγ→π°π°, ππ(T=0), ππ(T=2) см²)
3.0
2.0
1.0
0
γ∥+γ∥→ππ (T=2)
γ∥+γ∥→ππ (T=0)
γ∥+γ⊥→π⁺π⁻
γ∥+γ⊥→π°+π°
x = t/4M²
5
10
15
20

Рис. 4б.

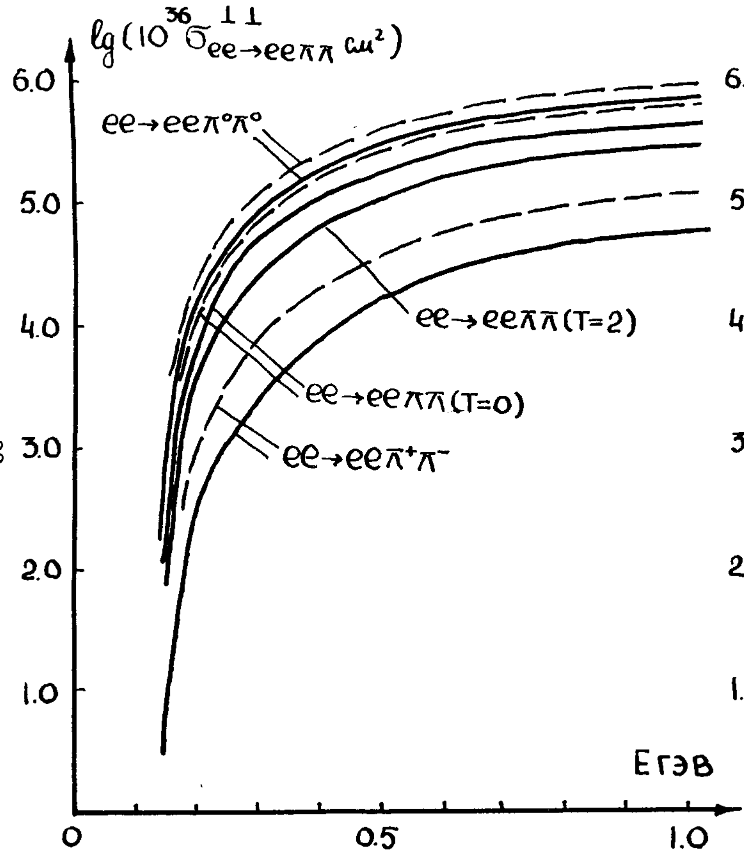

lg(10^36 σ^⊥⊥_ee→eeππ см²)
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0
0.5
1.0
E ГэВ
ee→eeπ°π°
ee→eeππ(T=2)
ee→eeππ(T=0)
ee→eeπ⁺π⁻

Рис. 5а.

