СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 6174

И.М.Матора

О РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

1971

P2 - 6174

И.М.Матора

О РЕЛЯТИВИСТСКОЙ ЗАДАЧЕ ДВУХ ТЕЛ В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Введение

Известная интересная попытка Брейта [1] получить уравнение для двух релятивистских взаимодействующих электронов, подобное уравнению Дирака для одного электрона, была основана на приближенном учёте запаздывания, включающем в классическом гамильтониане члены до $\frac{v^2}{c^2}$. Полученное им уравнение в случае рассмотрения состояний с почти нерелятивистскими энергиями электронов (например, в легких атомах) позволило впервые объяснить тонкую структуру их уровней. Приближенный учёт запаздывания был эквивалентен приближенному квантовоэлектродинамическому подходу к проблеме. Последний подход впоследствии получил существенно большее развитие, но хотя в принципе с его помощью точное уравнение для релятивистской квантово-механической задачи двух тел построено (уравнение Бете-Солпитера), в большинстве случаев оно разрешимо лишь приближенно и с большими трудностями.

В данной работе дается новое уравнение типа Дирака для стационарных состояний двух релятивистских взаимодействующих заряженных фермионов, построенное аналогично тому, как это делал Брейт [1], с тем, однако, отличием, что в нем запаздывание учитывается через 4-потенциалы Льенара-Вихерта. В последних в качестве операторов скорости частиц всюду взяты операторы Дирака $c\bar{\alpha}$.

Уравнение

Постулируем релятивистское уравнение для стационарных состояний системы двух частиц, массы покоя которых m и M, заряды $-e$ и $+e$ $(e>0)$, спины $\hbar/2$ и координаты в системе центра масс $\bar{r}_1$ и $\bar{r}_2$, в виде:

$$(E - H_1 - H_2)\,\Psi = 0, \qquad (1)$$

где E – полная энергия системы,

$$H_1 = -e\phi_1 + \beta_1 mc^2 + \bar{a}_1(c\bar{p}_1 + e\bar{A}_1), \qquad \bar{p}_1 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \bar{r}_1}, \qquad (2)$$

$$H_2 = e\phi_2 + \beta_2 Mc^2 + \bar{a}_2(c\bar{p}_2 - e\bar{A}_2), \qquad \bar{p}_2 = -i\hbar\frac{\partial}{\partial \bar{r}_2},$$

$$2\phi_1 = \frac{e}{r_{12} - (\bar{r}_{21}\cdot\bar{a}_2)} \equiv \frac{e}{R_1}; \qquad (3)$$

$$2\phi_2 = \frac{-e}{r_{12} - (\bar{r}_{12}\cdot\bar{a}_1)} \equiv -\frac{e}{R_2};$$

$$\bar{A}_1 = \frac{e\bar{a}_2}{2R_1}; \qquad (4)$$

$$\bar{A}_2 = -\frac{e\bar{a}_1}{2R_2};$$

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} \end{pmatrix} \qquad (5)$$

а дираковы матрицы $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ имеют тождественный вид для обеих частиц, но их действие на волновую функцию Ψ определяется (см./1/) так:

$$(a_1 a_2 \Psi)_{mn} = \sum_{kl} (a_1)_{mk} (a_2)_{nl} \psi_{kl} ; \tag{6}$$

что соответствует изменению спина и энергии 1-й частицы вдоль столбцов матрицы волновой функции $\| \psi_{mn} \|$ и изменению этих признаков вдоль строк для 2-й частицы. Действие матрицы β_2 и единичной матрицы I_2 на Ψ также должно соответствовать действию $\bar{a}_2$. Легко видеть при этом, что $I_2 \Psi = I_1 \Psi = \Psi$, тогда как $\beta_2 \Psi =$ транспонированной $\beta_1 \Psi$.

4-потенциал ϕ_i, $\bar{A}_i$ $(i = 1,2)$, который обусловливает движение i -той частицы, есть потенциал двигающейся со скоростью $c\bar{a}_k$ другой частицы $(k \neq i)$, находящейся на "расстоянии" R_i от точки $\bar{r}_i$.

Учитывая перечисленные замечания, путем элементарных преобразований можно получить выражения матриц $\frac{1}{R_1}$ и $\frac{1}{R_2}$.

