СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 6198

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Михал Маевски

НЕКОТОРЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДВУХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

1971

P2 - 6198

Михал Маевски*

НЕКОТОРЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА ДЛЯ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ДВУХ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ

*Лодзинский университет (Польша).

1. Введение

В одном из вариантов статистической теории множественного образования частиц [1] возникла проблема нахождения преобразования Лапласа для произведения двух функций Бесселя полуцелого индекса. В данной работе рассматриваются более общие интегралы и показано, что в случае целых и полуцелых индексов эти интегралы могут быть представлены в конечном виде через известные функции.

Рассматриваются интегралы

$$i_n(\nu, a) = \int_0^\infty e^{-az} J_\nu(z)\, J_{\nu+n}(z)\, dz, \quad \mathrm{Re}\, a > 0,\ 2\nu + n > -1, \tag{1.1}$$

где n - натуральное число или нуль.

Такого рода интегралы, и даже еще более общие, можно вычислять, исходя из представления произведения функций Бесселя в виде ряда [2]

$$J_\nu(z)\, J_\mu(z) = \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+\mu}}{\Gamma(\mu+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{2}\right)^{2k} F(-k, -\nu-k; \mu+1; 1)}{k!\, \Gamma(\nu+k+1)}, \tag{1.2}$$

который можно преобразовать почленно. Результат выражается через обобщенную гипергеометрическую функцию ${}_3F_2$. Например, в случае $\mu = \nu + 1$

$$i_1(\nu, a) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{a}\right)^{2\nu+2} {}_3F_2\left(\nu+3/2, \nu+3/2, \nu+1; \nu+2, 2\nu+2; -\frac{4}{a^2}\right). \tag{1.3}$$

В частном случае $\nu = -1/2$ эта функция сводится к элементарной, и мы получаем известный результат /3/

$$i_1(-1/2, a) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,ctg} \frac{a}{2} . \tag{1.4}$$

Однако и в ряде других случаев $i_n(\nu, a)$ выражаются через известные функции, иногда даже в конечном виде. Один из таких интегралов хорошо известен при произвольных вещественных значениях $\nu > -1/2$:

$$i_0(\nu, a) \equiv \int_0^\infty e^{-az} J_\nu^2(z)\, dz = \frac{1}{\pi} Q_{\nu-1/2}(q) , \tag{1.5}$$

где $q = 1 + a^2/2$, а Q_μ – функция Лежандра второго рода. Пользуясь рекуррентными соотношениями для функций Бесселя, можно выразить через интеграл (1.5) ряд других интегралов.

2. Интегралы $i_1(\nu, a)$ и $\dfrac{d i_1(\nu, a)}{da}$

Умножим рекуррентную формулу

$$J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2J_\nu'(z) \tag{2.1}$$

на $J_\nu(z)$ и совершим преобразование Лапласа полученного равенства. Интегрируя правую сторону по частям и учитывая определение (1.1), приходим к рекуррентному соотношению (ν заменено на $\nu + 1$):

$$i_1(\nu, a) - i_1(\nu+1, a) = a i_0(\nu+1, a), \qquad \nu > -1 . \tag{2.2}$$

Отсюда следует

$$i_1(\nu, a) = \frac{a}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} Q_{\nu-1/2+k}(q), \quad q = 1 + \frac{a^2}{2}, \quad \nu > -1 . \tag{2.3}$$

В случае, когда ν – полуцелое число, известно значение $i_1(-1/2, a)$, и поэтому на основании равенства (2.2)

$$i_1(\ell - 1/2, a) = \frac{1}{\pi} \operatorname{arc\,ctg} \frac{a}{2} - \frac{a}{\pi} \sum_{k=1}^{\ell} Q_{k-1}(q) \tag{2.4}$$

(где $\Sigma = 0$, когда $\ell = 0$), т.е. выражается в конечном виде.