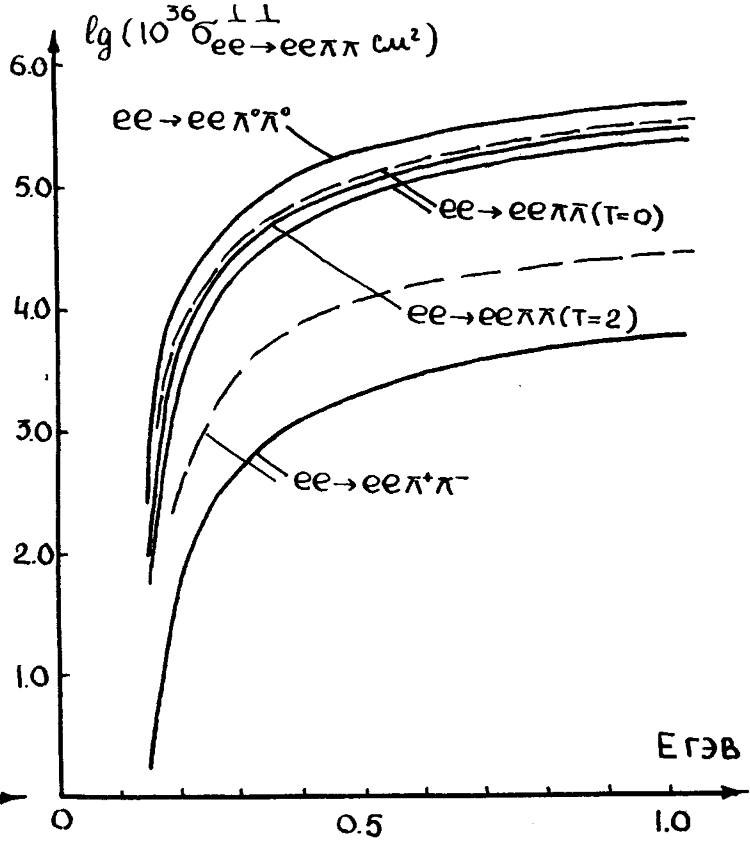
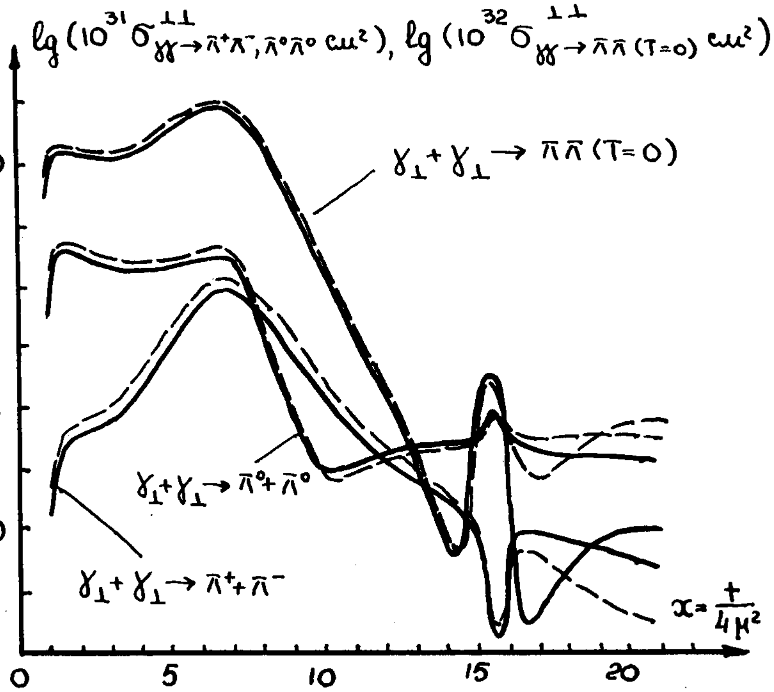
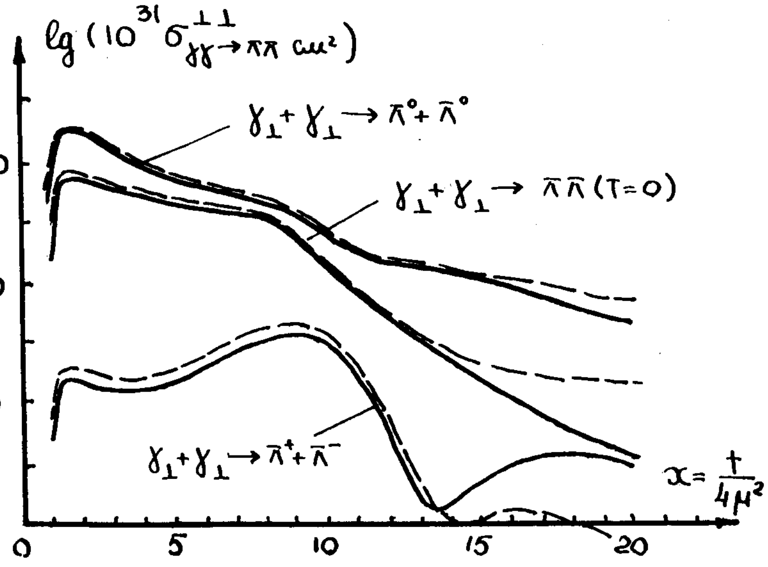

lg(10^36 σ^⊥⊥_ee→eeππ см²)
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0
0.5
1.0
E ГэВ
ee→eeπ°π°
ee→eeππ(T=0)
ee→eeππ(T=2)
ee→eeπ⁺π⁻

Рис. 5б.



