СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 6209

В.Н. Стрельцов

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ГРУПП ЛИ К ГАЛИЛЕЕВЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ

1971

P2 - 6209

В.Н. Стрельцов

ОБ ОСОБЕННОСТЯХ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕОРИИ ГРУПП ЛИ К ГАЛИЛЕЕВЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМ*

* В порядке обсуждения

1. Прежде чем перейти к непосредственному рассмотрению вопроса, сформулированного в заглавии, нам необходимо коснуться сначала процедуры перехода от (точных) преобразований Лоренца к галилевскому приближению.

Для того чтобы получить преобразование Галилея, отбросим в формулах Лоренца

$$x' = \frac{x - \beta c t}{(1-\beta^2)^{1/2}}, \qquad t' = \frac{t - (\beta/c)x}{(1-\beta^2)^{1/2}}, \tag{1}$$

где $\beta = v/c$, члены β^2. При этом будем иметь:

$$x' = x - \beta c t, \tag{2}$$

$$t' = t - \frac{\beta}{c} x. \tag{2'}$$

Здесь формула (2) совпадает с соответствующей формулой преобразования Галилея, тогда как выражение (2') отличается от галилеевской формулы преобразования времени наличием второго члена. Однако, как показано ранее /1/, отношение указанного члена к первому слагаемому (t) составляет по порядку величины β^2, а поэтому в рассматриваемом приближении его следует отбросить как малый. В результате придем к требуемой формуле:

$$t' = t. \tag{3}$$

С учетом предыдущих результатов получим теперь галилеевское приближение следующих двух выражений:

$$\frac{dx'}{d\beta} = -c\,\frac{t-(\beta/c)x}{(1-\beta^2)^{3/2}},$$

$$\frac{dt'}{d\beta} = -\frac{1}{c}\,\frac{x-\beta c t}{(1-\beta^2)^{3/2}}. \tag{4}$$

Коль скоро последние выражения отличаются от формул (1) фактически только показателями степени знаменателей, то в галилеевском приближении для них, очевидно, будем иметь:

$$\frac{dx'}{d\beta} = -ct, \tag{5}$$

$$\frac{dt'}{d\beta} = -\frac{1}{c}(x-\beta c t). \tag{6}$$

Или, привлекая формулы преобразования Галилея (2) и (3), перепишем (5) и (6) в виде:

$$\frac{dx'}{d\beta} = -ct', \tag{7}$$

$$\frac{dt'}{d\beta} = -\frac{1}{c}x'. \tag{8}$$

Если мы вспомним теперь основную теорему теории непрерывных групп Ли, то увидим, что выражение (7) и (8) имеет требуемую данной теоремой форму:

$$\frac{dx'}{d\beta} = \lambda(\beta)\,F(x',t'),$$

$$\frac{dt'}{d\beta} = \lambda(\beta)\,\Phi(x',t').$$

А это означает, что совокупность преобразований Галилея образует группу.

Может быть точнее следовало бы сказать, что при переходе к галилеевскому приближению справедливость основной теоремы теории групп Ли не нарушается. При этом функции $F(x',t')$ и $\Phi(x',t')$ имеют тот же самый вид, что и в релятивистском случае. В то же время, если релятивистское выражение для $\lambda(\beta)$ имеет форму:

$$\lambda(\beta) = (1-\beta^2)^{-1},$$

то в галилеевском приближении $\lambda(\beta) = 1$. Последний факт, очевидно, находится в полном соответствии с процедурой перехода к галилеевскому приближению, связанной с отбрасыванием членов порядка β^2.

С другой стороны, если для получения величины $dt'/d\beta$ мы просто продифференцируем формулу (13) то придем к другому результату:

$$\frac{dt'}{d\beta} = 0 \qquad\qquad \Phi(x', t') = 0 .$$

Таким образом, особенности, на которые указывалось ранее в связи с применением теории групп Ли к собственно нерелятивистским преобразованием /2/, на самом деле имеют место и в случае применения отмеченной теории к преобразованиям Галилея.

2. В заключение для полноты отметим, что в собственно нерелятивистском приближении формулы (4) будут, например, иметь вид:

$$\frac{dx'}{d\beta} = -c(1+\beta^2)[t(1+\frac{1}{2}\beta^2) - \frac{\beta}{c}x], \tag{9}$$

$$\frac{dt'}{d\beta} = -\frac{1}{c}(1+\beta^2)[(x-\beta ct)(1+\frac{1}{2}\beta^2)]. \tag{10}$$

Здесь мы учли, что отношение последнего члена к максимальному в (9) составляет по порядку величины β^2, а поэтому, например, величина $\beta^3 x/t \approx \beta^4$ и лежит за пределами интересующей нас точности.

Привлекая далее формулы собственно нерелятивистских преобразований

$$x' = (x-\beta ct)(1+\frac{1}{2}\beta^2), \quad t' = t(1+\frac{1}{2}\beta^2) - \frac{\beta}{c}x,$$

перепишем выражения (9) и (10) в виде:

$$\frac{dx'}{d\beta} = -c(1+\beta^2)t',$$

$$\frac{dt'}{d\beta} = -\frac{1}{2}(1+\beta^2)x'.$$

Отсюда мы с очевидностью можем заключить о том, что основная теорема теории групп Ли остается справедливой и при переходе к собственно нерелятивистскому приближению.

Л и т е р а т у р а

1. В.Н.Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-5313, Дубна, 1970.
2. В.Н.Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-5625, Дубна, 1971.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 декабря 1971 г.