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{1}{R_1} &= \frac{1}{\rho_1^2 - r_2^2} \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 & z_2 & x_2 - iy_2 \\ 0 & \rho_1 & x_2 + iy_2 & -z_2 \\ z_2 & x_2 - iy_2 & \rho_1 & 0 \\ x_2 + iy_2 & -z_2 & 0 & \rho_1 \end{pmatrix}; \\ \frac{1}{R_2} &= \frac{1}{\rho_2^2 - r_1^2} \begin{pmatrix} \rho_2 & 0 & z_1 & x_1 - iy_1 \\ 0 & \rho_2 & x_1 + iy_1 & -z_1 \\ z_1 & x_1 - iy_1 & \rho_2 & 0 \\ x_1 + iy_1 & -z_1 & 0 & \rho_2 \end{pmatrix}; \end{aligned} \right. \tag{7}$$

$\rho_i = r_{ki} + x_i + y_i + z_i$, $(i = 1,2;\ k \neq i)$; $r_i^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$.

Подстановка в (1) выражений (2), (3), (4) дает

$$\{E + \frac{e^2}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)(1 - \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2) - (m\beta_1 + M\beta_2)c^2 - (\bar{\alpha}_1 \bar{p}_1 + \bar{\alpha}_2 \bar{p}_2)c\}\Psi = 0. \quad (8)$$

Легко проверить, что как и в случае уравнения Брейта, из (8) следует

$$\frac{d\bar{r}_k}{dt} = \frac{i}{\hbar}[E, \bar{r}_k] = -c\bar{\alpha}_k; \quad (9)$$

$$\frac{d\bar{p}_k}{dt} = \frac{i}{\hbar}[E, \bar{p}_k] = \hat{\bar{F}}_k \quad (10)$$

($\hat{\bar{F}}_k$ – сила Лоренца).

Пользуясь матрицами Дирака

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \beta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix};$$

определением (6) и расписывая (8) в явной матричной форме, получаем следующие 16 уравнений для ψ_{mn} .

$$(E - mc^2 - Mc^2)\psi_{11} + \frac{e^2}{2(\rho_1^2 - r_2^2)}\{\rho_1(\psi_{11} - \psi_{33}) + z_2(\psi_{31} - \psi_{13}) +$$

$$+ (x_2 - iy_2)(\psi_{41} + \psi_{23} - 2\psi_{14})\} + \frac{e^2}{2(\rho_2^2 - r_1^2)}\{\rho_2(\psi_{11} - \psi_{33}) + z_1(\psi_{13} - \psi_{31}) +$$

$$+ (x_1 - iy_1)(\psi_{14} + \psi_{32} - 2\psi_{41})\} - c[(p_{x_1} - ip_{y_1})\psi_{41} + p_{z_1}\psi_{31} + (p_{x_2} - ip_{y_2})\psi_{14} + p_{z_2}\psi_{13}] = 0;$$

$$(E - mc^2 - Mc^2)\psi_{12} + \frac{e^2}{2(\rho_1^2 - r_2^2)}\{\rho_1(\psi_{12} + \psi_{34} - 2\psi_{43}) + z_2(\psi_{32} + \psi_{14} - 2\psi_{23}) +$$

$$+ (x_2 - iy_2)(\psi_{42} - \psi_{24})\} + \frac{e^2}{2(\rho_2^2 - r_1^2)}\{\rho_2(\psi_{12} + \psi_{34} - 2\psi_{43}) - z_1(\psi_{14} + \psi_{32} - 2\psi_{41}) +$$

$$+ (x_1 + iy_2)(\psi_{13} - \psi_{31})\} - c[p_{x_1} - ip_{y_1})\psi_{42} + p_{z_1}\psi_{32} + (p_{x_2} + ip_{y_2})\psi_{13} - p_{z_2}\psi_{14}] = 0;$$

$$(E - mc^2 - Mc^2)\psi_{22} + \frac{e^2}{2(\rho_1^2 - r_2^2)}\{\rho_1(\psi_{22} - \psi_{44}) + (x_2 + iy_2)(\psi_{32} + \psi_{14} - 2\psi_{23}) -$$

$$- z_2(\psi_{42} - \psi_{24})\} + \frac{e^2}{2(\rho_2^2 - r_1^2)}\{\rho_2(\psi_{22} - \psi_{44}) + (x_1 + iy_1)(\psi_{23} + \psi_{41} - 2\psi_{32}) -$$