То же самое имеет место, когда ν – целое число, $\nu = \ell$. Поскольку $J_0'(z) = -J_1(z)$, то

$$i_1(0,a) \equiv \int_0^\infty e^{-az} J_0(z)\, J_1(z) = \frac{1}{2} - \frac{a}{\pi} Q_{-1/2}(q), \tag{2.5}$$

где первый член возникает от нижнего предела при интегрировании по частям. Применяя (2.2), находим

$$i_1(\ell,a) = \frac{1}{2} - \frac{a}{2\pi} Q_{-1/2}(q) - \frac{a}{\pi} \sum_{k=1}^{\ell} Q_{k-1/2}(q), \tag{2.6}$$

где $\Sigma = 0$, когда $\ell = 0$.

Согласно определению (1.1) интеграл $\frac{di_1}{da}$ равен

$$-\frac{di_1(\nu,a)}{da} = \int_0^\infty e^{-az} J_\nu(z)\, J_{\nu+1}(z)\, z\, dz, \quad \nu > -3/2\,. \tag{2.7}$$

Для его вычисления умножим рекуррентное соотношение

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu}{z} J_\nu(z) \tag{2.8}$$

на $z\, J_\nu(z)$ и совершим преобразование Лапласа полученного равенства. В результате получается

$$\frac{di_1(\nu-1,a)}{da} + \frac{di_1(\nu,a)}{da} = -\frac{2\nu}{\pi} Q_{\nu-1/2}(q)\,. \tag{2.9}$$

Затем дифференцируем равенство (2.2) и результат вычитаем из (2.9). В итоге имеем

$$\frac{di_1(\nu,a)}{da} = -\frac{2\nu+1}{2\pi} Q_{\nu-1/2}(q) - \frac{a^2}{2\pi} \frac{dQ_{\nu-1/2}(q)}{dq}\,. \tag{2.10}$$

Исключение производной от функции $Q_{\nu-1/2}$ при помощи тождества

$$(q^2-1)\frac{dQ_\mu(q)}{dq} = (\mu+1)\left[\, Q_{\mu+1}(q) - q\, Q_\mu(q)\,\right] \tag{2.11}$$

приводит к формуле

$$-\frac{di_1(\nu,a)}{da}=\frac{1}{2\pi}\,\frac{2\nu+1}{q+1}\,\{\,Q_{\nu-\frac12}(q)+Q_{\nu+\frac12}(q)\,\}\,, \tag{2.12}$$

справедливой для любых $\nu > -\frac12$.

Из формулы (2.9) следует

$$-\frac{di_1(\nu-1,a)}{da}=\frac{2\nu}{\pi}\,Q_{\nu-\frac12}(q)-\frac{1}{2\pi}\,\frac{2\nu+1}{q+1}\,\{\,Q_{\nu-\frac12}(q)+Q_{\nu+\frac12}(q)\,\}\,, \tag{2.13}$$

где $\nu > -\frac12$. Эта формула позволяет вычислить рассматриваемый интеграл, когда значение индекса $\nu-1 > -3/2$.

В случае $\nu=-\frac12$ на основании (1.4) получим

$$-\frac{di_1(-\frac12,\,a)}{da}=\frac{1}{\pi}\,\frac{4}{a^2+4}\,. \tag{2.14}$$

3. Рекуррентное соотношение

В формуле для производной

$$\frac{d}{dz}(J_{\nu+n}(z)\,J_\nu(z))=J_{\nu+n-1}(z)\,J_\nu(z)-J_{\nu+n}(z)\,J_{\nu+1}(z)-n\,\frac{J_{\nu+n}(z)\,J_\nu(z)}{z} \tag{3.1}$$

