ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 6270

Л.Г. Заставенко

ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ СИСТЕМЫ МНОГИХ ФЕРМИОНОВ, СВЯЗАННЫХ СИЛАМИ ТЯГОТЕНИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1972

Р2 - 6270

Л.Г. Заставенко

ОСНОВНОЕ СОСТОЯНИЕ СИСТЕМЫ МНОГИХ ФЕРМИОНОВ, СВЯЗАННЫХ СИЛАМИ ТЯГОТЕНИЯ

Направлено в ТМФ

§1. Введение

В предыдущей работе[1] мы получили главный при $N \to \infty$ член в энергии системы N бозонов, связанных силами тяготения.

Аналогичная задача для системы частиц Ферми тоже допускает асимптотическое решение. Система большого числа частиц Ферми, связанных силами гравитационного притяжения, является квазиклассической, и для ее описания можно воспользоваться методом Томаса-Ферми ([2] §69).

В §2 мы сведем рассматриваемую задачу к краевой задаче (10,12, 13) для дифференциального уравнения (9), в §3 выводится выражение для энергии основного состояния системы фермионов. В Приложении дается элементарный вывод уравнения Томаса-Ферми из уравнений Хартри.

§2. Уравнение Томаса-Ферми

Пусть $\phi(y)$ - потенциал поля тяжести, создаваемого рассматриваемой системой частиц, и $\rho(y)$ - плотность частиц:

$$\phi(y) = -\int \frac{\rho(z)\,d^3z}{|y-z|}\,, \tag{1}$$

$$\int \rho(y)\,d^3y = N\,, \tag{2}$$

$$\rho(y) \geq 0\,. \tag{3}$$

Из (1) и (2) следует

$$\phi(y) \approx -N/|y| \qquad \text{при } |y| \to \infty. \tag{4}$$

Такой потенциал $\phi(y)$ имеет бесконечно много уровней; из них заняты должны быть N уровней с энергией меньшей, чем некоторая величина ϕ_0, $\phi_0 < 0$. Все уровни с энергией меньшей, чем ϕ_0, должны быть заняты, все уровни с энергией большей, чем ϕ_0 – свободны. Метод Томаса-Ферми дает связь

$$4\pi\rho(y) = \begin{cases} \left(\dfrac{\phi_0-\phi(y)}{b}\right)^{3/2} & \text{если } \phi(y) < \phi_0 \\ 0 & \text{если } \phi(y) > \phi_0 \end{cases} \tag{5}$$

величин $\rho(y)$, $\phi(y)$, ϕ_0; здесь

$$b = \left(\frac{3\pi}{8\sqrt{2}}\right)^{2/3} \tag{6}$$

Следующее из (1), (5) уравнение Пуассона для сферически симметричной функции $\phi(y)$ после замен

$$y = x\, b\, N^{-1/3} \tag{7}$$

$$\phi(y) = -\frac{N^{4/3}}{b}\,\frac{\kappa(x)}{x} \tag{8}$$

принимает вид (ср. уравнение (69.7) в /2/)

$$\sqrt{x}\,\frac{d^2\kappa}{dx^2} = \begin{cases} -\left(\kappa(x) - \dfrac{x}{x_0}\right)^{3/2}, & \kappa(x) > \dfrac{x}{x_0} \\ 0 & \kappa(x) < \dfrac{x}{x_0} \end{cases} \tag{9}$$

2.1. Обсудим краевые условия для уравнения (9).

Прежде всего: из (8) ввиду отсутствия сосредоточенного заряда в точке $|y| = 0$ следует

$$\kappa(0) = 0\,. \tag{10}$$

Из (1) следует

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = 4\pi\frac{1}{y^2}\int_0^y \rho(z)\, z^2\, dz\,.$$

Таким образом, ввиду (3) функция $\phi(y)$ монотонно растёт с ростом $y = |\vec{y}\,|$. Отсюда и из (5) вытекает, что есть число y_0 такое, что

$$\rho(y) > 0 \qquad \text{при} \qquad y < y_0$$
$$\rho(y) = 0 \qquad \text{при} \qquad y \geq y_0 \tag{11}$$

поэтому соотношение (4) при $y > y_0$ становится точным. Это дает для функции $\kappa(x)$:

$$\kappa(x_0) = 1 \tag{12}$$

(здесь и в (9) x_0 - число, связанное с y_0 по формуле (7)).