$$- z_1(\psi_{24} - \psi_{42})\} - c[(p_{x_1} + ip_{y_1})\psi_{32} - p_{z_1}\psi_{42} + (p_{x_2} + ip_{y_2})\psi_{23} - p_{z_2}\psi_{24}] = 0;$$

$$(E - mc^2 - Mc^2)\psi_{21} + \frac{e^2}{2(\rho_1^2 - r_2^2)}\{\rho_1(\psi_{21} + \psi_{43} - 2\psi_{34}) + (x_2 + iy_2)(\psi_{31} - \psi_{13}) -$$

$$- z_2(\psi_{41} + \psi_{23} - 2\psi_{14})\} + \frac{e^2}{2(\rho_2^2 - r_1^2)}\{\rho_2(\psi_{21} + \psi_{43} - 2\psi_{34}) + (x_1 - iy_1)(\psi_{24} - \psi_{42}) +$$

$$+ z_1(\psi_{23} + \psi_{41} - 2\psi_{32})\} - c[(p_{x_1} + ip_{y_1})\psi_{31} - p_{z_1}\psi_{41} + (p_{x_2} - ip_{y_2})\psi_{24} + p_{z_2}\psi_{23}] = 0;$$

$$(E - mc^2 + Mc^2)\psi_{13} + \frac{e^2}{2(\rho_1^2 - r_2^2)}\{\rho_1(\psi_{13} - \psi_{31}) + z_2(\psi_{33} - \psi_{11}) +$$

$$+ (x_2 - iy_2)(\psi_{43} + \psi_{21} - 2\psi_{12})\} + \frac{e^2}{2(\rho_2^2 - r_1^2)}\{\rho_2(\psi_{13} - \psi_{31}) + z_1(\psi_{11} - \psi_{33}) +$$

$$+ (x_1 - iy_1)(\psi_{12} + \psi_{34} - 2\psi_{43})\} - c[(p_{x_1} - ip_{y_1})\psi_{43} + p_{z_1}\psi_{33} + (p_{x_2} - ip_{y_2})\psi_{12} +$$

$$+ p_{z_2}\psi_{11}] = 0;$$

$$(E - mc^2 + Mc^2)\psi_{14} + \frac{e^2}{2(\rho_1^2 - r_2^2)}\{\rho_1(\psi_{14} + \psi_{32} - 2\psi_{41}) + z_2(\psi_{34} + \psi_{12} - 2\psi_{21}) +$$

$$+ (x_2 - iy_2)(\psi_{44} - \psi_{22})\} + \frac{e^2}{2(\rho_2^2 - r_1^2)}\{\rho_2(\psi_{14} + \psi_{32} - 2\psi_{41}) - z_1(\psi_{12} + \psi_{34} - 2\psi_{43}) +$$

$$+ (x_1 + iy_1)(\psi_{11} - \psi_{33})\} - c[(p_{x_1} - ip_{y_1})\psi_{44} + p_{z_1}\psi_{34} + (p_{x_2} + ip_{y_2})\psi_{11} - p_{z_2}\psi_{12}] = 0;$$

$$(E - mc^2 + Mc^2)\psi_{23} + \frac{e^2}{2(\rho_1^2 - r_2^2)}\{\rho_1(\psi_{23} + \psi_{41} - 2\psi_{32}) + (x_2 + iy_2)(\psi_{33} - \psi_{11}) -$$

$$- z_2(\psi_{43} + \psi_{21} - 2\psi_{12})\} + \frac{e^2}{2(\rho_2^2 - r_1^2)}\{\rho_2(\psi_{23} + \psi_{41} - 2\psi_{32}) + (x_1 - iy_1)(\psi_{22} - \psi_{44}) +$$

$$+ z_1(\psi_{21} + \psi_{43} - 2\psi_{34})\} - c[(p_{x_1} + ip_{y_1})\psi_{33} - p_{z_1}\psi_{43} + (p_{x_2} - ip_{y_2})\psi_{22} + p_{z_2}\psi_{21}] = 0;$$

$$(E - mc^2 + Mc^2)\psi_{24} + \frac{e^2}{2(\rho_1^2 - r_2^2)}\{\rho_1(\psi_{24} - \psi_{42}) + (x_2 + iy_2)(\psi_{34} + \psi_{12} - 2\psi_{21}) -$$