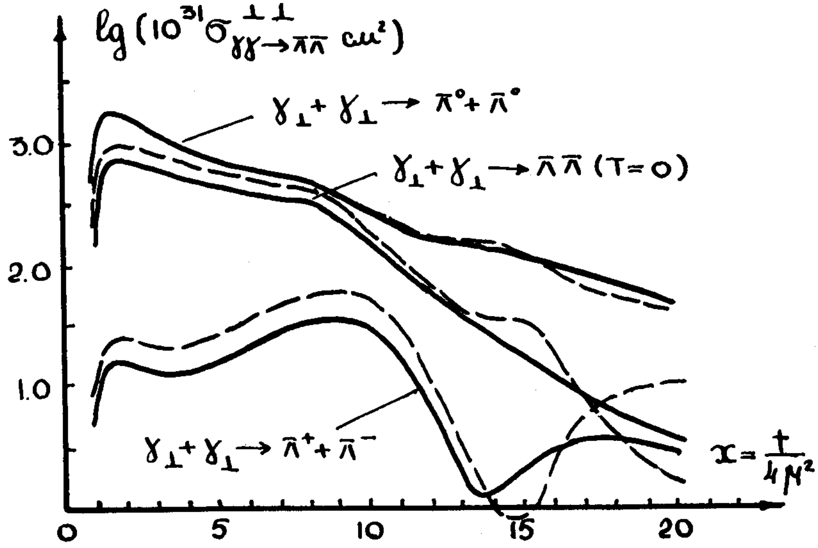
$\lg(10^{31}\sigma^{\perp\perp}_{\gamma\gamma\to\pi^+\pi^-,\pi^0\pi^0}\ \text{см}^2),\ \lg(10^{32}\sigma^{\perp\perp}_{\gamma\gamma\to\pi\pi(T=0)}\ \text{см}^2)$
$\gamma_\perp+\gamma_\perp\to\pi\pi\,(T=0)$
$\gamma_\perp+\gamma_\perp\to\pi^0+\pi^0$
$\gamma_\perp+\gamma_\perp\to\pi^++\pi^-$
$x=\frac{t}{4\mu^2}$
4.0
3.0
2.0
1.0
0
5
10
15
20

Рис. 6а.



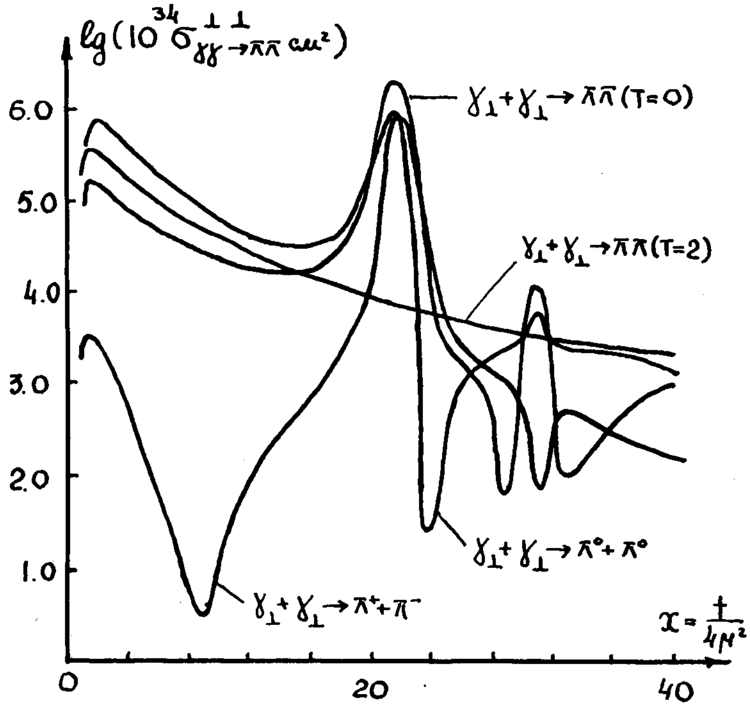
$\lg(10^{31}\sigma^{\perp\perp}_{\gamma\gamma\to\pi\pi}\ \text{см}^2)$
$\gamma_\perp+\gamma_\perp\to\pi^0+\pi^0$
$\gamma_\perp+\gamma_\perp\to\pi\pi\,(T=0)$
$\gamma_\perp+\gamma_\perp\to\pi^++\pi^-$
$x=\frac{t}{4\mu^2}$
3.0
2.0
1.0
0
5
10
15
20

