СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 6208

В.Н.Стрельцов

ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОНЯТИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

1971

Р2 - 6208

В.Н.Стрельцов

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ПОНЯТИЯ ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОЙ КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

1. Рассмотрим релятивистские выражения для плотности и плотности тока вероятности в квантовой механике:

$$\vec{i} = \frac{h}{2mi}(\psi^* \vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\psi^*) , \quad (1)$$

$$\rho = \frac{ih}{2mc^2}\left(\psi^* \frac{\partial\psi}{\partial t} - \psi\frac{\partial\psi^*}{\partial t}\right) . \quad (2)$$

Если далее мы воспользуемся формулами преобразования Лоренца для координат, то сможем получить соответствующие формулы преобразования для 4-вектора тока вероятности, которые будут совпадать с аналогичными формулами для плотности электрического заряда и тока.

Далее может возникнуть такой вопрос:

А как будут преобразовываться отмеченные величины при переходе к (собственно) нерелятивистскому приближению?

Для того чтобы ответить на него в соответствии с полученными ранее результатами /1/, воспользуемся нерелятивистскими пространственно-подобными преобразованиями:

$$x' = x\gamma_1 - \beta c t, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \left(t - \frac{\beta}{c}x\right)\gamma_1 , \quad (3)$$

где $\gamma_1 = 1 + \frac{1}{2}\beta^2$, а $\beta = \frac{v}{c}$.

Откуда для формул преобразований $\partial\psi / \partial x$ и $\partial\psi / \partial t$ будем иметь

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\psi'}{\partial x'}\gamma_1 - \frac{\beta}{c}\frac{\partial\psi'}{\partial t'}\gamma_1 , \quad (4)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \psi'}{\partial x'}\gamma_1 - \beta c \frac{\partial \psi'}{\partial x'} . \tag{5}$$

Если подставить далее формулу (4) и комплексно ей сопряженную в выражение (1), то мы получим, очевидно, следующую формулу:

$$i_x = (i'_x + \beta c \rho')\gamma_1 , \tag{6}$$

определяющую, вообще говоря, некоторый закон преобразования для плотности тока вероятности при переходе от одной системы отсчёта к другой в нерелятивистском случае. Аналогичным путем для формулы преобразования плотности вероятности найдем:

$$\rho = \rho'\gamma_1 + \frac{\beta}{c} i'_x . \tag{6'}$$

На основании вышеуказанной процедуры можно получить также формулы преобразования для i_x и ρ в галилеевском приближении. Они будут определяться выражениями:

$$i_x = i'_x + \beta c \rho' , \tag{7}$$

$$\rho = \rho' . \tag{7'}$$

Нетрудно видеть, что полученные таким образом формулы преобразования будут совпадать с соответствующими приближенными формулами для плотностей электрического тока и заряда [2].

Однако прежде чем перейти к рассмотрению другого вопроса, непосредственно связанного с уже затронутым и касающегося инвариантности уравнения непрерывности в нерелятивистском приближении, мы должны обратить внимание на следующее.

Хотя нетрудно показать, что производные по x и t от волновой функции должны быть связаны приближенным равенством (см., например, [1])

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} \simeq \frac{\beta}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t} ,$$

для величин, описываемых выражениями (1) и (2), подобное равенство

$$j_x \simeq \beta c \rho ,$$

может не иметь места. Поскольку, вообще говоря, разность двух больших величин (ρ) может оказаться достаточно малой величиной. Поэтому, строго говоря, нельзя утверждать и то, что формулы преобразования для j_x и ρ должны определяться именно полученными выше выражениями.

Ответ на поставленный вопрос можно получить на основании рассмотрения формул преобразований для производных от j_x и ρ по x и t, например, в нерелятивистском и галилеевом приближениях. Использование формул (3), (6), (6'), (7) и (7') и разработанной ранее процедуры получения приближенных равенств дает, что

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} \simeq \beta^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} .$$

Но последнее приближенное равенство, очевидно, противоречит следующему (точному) равенству

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} ,$$

которое непосредственно вытекает из (нерелятивистского) уравнения непрерывности.

Чтобы устранить отмеченную непоследовательность, мы вынуждены отказаться от полученных выше формул (6), (6'), (7) и (7'), заменив их соответственно пространственно-подобными выражениями вида

$$j_x = j_x' \gamma_1 + \beta c \rho' , \tag{8}$$

$$\rho = (\rho' + \frac{\beta}{c} j_x') \gamma_1 \tag{8'}$$

и

$$j_x = j_x' , \tag{9}$$

$$\rho = \rho' + \frac{\beta}{c} j_x' . \tag{9'}$$

Отметим здесь, что принятие формул преобразований (8), (8'), (9) и (9') приводит к замене прежнего приближенного равенства, связывающего j_x и ρ, на выражение вида

$$\rho \simeq \frac{\beta}{c} j_x .$$

2. С учётом вышеизложенного остановимся теперь на процедуре доказательства инвариантности уравнения непрерывности в нерелятивистском приближении.