Переписав (1) в виде

$$\frac{\phi(y)}{4\pi} = -\frac{1}{y}\int_0^y z^2 dz\,\rho(z) - \int_y^\infty z\,dz\,\rho(z),$$

имеем

$$\frac{d}{dy}\frac{y\phi(y)}{4\pi} = -\int_y^\infty z\,dz\,\rho(z).$$

При $y = y_0$ находим

$$\frac{d}{dy}(y\,\phi(y))\Big|_{y=y_0} = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{d\kappa}{dx}\Big|_{x=x_0} = 0. \tag{13}$$

2.2. Краевая задача (9), (10), (12), (13) состоит в подборе параметра x_0 так, чтобы решение уравнения (9), определенное условиями (12), (13), удовлетворяло также дополнительному условию (10).

§3. Энергия основного состояния

Подсчитаем энергию E_N основного состояния рассматриваемой системы N фермионов. Энергия состоит из двух частей – кинетической и потенциальной. По теореме вириала, имеющей место для систем, связанных силами $\sim 1/r^2$, кинетическая энергия равна минус половине потенциальной. Таким образом,

$$E_N = \frac{1}{4} \int \rho \phi \, d^3 \gamma.$$

Подставив сюда (5)-(8), находим

$$E_N = - \frac{N^{7/3}}{4b} I(x_0),$$

$$I(x_0) = \int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{x}} \kappa \left(\kappa - \frac{x}{x_0}\right)^{3/2}.$$

Воспользовавшись уравнением (9) и краевыми условиями (10), (13), получаем:

$$I(x_0) = - \int_0^{x_0} dx \kappa \kappa'' = + \int_0^{x_0} (\kappa'(x))^2 dx.$$

Для подсчёта последнего интеграла рассмотрим формулу

$$-\frac{1}{2}\int_0^{x_0}(\kappa')^2 dx = \int_0^{x_0} x\kappa'\kappa'' dx = -\int_0^{x_0} dx\sqrt{x}\,\kappa'(\kappa - \frac{x}{x_0})^{3/2}$$

$$= -\int_0^{x_0} dx\sqrt{x}(\kappa' - \frac{1}{x_0})(\kappa - \frac{x}{x_0})^{3/2} - \frac{1}{x_0}\int_0^{x_0}\sqrt{x}(\kappa - \frac{x}{x_0})^{3/2} dx$$

$$= -\frac{2}{5}\int_0^{x_0} dx\sqrt{x}\frac{d}{dx}(\kappa - \frac{x}{x_0})^{5/2} + \frac{1}{x_0}\int_0^{x_0} x\,\kappa'' dx =$$

$$= \frac{1}{5}\int_0^{x_0} dx\frac{1}{\sqrt{x}}(\kappa - \frac{x}{x_0})^{5/2} - \frac{1}{x_0} =$$

$$= -\frac{1}{x_0} - \frac{1}{5}\int_0^{x_0} dx(\kappa - \frac{x}{x_0})\kappa'' =$$

$$= -\frac{1}{x_0} + \frac{1}{5}\int_0^{x_0} dx(\kappa')^2 + \frac{1}{5x_0}[x\kappa'\Big|_0^{x_0} - \int_0^{x_0}\kappa' dx]$$

$$= -\frac{6}{5x_0} + \frac{1}{5}\int_0^{x_0} dx(\kappa')^2 .$$

(Мы воспользовались (9), (10), (12), (13)). Итак,

$$\dot{I}(x) = \frac{12}{7x_0}$$

и

$$E = -\frac{N^{7/3}}{b x_0}\frac{3}{7} .$$

3.1. Следует иметь в виду, что в настоящей работе принята система единиц, в которой единицей длины и энергии являются $h^2/(G m^3)$ и $G^2 m^5/h^2$ соответственно; здесь G – гравитационная постоянная, m – масса частицы.

3.2. Численный расчёт дает κ_0 =5.10, $d\kappa / dx|_{x=0}$ =0,46.

Заключение

В отличие от случая частиц Бозе [1] асимптотическое решение при $N \to \infty$ для случая частиц Ферми представляет физический интерес: для системы с массой порядка массы Земли вклады в энергию от гравитационных и кулоновских сил имеют одинаковый порядок величины [3]. Это различие связано с принципом запрета, не разрешающим частицам Ферми располагаться слишком близко друг к другу.

В заключение выражаю благодарность академику М.А. Маркову и И.Н. Михайлову за интерес к работе.