исключаем знаменатель из последнего члена. Пользуясь тождеством (2.8) либо для $\frac{1}{z}J_{\nu+n}$, либо для $\frac{1}{z}J_\nu$, а затем совершая преобразование Лапласа, приходим, согласно определению (1.1), к соотношениям

$$i_{n+1}(\nu)=-i_{n-1}(\nu)+\frac{2(\nu+n)}{n}(i_{n-1}(\nu)-i_{n-1}(\nu+1))-\frac{2(\nu+n)}{n}a\,i_n(\nu)\,,$$

$$\nu > -\frac{n}{2}\,; \tag{3.2}$$

$$i_{n+1}(\nu+1)=-i_{n-1}(\nu+1)+\frac{2\nu}{n}(i_{n-1}(\nu)-i_{n-1}(\nu+1))-\frac{2\nu}{n}\,a\,i_n(\nu)\,,$$

$$\nu > -\frac{n}{2}\,, \tag{3.3}$$

которые являются трехчленными рекуррентными формулами для $i_n(\nu)$ относительно n. Зная $i_0(\nu)$ и $i_1(\nu)$, можно найти по этим формулам $i_n(\nu)$ для любого n =2,3,4...

Комбинируя (3.2) и (3.3), получаем две других формулы:

$$i_{n+1}(\nu-1) - i_{n+1}(\nu) = -(i_{n-1}(\nu) - i_{n-1}(\nu+1)) + 2ai_n(\nu), \tag{3.4}$$

$$\nu\,(i_{n+1}(\nu) + i_{n-1}(\nu)) = (\nu+n)\,(i_{n+1}(\nu-1) + i_{n-1}(\nu+1)), \tag{3.5}$$

которые наряду с (2.2) очень полезны при приведении $i_n(\nu)$ к начальным функциям i_0, i_1. Формула (3.4) является аналогом формулы (2.2).

Заметим, что структура этих формул такова, что не позволяет исключить, например, $i_2(\nu)$ и выразить в конечном виде $i_1(\nu)$ через $i_0(\nu)$ для произвольных ν. Так, например, исключая из (3.2) и (3.3) i_{n+1} и полагая n =1, приходим к рекуррентному соотношению (2.11) для функции Q_μ, если же $n > 1$, то полученное равенство ввиду (3.4) опять превращается в трехчленную рекуррентную формулу.

В случае $\nu = 0$, n =1, из (3.5) получаем

$$i_2(-1,a) + i_0(1,a) = 0, \tag{3.6}$$

что является очевидным следствием равенства $J_{-1}(z) = -J_1(z)$.

4. Интегралы $i_2(\nu,a)$ и $i_3(\nu,a)$

Согласно формуле (3.2) (n =1)

$$i_2(\nu) = -i_0(\nu) + 2(\nu+1)\,(i_0(\nu) - i_0(\nu+1)) - 2(\nu+1)\,ai_1(\nu). \tag{4.1}$$

Для целых и полуцелых значений ν этот интеграл выражается в конечном виде.

Учитывая (2.6), найдем в случае целых $\nu = \ell \geq 0$

$$i_2(\ell) = -(\ell+1)a + \frac{\ell+1}{\pi}a^2 Q_{-1/2}(q) + \frac{2\ell+1}{\pi} Q_{\ell-1/2}(q)$$

$$-\frac{2\ell+2}{\pi}Q_{\ell+1/2}+\frac{2\ell+2}{\pi}a^2\sum_{k=1}^{\ell}Q_{k-1/2}(q), \tag{4.2}$$

где $\Sigma = 0$, когда $\ell = 0$. Исключенный условием $\ell \geq 0$, интеграл $i_2\,(-1, a)$ дается формулой (3.6).

Для полуцелых значений индекса $\nu = \ell - 1/2$ формула (4.1) приводится к виду

$$i_2(\ell-1/2, a) = -a\,\frac{2\ell+1}{\pi}\,\mathrm{arc\,ctg}\,\frac{a}{2}+\frac{2\ell}{\pi}\,Q_{\ell-1}(q)$$

$$-\frac{2\ell+1}{\pi}Q_\ell+\frac{2\ell+1}{\pi}a^2\sum_{k=1}^{\ell}Q_{k-1}(q), \tag{4.3}$$

причём в случае $\ell = 0$

$$i_2\,(-1/2, a) = -\frac{1}{\pi}\left(a\ \mathrm{arc\,ctg}\,\frac{a}{2}-2\right)-\frac{1}{\pi}\,Q_0(q). \tag{4.4}$$

