ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P2 - 6173

Н.А. Черников, Н.С. Шавохина

МЕТОД ИНВАРИАНТНОГО ЯЩИКА
В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СПИНОРНОГО ПОЛЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1971

P2 - 6173

Н.А. Черников, Н.С. Шавохина

МЕТОД ИНВАРИАНТНОГО ЯЩИКА В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ СПИНОРНОГО ПОЛЯ

Направлено в ТМФ

P2-6173

Черников Н.А., Шавохина Н.С.

Метод инвариантного ящика в квантовой теории
спинорного поля

На примере сферического мира де Ситтера реализуются общие принципы квантовой теории спинорного поля, что приводит к методу инвариантного ящика.

Препринт Объединенного института ядерных исследований.
Дубна, 1971

P2-6173

Chernikov N.A., Shavokhina N.S.

Invariant Box Method in Quantum Theory of
Spinor Field

By the example of the de'Sitter spherical space-time the general principles of quantum theory of the spinor field are realized which leads to the invariant box method.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research.
Dubna, 1971

В работе [I] сформулированы принципы квантовой теории спинорного поля в римановых мирах. Особого внимания несомненно заслуживает сферический мир де Ситтера. Будучи пространством постоянной кривизны, он допускает десятипараметрическую группу изометрий. В пределе бесконечно большого радиуса эта группа переходит в группу Пуанкаре, сам же мир де Ситтера переходит в мир Пуанкаре-Минковского. Вместо интегралов Фурье, с которыми приходится иметь дело в последнем, привычном случае, в мире де Ситтера выступают ряды, поскольку его пространственная часть, являясь трехмерной сферой, компактна. В пределе эти ряды переходят в интегралы Фурье. Таким образом, изучение квантовой теории поля в сферическом мире де Ситтера оправдывается уже тем, что само собой приводит к методу инвариантного ящика для плоского пространства-времени[x)]. Немаловажное значение имеет, конечно, и тот физический смысл, который придаётся римановым мирам и в том числе миру де Ситтера в общей теории относительности. В данной работе общие положения квантовой теории спинорного поля реализуются на примере сферического мира де Ситтера, что и приводит к методу инвариантного ящика.

§ I. Общие положения

0. Латинские индексы принимают значения 0,I,2,3,4. Греческие индексы принимают значения 0,I,2,3. $\eta_{ab} f^a f^b = (f^1)^2 + (f^2)^2 + (f^3)^2 + (f^4)^2 - (f^0)^2$. $\eta^{ab} = \eta_{ab}$. С помощью η_{ab} и η^{ab}

---

x) На это обстоятельство указывалось в работе [2] опускаются и поднимаются индексы. ξ^α – пространственно-временные координаты. $f^\alpha = f^\alpha_\beta d\xi^\beta$ – базисные линейные формы, через которые метрика мира выражается в виде $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} f^\alpha f^\beta$. Дуальный к f^α базис состоит из векторных полей $e_\alpha = \tilde{f}^\beta_\alpha \frac{\partial}{\partial \xi^\beta}$. $\omega_{\alpha\beta\nu}$ – коэффициенты связности. ψ – спинор, $\bar{\psi} = \psi^* H_0$ –сопряженный спинор. $\psi_\nu = \mathcal{D}_\nu \psi = e_\nu \psi + \frac{1}{4} \omega_{\alpha\beta\nu} H^\alpha H^\beta \psi$,

$$\bar{\psi}_\nu = \mathcal{D}_\nu \bar{\psi} = e_\nu \bar{\psi} - \frac{1}{4} \omega_{\alpha\beta\nu} \bar{\psi} H^\alpha H^\beta$$

– их ковариантные производные. H_α –матрицы

$$H_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$H_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

обладающие следующими свойствами:

$$H_a H_b + H_b H_a = 2\eta_{ab}, \tag{I}$$

$$H_0 H_1 H_2 H_3 H_4 = i \quad . \tag{2}$$

Как следствия отсюда получаем

$$\frac{1}{5!} \varepsilon^{abcpq} H_a H_b H_c H_p H_q = -i, \quad \frac{1}{4!} \varepsilon^{abcpq} H_b H_c H_p H_q = -i H^a,$$

$$\frac{1}{3!}\varepsilon^{abcpq}H_cH_pH_q = i[H^aH^b], \quad \frac{1}{2!}\varepsilon^{abcpq}H_pH_q = i[H^aH^bH^c],$$

$$\varepsilon^{abcpq}H_q = -i[H^aH^bH^cH^p], \quad \varepsilon^{abcpq} = -i[H^aH^bH^cH^pH^q], \tag{3}$$

