СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6199

А.А.Атанасов

# ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДВУХЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1971

Р2 - 6199

А.А.Атанасов

# ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА ДЛЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ДВУХЧАСТИЧНОЙ СИСТЕМЫ

Атанасов А. P2-6199

Применение теории возмущений к решению уравнения Шредингера для релятивистской двухчастичной системы

Метод теории возмущений применяется к решению двухчастичной релятивистской задаче для системы, описываемой потенциалом Юкавы. Получена релятивистская формула Бальмера и исследованы условия ее применения. Исследованы полюса Редже двухчастичной релятивистской амплитуды рассеяния и ее асимптотическое поведение.

**Сообщения Объединенного института ядерных исследований**

**Дубна, 1971**

Atanasov A. P2-6199

Application of the Perturbation Theory to Solving the Schrödinger Equation for a Relativistic Two-Particle System

The perturbation theory method is applied to solving the two-particle relativistic problem for a system described by the Yukawa potential. The relativistic Balmer formula is obtained and conditions of its application are studied as well as the Regge poles for two-particle relativistic scattering amplitude and its asymptotic behaviour.

**Communications of the Joint Institute for Nuclear Research.**

**Dubna, 1971**

## §1. Введение

Релятивистскую двухчастичную задачу можно свести к решению трехмерного уравнения типа Липпмана-Швингера /1,2/. Потенциал определяется в виде ряда по константе связи, который совпадает с разложением амплитуды рассеяния по теории возмущений на энергетической поверхности. Для эрмитового потенциала выполняется условие унитарности. В пределе, когда $m_2 \to \infty$, получается уравнение, которое совпадает с уравнением Клейна-Гордона для движения первой частицы во внешнем поле.

Мы ограничимся рассмотрением модели из двух скалярных комплексных полей, взаимодействующих между собой посредством обмена скалярной частицей с массой $\mu$ и таким образом, чтобы в первом приближении получался потенциал Юкавы. Соответствующее однородное уравнение, описывающее связанные состояния, отличается от уравнения Шредингера только кинематическими факторами.

Для того, чтобы применить метод теории возмущений, разложим потенциал по степеням массы обменной частицы. Если $\mu = 0$, то получим точно решаемую кулоновскую задачу. Поэтому целесообразно рассматривать потенциал Юкавы как сумму кулоновского потенциала и остатка, который можно трактовать как малое возмущение, предполагая малость $\mu$. Используя метод, аналогичный методу Мюллера /3,4/, в котором проводится разложение по обратным степеням импульса, получаем собственные значения и собственные функции уравнения Шредингера для двухчастичной релятивистской задачи.

В §2 получена релятивистская формула Бальмера для системы, описываемой потенциалом Юкавы и исследованы условия ее применения. В § 3 получены Редже-полюса двухчастичной релятивистской амплитуды рассеяния и ее асимптотическое поведение.

## § 2. Релятивистская формула Бальмера для системы из двух частиц, взаимодействующих посредством потенциала Юкавы

Рассмотрим уравнения Шредингера для системы из двух релятивистских частиц, взаимодействующих между собой посредством потенциала Юкавы

$$\left(\Delta + b^2 + \frac{2m_1 m_2}{w}\,\frac{a}{r}\,e^{-\mu r}\right)\Psi = 0, \tag{1}$$

где на энергетической поверхности выполнены условия

$$\begin{gathered} p_1^0 + p_2^0 = w = q_1^0 + q_2^0, \quad \vec{p}^{\,2} = \vec{q}^{\,2} = b^2(w), \\ 4w^2 b^2(w) = w^4 - 2(m_1^2 + m_2^2)w^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2. \end{gathered} \tag{2}$$

Если в радиальном уравнении

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \left[b^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} - V(r)\right]\Psi = 0 \tag{3}$$

сделаем подстановку

$$\Psi(r) = e^{ibr} r^{l+1} \phi(r), \tag{4}$$

$$z = -2ibr, \quad \beta = ib, \tag{5}$$

то получим

$$z\frac{d^2\phi}{dz^2} + (2l + 2 - z)\frac{d\phi}{dz} - \left[l + 1 + \frac{z}{(2\beta)^2}V\left(-\frac{z}{2\beta}\right)\right]\phi = 0. \tag{6}$$

Допустим, что масса обменной частицы мала. Поэтому разложим $V$ в ряд по степеням $\mu$ :

$$\begin{aligned} V &= -\frac{2m_1 m_2}{w}\,a\,\frac{e^{-\mu r}}{r} = \frac{2m_1 m_2}{w}\,a\mu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-\mu r)^{k-1} = \\ &= \frac{2m_1 m_2}{w}\,a\mu \sum_{i=-1}^{\infty} \frac{1}{(i+1)!}\cdot\frac{1}{(2\beta)^i}\,\mu^i z^i = \sum_{i=-1}^{\infty} M_{i+1}\left(\frac{z}{2\beta}\right)^i. \end{aligned} \tag{7}$$