Интеграл $i_3\,(\nu)$ получается на основании (2.2) и повторного применения соотношения (3.4):

$$i_3(\nu) = (\nu+2)\,a\,[(2\nu+3)\,i_0(\nu+1)-(2\nu+1)\,i_0(\nu)]$$

$$+[2(\nu+1)(\nu+2)\,a^2-1]\,i_1(\nu). \tag{4.5}$$

Результат, справедливый для $\nu > -1/2$. В случае $\nu = -1/2$

$$i_3\,(-1/2, a) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{3}{2}a^2-1\right)\mathrm{arc\,ctg}\,\frac{a}{2}+\frac{3a}{\pi}\left(Q_0(q)-1\right). \tag{4.6}$$

Отметим еще, что интеграл

$$\frac{d^2 i_2(\nu, a)}{da^2} \equiv \int_0^\infty e^{-az}\,J_\nu(z)\,J_{\nu+2}(z)\,z^2\,dz$$

выражается в конечном виде для любых ν. Умножая (2.8) на z, а затем возводя в квадрат и совершая преобразование, мы получим

$$2\,\frac{d^2 i_2(\nu-1,a)}{da^2} = 4\nu^2\; i_0(\nu) - \frac{d^2[\,i_0(\nu-1,a)+i_0(\nu+1,a)\,]}{da^2} \tag{4.7}$$

при условии, что $\nu > \frac{1}{2}$.

5. Тождества для Q_μ

Ряд тождеств между функциями $Q_\mu\,(q)$ возникает как следствие некоторых тождеств, связывающих функции Бесселя. В пункте 3 было уже упомянуто о тождестве (2.11). Укажем здесь другие.

Формула

$$\frac{dQ_{\mu+1}(q)}{dq} - \frac{dQ_{\mu-1}(q)}{dq} = (2\mu+1)\;Q_\mu\,(q) \tag{5.1}$$

является образом Лапласа формулы $(\,\mu = \nu - \frac{1}{2},\;\; q = 1 + a^2/2\,)$

$$(J_{\nu-1}(z))^2 z - (J_{\nu+1}(z))^2 z = 4\nu\; J_\nu(z)\,J'_\nu(z)\,, \tag{5.2}$$

полученной очевидным образом из (2.1) и (2.8). По-видимому, это самый простой способ получения (5.1).

Известная формула

$$(2\mu+1)\;q\,Q_\mu\,(q) = (\,\mu+1)\,Q_{\mu+1}(q) + \mu\;Q_{\mu-1}(q) \tag{5.3}$$

имеет своим оригиналом соотношение $(\,\mu = \nu + \frac{1}{2}\,)$

$$2(\nu+1)\;(J^2_{\nu+1}(z))'' = (2\nu+1)\;J^2_\nu(z) - 4(\nu+1)\;J^2_{\nu+1}(z) + (2\nu+3)\,J^2_{\nu+2}(z). \tag{5.4}$$

Ряд других тождеств возникает при сравнении результатов, вычисленных разными путями. Так, например, полагая, в (2.3) $\nu = -\frac{1}{2}$ и приравнивая к (1.4), запишем следующее разложение:

$$\operatorname{arc\,ctg}\frac{a}{2} = a\sum_{k=0}^{\infty} Q_k\,(q)\,. \tag{5.5}$$

Для $\nu = 0$ путем сравнения (2.3) и (2.6) получаем

$$I = \frac{a}{\pi} Q_{-1/2}(q) + \frac{2a}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} Q_{k-1/2}(q) . \tag{5.6}$$

Более сложные тождества между функциями Q_ν возникают при сравнении $I_2(\nu, a)$, вычисленных, например, исходя из (3.2) и (3.4).

Литература

1. Z. Koba. Acta Phys.Polonica, 20, 1961.
2. Г.Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, т. I , ИЛ, М , 1949.
3. Г. Бейтмен, А. Эрдейи. Таблицы интегральных преобразований, т.1, стр. 146, "Наука", 1966.

Рукопись поступила в издательский отдел
31 декабря 1971 года.