$$- z_2(\psi_{44} - \psi_{22})\} + \frac{e^2}{2(\rho_2^2 - r_1^2)}\{\rho_2(\psi_{24} - \psi_{42}) + (x_1 + iy_1)(\psi_{21} + \psi_{43} - 2\psi_{34}) - z_1(\psi_{22} - \psi_{44})\} -$$

$$- c[(p_{x_1} + ip_{y_1})\psi_{34} - p_{z_1}\psi_{44} + (p_{x_2} + ip_{y_2})\psi_{21} - p_{z_2}\psi_{22}] = 0;$$

$$(E + mc^2 - Mc^2)\psi_{31} + \frac{e^2}{2(\rho_1^2 - r_2^2)}\{\rho_1(\psi_{31} - \psi_{13}) + (x_2 - iy_2)(\psi_{21} + \psi_{43} - 2\psi_{34}) +$$

$$+ z_2(\psi_{11} - \psi_{33})\} + \frac{e^2}{2(\rho_2^2 - r_1^2)}\{\rho_2(\psi_{31} - \psi_{13}) + (x_1 - iy_1)(\psi_{34} + \psi_{12} - 2\psi_{21}) +$$

$$+ z_1(\psi_{33} - \psi_{11})\} - c[(p_{x_1} - ip_{y_1})\psi_{21} + p_{z_1}\psi_{11} + (p_{x_2} - ip_{y_2})\psi_{34} + p_{z_2}\psi_{33}] = 0;$$

$$(E + mc^2 - Mc^2)\psi_{32} + \frac{e^2}{2(\rho_1^2 - r_2^2)}\{\rho_1(\psi_{32} + \psi_{14} - 2\psi_{23}) + (x_2 - iy_2)(\psi_{22} - \psi_{44}) +$$

$$+ z_2(\psi_{12} + \psi_{34} - 2\psi_{43})\} + \frac{e^2}{2(\rho_2^2 - r_1^2)}\{\rho_2(\psi_{32} + \psi_{14} - 2\psi_{23}) + (x_1 + iy_1)(\psi_{33} - \psi_{11}) -$$

$$- z_1(\psi_{34} + \psi_{12} - 2\psi_{21})\} - c[(p_{x_1} - ip_{y_1})\psi_{22} + p_{z_1}\psi_{12} + (p_{x_2} + ip_{y_2})\psi_{33} - p_{z_2}\psi_{34}] = 0;$$

$$(E + mc^2 + Mc^2)\psi_{33} + \frac{e^2}{2(\rho_1^2 - r_2^2)}\{\rho_1(\psi_{33} - \psi_{11}) + (x_2 - iy_2)(\psi_{23} + \psi_{41} - 2\psi_{32}) +$$

$$+ z_2(\psi_{13} - \psi_{31})\} + \frac{e^2}{2(\rho_2^2 - r_1^2)}\{\rho_2(\psi_{33} - \psi_{11}) + (x_1 - iy_1)(\psi_{32} + \psi_{14} - 2\psi_{23})\} +$$

$$+ z_1(\psi_{31} - \psi_{13})\} - c[(p_{x_1} - ip_{y_1})\psi_{23} + p_{z_1}\psi_{13} + (p_{x_2} - ip_{y_2})\psi_{32} + p_{z_2}\psi_{31}] = 0;$$