Приложение

Дираком [4] было показано, что уравнение Томаса-Ферми выводится из системы уравнений Хартри-Фока (см. также работу [5], где сосчитаны поправки к методу Томаса-Ферми). Здесь мы получим тот же результат более элементарным способом. Рассмотрим атом, состоящий из ядра с зарядом z и z электронов. Согласно Хартри, такая система приближенно описывается системой уравнений

$$\{ -\frac{1}{2}\Delta - \frac{z}{r} + \int \frac{\rho(\vec{y})\, d^3 y}{|\vec{x} - \vec{y}|} \} \psi_n(\vec{x}) = \lambda_n \psi_n(\vec{x}) . \tag{П.1}$$

В (1) Δ – оператор Лапласа, $n = 1, 2, \ldots, z/2$,

$$\rho(\vec{y}) = 2 \sum_{n=1}^{z/2} |\psi_n(\vec{y})|^2 . \tag{П.2}$$

Двойка в (П.2) соответствует учёту спиновой степени свободы. Примем для $\psi_n(x)$ в квазиклассическом приближении

$$\psi_n(x) = \frac{\cos\{\int_a^x P_{ql}(s)\, as\}}{\sqrt{P_{ql}(x)}\sqrt{\frac{1}{2}\int_a^b \frac{as}{P_{ql}(s)}}} \frac{Y_{l\mu}(\vec{x}/x)}{x} . \tag{П.3}$$

Здесь

$$P_{ql}(x) = \sqrt{2(\lambda_{ql} - v_1(x) - \frac{l(l+1)}{2x^2})} ,$$

a и b – корни уравнения

$$P_{ql}(x) = 0,$$

индекс n обозначает совокупность трех квантовых чисел: q, l, μ, μ – проекция момента, l – момент, q – радиальное квантовое число, число узлов радиальной функции; собственные значения λ_{ql} определяются уравнением

$$\int_{a_{ql}}^{b_{ql}} P_{ql}(s)\,ds = \pi q, \qquad (\text{П.5})$$

$$v_1(x) = -\frac{z}{|x|} + \int \frac{\rho(y)\,d^3y}{|x-y|}. \qquad (\text{П.6})$$

Подставим (П.3) в (П.2), заменив осциллирующий множитель $\cos^2\{\int_q^x P_{ql}(s)\,ds\}$ на его среднее значение 1/2:

$$\rho(y) = \sum_{q,l} \frac{2l+1}{4\pi y^2}\{P_{ql}(y)\frac{1}{2}\int_a^b \frac{as}{P_{ql}(s)}\}^{-1}. \qquad (\text{П.7})$$

Мы сразу выполнили суммирование по μ, воспользовавшись теоремой сложения сферических функ'ций. Из (П.5) следует:

$$(\lambda_{q+1,l} - \lambda_{q,l})\int_a^b \frac{ds}{P_{ql}(s)} \approx \pi.$$

Таким образом, заменив в (П.7) суммирование по l и q интегрированием, получим

$$\rho(\gamma) \approx \frac{1}{\pi} \int \frac{dl^2}{2\gamma^2} \int \frac{d\lambda}{\sqrt{2(\lambda - v_1(\gamma) + \frac{l^2}{2\gamma^2})}}.$$

Здесь интеграл по λ следует брать в пределах от $\lambda_{min}(l)$ до некоторого λ_{max} ; $\lambda_{min}(l)$ определяется условием обращения в нуль выражения под радикалом, λ_{max} от l не зависит (иначе рассматриваемое состояние не будет состоянием с наименьшей энергией и окажется неустойчивым). Далее интеграл по l^2 следует брать по области, в которой выражение под радикалом положительно. Таким образом,

$$\rho(\gamma) = \begin{cases} \frac{2\sqrt{2}}{3\pi^2}[\lambda_{max} - v_1(\gamma)]^{3/2}, & \lambda_{max} > v_1(\gamma) \\ 0, & \lambda_{max} < v_1(\gamma). \end{cases} \qquad (П.8)$$

Это и есть основное уравнение метода. Томаса-Ферми (ср. /2/, формула (69.3)).

Литература

1. Л.Г. Заставенко. Препринт ОИЯИ, Р2-5934, Дубна, 1970.
2. П.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Квантовая механика, часть 1. Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1948, Ленинград.
3. I.M.Levy-Leblond. Journ-Math.Phys., 10, 306 (1969).
4. P.A.M. Dirac. Proc.Camb.Phill.Soc., 26, 376, 1930.
5. Д.А. Киржниц. ЖЭТФ, 32, 115 (1957).

Рукопись поступила в издательский отдел
4 февраля 1972 года.

Примечание при корректуре

Нам стало известно, что наша задача рассмотрена в статье R. Ruffini, S. Bonazzola. Phys.Rev., **187**, 1767 (1969).

В связи с этим отметим, что сверх информации, содержащейся в этой статье, в нашей работе а) проведено численное решение краевой задачи (9), (10), (12), (13) и определена величина x_0, б) проведен подсчёт энергии основного состояния (§3), в) дан элементарный вывод уравнения Томаса-Ферми (Приложение).