Рис. 6б.



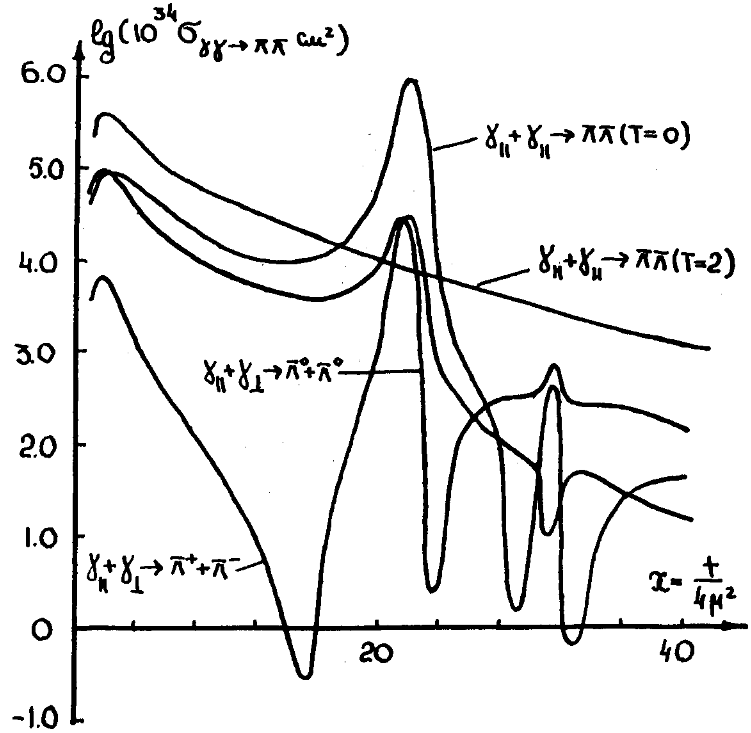
$lg(10^{31}\sigma^{\perp\perp}_{\gamma\gamma\to\pi\pi}\ cm^2)$
3.0
2.0
1.0
$\gamma_\perp + \gamma_\perp \to \pi^0 + \pi^0$
$\gamma_\perp + \gamma_\perp \to \pi\pi\ (T=0)$
$\gamma_\perp + \gamma_\perp \to \pi^+ + \pi^-$
$x = \frac{t}{4\mu^2}$
0
5
10
15
20

Рис. 7.



lg(10^34 σ⊥⊥ γγ→ππ см²)
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0
20
40
γ⊥+γ⊥→ππ(T=0)
γ⊥+γ⊥→ππ(T=2)
γ⊥+γ⊥→π°+π°
γ⊥+γ⊥→π⁺+π⁻
x = t/4μ²

Рис. 8а.



$lg(10^{34}\sigma_{\gamma\gamma\to\pi\pi}$ см$^2)$
6.0
5.0
4.0
3.0
2.0
1.0
0
-1.0
20
40
$x = \frac{t}{4\mu^2}$
$\gamma_{\parallel} + \gamma_{\parallel} \to \pi\pi (T=0)$
$\gamma_{\parallel} + \gamma_{\parallel} \to \pi\pi (T=2)$
$\gamma_{\parallel} + \gamma_{\perp} \to \pi^0 + \pi^0$
$\gamma_{\parallel} + \gamma_{\perp} \to \pi^+ + \pi^-$

Рис. 8б.