$$
\begin{aligned}
&(E + mc^2 + Mc^2)\psi_{34} + \frac{e^2}{2(\rho_1^2 - r_2^2)}\{\rho_1(\psi_{34} + \psi_{12} - 2\psi_{21}) + (x_2 - iy_2)(\psi_{24} - \psi_{42}) + \\
&+ z_2(\psi_{14} + \psi_{32} - 2\psi_{41})\} + \frac{e^2}{2(\rho_2^2 - r_1^2)}\{\rho_2(\psi_{34} + \psi_{12} - 2\psi_{21}) + (x_1 + iy_1)(\psi_{31} - \psi_{13}) - \\
&- z_1(\psi_{32} + \psi_{14} - 2\psi_{23})\} - c[(p_{x_1} - ip_{y_1})\psi_{24} + p_{z_1}\psi_{14} + (p_{x_2} + ip_{y_2})\psi_{31} - p_{z_2}\psi_{32}] = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(E + mc^2 - Mc^2)\psi_{41} + \frac{e^2}{2(\rho_1^2 - r_2^2)}\{\rho_1(\psi_{41} + \psi_{23} - 2\psi_{14}) + (x_2 + iy_2)(\psi_{11} - \psi_{33}) - \\
&- z_2(\psi_{21} + \psi_{43} - 2\psi_{34})\} + \frac{e^2}{2(\rho_2^2 - r_1^2)}\{\rho_2(\psi_{41} + \psi_{23} - 2\psi_{14}) + (x_1 - iy_1)(\psi_{44} - \psi_{22}) + \\
&+ z_1(\psi_{43} + \psi_{21} - 2\psi_{12})\} - c[(p_{x_1} + ip_{y_1})\psi_{11} - p_{z_1}\psi_{21} + (p_{x_2} - ip_{y_2})\psi_{44} + p_{z_2}\psi_{43}] = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(E + mc^2 - Mc^2)\psi_{42} + \frac{e^2}{2(\rho_1^2 - r_2^2)}\{\rho_1(\psi_{42} - \psi_{24}) + (x_2 + iy_2)(\psi_{12} + \psi_{34} - 2\psi_{43}) - \\
&- z_2(\psi_{22} - \psi_{44})\} + \frac{e^2}{2(\rho_2^2 - r_1^2)}\{\rho_2(\psi_{42} - \psi_{24}) + (x_1 + iy_1)(\psi_{13} + \psi_{21} - 2\psi_{12}) - \\
&- z_1(\psi_{44} - \psi_{22})\} - c[(p_{x_1} + ip_{y_1})\psi_{12} + p_{z_1}\psi_{22} + (p_{x_2} + ip_{y_2})\psi_{43} - p_{z_2}\psi_{44}] = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(E + mc^2 + Mc^2)\psi_{43} + \frac{e^2}{2(\rho_1^2 - r_2^2)}\{\rho_1(\psi_{43} + \psi_{21} - 2\psi_{12}) + (x_2 + iy_2)(\psi_{13} - \psi_{31}) - \\
&- z_2(\psi_{23} + \psi_{41} - 2\psi_{32})\} + \frac{e^2}{2(\rho_2^2 - r_1^2)}\{\rho_2(\psi_{43} + \psi_{21} - 2\psi_{12}) + (x_1 - iy_1)(\psi_{42} - \psi_{24}) + \\
&+ z_1(\psi_{41} + \psi_{23} - 2\psi_{14})\} - c[(p_{x_1} + ip_{y_1})\psi_{13} + p_{z_1}\psi_{23} + (p_{x_2} - ip_{y_2})\psi_{42} + p_{z_2}\psi_{41}] = 0;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(E + mc^2 + Mc^2)\psi_{44} + \frac{e^2}{2(\rho_1^2 - r_2^2)}\{\rho_1(\psi_{44} - \psi_{22}) + (x_2 + iy_2)(\psi_{14} + \psi_{32} - 2\psi_{41}) - \\
&- z_2(\psi_{24} - \psi_{42})\} + \frac{e^2}{2(\rho_1^2 - r_2^2)}\{\rho_2(\psi_{44} - \psi_{22}) + (x_1 + iy_1)(\psi_{41} + \psi_{23} - 2\psi_{14}) - \\
&- z_1(\psi_{42} - \psi_{24})\} - c[(p_{x_1} + ip_{y_1})\psi_{14} + p_{z_1}\psi_{24} + (p_{x_2} + ip_{y_2})\psi_{41} - p_{z_2}\psi_{42}] = 0 .
\end{aligned}
$$

Качество квантовомеханического описания стационарных состояний системы двух фермионов при помощи предлагаемого здесь приближенного уравнения (8) предполагается в дальнейшем проиллюстрировать при сравнении результатов численного расчёта уровней позитрония с экспериментом.

В заключение искренне благодарю за благожелательную критику и ценные советы В.Г. Кадышевского, В.А. Матвеева и Р.Н. Фаустова.

Литература

1. G. Breit. Phys. Rev., 34, No. 4, 553 (1929).

Рукопись поступила в издательский отдел
16 декабря 1971 года.