Так как в разложении (7) содержатся члены $\left(\frac{\mu}{2\beta}\right)^i$, то мы можем использовать результаты, полученные Мюллером для решения нерелятивистского уравнения Шредингера методом теорий возмущений, где потенциал разлагается по обратным степеням. Например, для связанных состояний получаем обобщенную формулу Бальмера с точностью до членов, содержащих $\mu^2$ :

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{4w^2}\left[w^4 - 2(m_1^2 + m_2^2)w^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2\right] + \frac{2m_1 m_2}{w}\,a\mu = \\ &= \frac{m_1^2 m_2^2 a^2}{(l+n+1)^2}\Big\{1 - 2n(n+1)(l+n+1)^2\mu^2 + \\ &+ (2n+1)(l+n+1)^3\frac{\mu^2 w^2}{2m_1^2 m_2^2 a^2} + (l+n+1)^4\frac{\mu^2 w^2}{m_1^2 m_2^2 a^2} + \ldots\Big\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Из уравнения (8) для $w$ получаем уравнение четвертой степени, которое содержит только $\mu$ в первой степени

$$w^4 - 2(m_1^2 + m_2^2)w^2 + (m_1^2 - m_2^2)^2 - 8m_1 m_2 w a\mu + \frac{4m_1 m_2 a^2}{(n+l+1)^2} = 0. \tag{9}$$

Если разложим $w$ по степеням $\mu$ и ограничимся членами первого порядка, то получим:

$$w_{nl} = \left[m_1^2 + m_2^2 + 2m_1 m_2\left(1 - \frac{a^2}{(n+l+1)^2}\right)^{1/2}\right]^{1/2} + \frac{a\mu}{\left(1 - \frac{a^2}{(n+l+1)^2}\right)^{1/2}}. \tag{10}$$

Второй член в последнем равенстве дает поправку к энергии основного состояния, появляющуюся при учете массы обменной частицы.

При $\mu = 0$ из (10) получаем релятивистскую бальмеровскую формулу для кулоновской задачи. При $n = l = 0$ получается выражение для основного состояния, которое получено в работе /5/ с использованием метода Шмидта для решения интегральных уравнений.

Характерной особенностью кулоновского взаимодействия является наличие бесконечного числа связанных состояний, являющееся результатом вырождения по $n$ состояниям с данным значением $l$. Для потенциала Юкавы число связанных состояний с определенным значением момента $l$ определяется условием

$$w < m_1 + m_2. \tag{11}$$

Решая последнее неравенство относительно $n+l+1$, имея в виду (8) и пренебрегая $\mu^2$, получаем

$$0 \leq l < \sqrt{\frac{1}{2\mu} \cdot \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}} - n - 1. \tag{12}$$

Если значение правой части этого неравенства заключено между $N$ и $N+1$, где $N$ – целое число, то для каждого значения момента $l$ имеется $N$ связанных состояний. Следовательно, при взаимодействии типа Юкавы выражение (10) не имеет смысла при некоторых значениях $n$. В нашем случае вырождение, характерное для кулоновской задачи, частично снимается – получаются связанные состояния только для значений $n$ и $l$, для которых выполнено условие (12).

## §3. Полюса Редже и асимптотика амплитуды рассеяния

Теория возмущения Мюллера позволяет сразу получить матрицу для релятивистской двухчастичной задачи:

$$S(l,b) = \frac{\Gamma\left(l + 1 + \frac{\Delta_l(\mu)}{2\beta}\right)}{\Gamma\left(l + 1 - \frac{\Delta_l(\mu)}{2\beta}\right)}. \tag{13}$$

где выражение

$$\Delta_l(\mu) = \frac{2 m_1 m_2 a}{w} - \frac{2 m_1^2 m_2^2 a^2 \mu}{\beta^2 w^2} + \tag{14}$$

$$+ \frac{1}{2\beta^2}\left[\frac{9}{4\beta^2}\left(\frac{m_1 m_2 a}{w}\right)^2 - l(l+1)\frac{m_1 m_2}{w} a\right]\mu^2 + \dots$$

является бесконечным рядом по степеням массы обменной частицы. Так как $\Gamma$ – мероморфная функция $z$ с полюсами $z = -n$; $n = 0, 1, 2, \dots$, то полюса $S$ -матрицы определяются равенством:

$$l + 1 + \frac{\Delta(\mu)}{2\beta} = -n. \tag{15}$$

Следовательно, положение $n$ -ого полюса Редже определяется выражением:



$$a_n(w) = -n - 1 - \frac{m_1 m_2}{b w i} a - \frac{1}{i b^3} \cdot \frac{m_1^2 m_2^2 a^2 \mu}{w^2} - \frac{1}{4 b^3 i} n(n+1) \frac{m_1 m_2}{w} a \mu^2 + \tag{16}$$

$$+ \frac{2n+1}{4 b^4}\left(\frac{m_1 m_2 a}{w}\right)^2 \mu^2 - \frac{5}{4 b^3 i}\left(\frac{m_1 m_2 a}{w}\right)^2 \mu^2 + \dots$$