Привлекая формулы (8), (8') и (3) и отбрасывая заведомо малые (порядка β^4) члены для формул преобразования $\partial \rho / \partial t$ и $\partial j_x / \partial x$, будем иметь:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho'}{\partial t'}(1+\beta^2) + \frac{\beta}{c}\frac{\partial j'_x}{\partial t'}(1+\beta^2) - \beta c \frac{\partial \rho'}{\partial x'}\gamma_1 - \beta^2 \frac{\partial j'_x}{\partial x'} ,$$

$$\frac{\partial j_x}{\partial x} = \frac{\partial j'_x}{\partial x'}(1+\beta^2) + \beta c \frac{\partial \rho'}{\partial x'}\gamma_1 - \frac{\beta}{c}\frac{\partial j'_x}{\partial t'}(1+\beta^2) - \beta^2 \frac{\partial \rho'}{\partial t'} .$$

Откуда мы сможем заключить, что и в новой системе отсчёта (K') уравнение непрерывности будет иметь прежний вид:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial j'_x}{\partial x'} = 0 .$$

Иными словами, указанное уравнение удовлетворяет требованию инвариантности и в нерелятивистском приближении при условии, что плотность и плотность тока вероятности преобразуются по формулам (8) и (8'), отличающимся, например, от соответствующих формул для плотностей электрического заряда и тока.

3. Коснемся теперь вопросов, связанных с общепринятым определением понятия плотности вероятности в квантовой механике.

Напомним для этого, что в нерелятивистском приближении указанная величина дается известным выражением

$$\rho = |\psi_1|^2 . \tag{10}$$

Причём переход к нему от релятивистского выражения (2) осуществляется с помощью замены (см., например,[3])

$$\psi = \psi_1 \exp\left(-\frac{imc^2}{h}t\right)$$

и последующего отбрасывания первого члена в производной

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = \left(\frac{\partial\psi_1}{\partial t} - \frac{imc^2}{h}\psi_1\right) e^{-imc^2 t/h} \tag{11}$$

как малого по сравнению с ее вторым членом.

Или, иначе (см., например,[4]), подставляя в (2)

$$\frac{h}{i}\frac{\partial\psi}{\partial t} = -E\psi ,$$

получают

$$\rho = |\psi|^2 \frac{E}{mc^2} .$$

Откуда с учётом того, что $E = mc^2 + E_{kin}$, следует

$$\rho = |\psi|^2 \left(1 + \frac{E_{kin}}{mc^2}\right) . \tag{12}$$

Отбрасывая далее в формуле (12) последний член, и приходят к известному выражению (10).

Однако с приведенными выше рассуждениями вряд ли можно согласиться.

Дело в том, что уравнение Шредингера, которое, в конечном счёте, служит основой для получения выражения (10), соответствует нерелятивистскому приближению, отражая структуру известной нерелятивистской формулы для энергии

$$E_{kin} = \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2}mv^2 .$$

Но в рамках нерелятивистского приближения члены порядка β^2 принимаются во внимание, а отбрасываются только члены порядка β^4 и меньше. Поэтому в нерелятивистском случае, где

$$E = mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2\right),$$

второй член в формуле (12) не может быть отброшен, равно как не может быть отброшен и первый член в формуле (11). А это означает, что и в нерелятивистском приближении мы должны пользоваться релятивистским приближением для плотности вероятности (2).

Последнее утверждение подкрепляется тем фактом, что использование выражения (10) приводит к следующей формуле преобразования для плотности вероятности:

$$\rho = \rho',$$

которая, очевидно, отличается даже от соответствующей галилеевской формулы (9'). Такое положение, естественно, нельзя считать удовлетворительным.

С другой стороны, сразу же возникают трудности, связанные с доказательством инвариантности уравнения непрерывности в нерелятивистском приближении. Действительно, в этом случае после перехода к другой системе отсчёта будем иметь:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\partial j_x'}{\partial x'} + \beta c \frac{\partial \rho'}{\partial x'} \gamma_1 - \frac{\beta}{c} \frac{\partial j_x'}{\partial t'} (1 + \beta^2) = 0.$$

Нетрудно показать, что в последнем выражении четвертый член сравним по порядку величины с двумя первыми, тогда как третий мал. А это означает, что использование формулы (10) для плотности вероятности противоречит требованию инвариантности уравнения непрерывности в нерелятивистском приближении. Таким образом, если мы хотим сохранить в силе указанное требование, мы вынуждены отказаться от формулы (10).

Литература

1. В.Н. Стрельцов. Сообщения ОИЯИ, Р2-5522, Дубна, 1970; Р2-5823, Дубна, 1971.
2. В.Н. Стрельцов. Сообщение ОИЯИ, Р2-5130, Дубна, 1970.
3. Л. Шифф. Квантовая механика, ИЛ, М., 1959, стр. 365.
4. Н. Мотт, И. Снеддон. Волновая механика и ее применение. Изд. "Наука", ГРФМЛ, М, 1966, стр. 315; Г. Бете. Квантовая мехника. Изд. "Мир", М., 1965, стр. 227.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 декабря 1971 года.