Разложим амплитуду рассеяния в ряд по полиномам Лежандра:

$$F(w,t) = \frac{1}{2ib} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)\{S(l,b) - 1\} P(\cos\theta). \tag{17}$$

Используя преобразование Ватсона-Зоммерфельда и имея в виду асимптотическое поведение полиномов Лежандра

$$P_{a_n}(-z) \cong \frac{\Gamma(2a_n + 1)}{\{\Gamma(a + 1)\}^2} \cdot \left(-\frac{1}{2} z\right)^{a_n}, \tag{18}$$

получаем асимптотическое поведение амплитуды рассеяния в $s$ -канале при больших значениях квадрата переданного импульса $t = -(\vec{p} - \vec{p}\,')^2$:

$$F(w,t) = \frac{i\pi}{2b} \cdot \frac{2a_n(w) + 1}{\sin a_n(w)\pi} R_n(w) \frac{\Gamma(2a_n(w) + 1)}{\{\Gamma(a_n(w)+1)\}^2} \cdot \left(-\frac{t}{4b^2}\right)^{a_n(w)}, \tag{19}$$

где $a_n(w)$ – полюс Редже с наибольшей реальной частью при фиксированном значении $w$, а $R_n$ является вычетом $S$ -матрицы в $n$ -ом полюсе Редже

$$R_n = \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n + 2 + 2a_n(w))}. \tag{20}$$

Если ограничимся членами, содержащими $\mu$ в первой степени, то полюс Редже с максимальной реальной частью будет:

$$a_0 = -1 + \frac{m_1 m_2}{b w} a i + i \frac{m_1^2 m_2^2 a^2 \mu}{w^2 b^3}. \tag{21}$$

Очевидно, при $w \to \infty$, $a_0$ стремится к – 1. В этом случае асимптотическое поведение амплитуды определяется выражением:

$$F(w,t) = \frac{\Gamma(-a_0(w))}{\Gamma(1 + a_0(w))} \cdot \left(\frac{i}{2b}\right)\left(-\frac{t}{4b^2}\right)^{a_0(w)}. \tag{22}$$

Выражение (22) определяет асимптотическое поведение амплитуды рассеяния по $t$, полученное в рамках лестничного приближения для взаимодействия двух тяжелых частиц с обменом легкой скалярной частицей. В [1,6] при той же самой постановке задачи рассматривается поведение амплитуды в эйкональном приближении $(t \to 0,\ \mu \to 0)$.

При $\mu = 0$ из (22) получаем амплитуду рассеяния для кулоновской задачи[7]

$$F(w,t) = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{i m_1 m_2}{b w} a\right)}{\Gamma\left(\frac{i m_1 m_2}{b w} a\right)} \cdot \left(\frac{i}{2b}\right)\left(-\frac{t}{4b^2}\right)^{-1 + \frac{i m_1 m_2 a}{b w}} . \tag{23}$$

Из выражения (21) при $m_2 \to \infty$ находим асимптотическое поведение амплитуды рассеяния первой частицы во внешнем поле, определяемой уравнением Клейна-Гордона.

$$F(w,t) = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{m i a}{b} - \frac{m^2 a^2 \mu}{b^3}\right)}{\Gamma\left(\frac{m i a}{b} + \frac{m^2 a^2}{b^3}\mu\right)} \left(\frac{i}{2b}\right)\left(\frac{-t}{4b^2}\right)^{-1 + \frac{m i a}{b} + \frac{m^2 a^2}{b^3}\mu} . \tag{24}$$

## Заключение

Формулировка двухчастичной релятивисткой задачи на основе уравнения Шредингера позволяет при определенных условиях применять теорию возмущений. Для связанных состояний получается формула типа бальмеровской. Кроме этого, в такой постановке некоторые результаты из теории комплексных моментов в потенциальном рассеянии можно легко перенести на релятивистскую задачу двух частиц.

Автор выражает глубокую благодарность А.В.Ефремову, В.Ризову, К.В.Рериху, Д.Стоянову и Хр.Попову за полезные обсуждения и ценные замечания.

## Литература

1. I.T.Todorov. Phys.Rev. D3, 2351 (1971).
2. I.T. Todorov. Препринт ОИЯИ. Р2-5765, 1971.
3. H.I.Muller. Physica 31, 688 (1965).

4. H.I.Muller, K.I.Schilcher. Math.Phys., 9, 255, 1968.
5. А.Атанасов. Препринт ОИЯИ, Р2-5765, 1971.
6. E.Brezin, C.Itzykson and I.Zinn-Justin. Phys.Rev., D1, 2349 (1970).
7. V.Singh. Phys.Rev. 127, 632 (1962).



Рукопись поступила в издательский отдел
29 декабря 1971 г.