ε^{abcpq} -полностью антисимметричный тензор, $\varepsilon^{01234}=-1$, квадратные скобки означают альтернированное произведение матриц;

$$< H_a, \frac{1}{2}[H_bH_c] > = \eta_{ab}H_c - \eta_{ac}H_b \;; \tag{4}$$

$$< \frac{1}{2}[H_aH_b], \frac{1}{2}[H_pH_q] > = \frac{1}{2}[H_aH_q]\eta_{bp} - \frac{1}{2}[H_bH_q]\eta_{ap} + \frac{1}{2}[H_pH_a]\eta_{bq} - \frac{1}{2}[H_pH_b]\eta_{aq}, \tag{5}$$

где скобки $<,>$ означают коммутатор

$$< P, Q > = PQ - QP. \tag{6}$$

I. Спинорное поле подчиняется уравнению Дирака, сформулированному для риманова мира В.А. Фоком/3/. Мы пользуемся этим уравнением в той форме, которую придал ему Э. Картан/4/, а именно:

$$H^\nu \psi_\nu = \frac{imc}{\hbar} H^4 \psi. \tag{7}$$

Сопряженное уравнение Дирака имеет вид:

$$\bar{\psi}_\nu H^\nu = -\frac{imc}{\hbar}\bar{\psi} H^4. \tag{8}$$

2. Рассматриваются только такие римановы миры, которые допускают пространственно-подобные гиперповерхности, разделяющие мир на две части. Одна из отделяющихся частей мира может служить образом прошедшего, другая - образом будущего, сама же разделяющая мир гиперповерхность - образом настоящего. Такая гиперповерхность называется полной и обозначается буквой Σ.

Предполагается, что решение уравнения Дирака во всем пространственно-временном мире M однозначно задается значениями спинорного поля на полной гиперповерхности Σ. На самой же гиперповерхности Σ спинорное поле может быть задано произвольно.

3. Если спинорное поле u удовлетворяет уравнению (7), а спинорное поле $\bar{v}$ – уравнению (8), то интеграл

$$(\bar{v}, u) = i\int_{\Sigma} \bar{v} H_4 [Q_1 Q_2 Q_3] u \tag{9}$$

не зависит от выбора полной гиперповерхности Σ. Квадратные скобки означают здесь альтернированное произведение матриц $Q_1 = q_1^{\alpha} H_{\alpha}$, $Q_2 = q_2^{\alpha} H_{\alpha}$, $Q_3 = q_3^{\alpha} H_{\alpha}$, где q_1^{α}, q_2^{α}, q_3^{α} – векторы элементарных смещений по гиперповерхности Σ. Если, например, гиперповерхность задана уравнениями $\xi^{\alpha} = T^{\alpha}(q^1, q^2, q^3)$, где q^1, q^2, q^3 – параметры на Σ, то $q_1^{\alpha} = f_{\mu}^{\alpha} \frac{\partial T^{\mu}}{\partial q^1} dq^1, \ldots$

4. Спинорное поле квантуется согласно статистике Ферми. Иными словами, требуется, чтобы пара ψ, $\bar{\psi}$ порождала (бесконечно-мерную) алгебру Клиффорда. Генераторы алгебры ψ, $\bar{\psi}$ на полной гиперповерхности линейно независимы. Общий элемент линейной оболочки генераторов алгебры равен $U + V^*$, где

$$U = (\bar{\psi}, u), \quad V^* = (\bar{v}, \psi), \tag{10}$$

u, $\bar{v}$ –неквантованные спинорные поля. Полагая

$$(U + V^*)^2 = (\bar{v}, u), \tag{11}$$

мы вводим скалярное произведение в оболочке генераторов. Отсюда следует, что все компоненты спинорного поля ψ антикоммутируют друг с другом. Равным образом, антикоммутируют друг с другом и все компоненты спинорного поля $\bar{\psi}$. Из (11) следует также, что антикоммутатор $\{U,V^*\}$ равен

$$\{U,V^*\} \equiv UV^* + V^*U = (\bar{v}, u) \tag{12}$$

и что антикоммутатор $\{\psi(x),\psi(y)\}$ даёт решение задачи Коши для уравнений (7) и (8). Именно, если спинорные поля u, $\bar{v}$ произвольно заданы на полной гиперповерхности Σ и удовлетворяют уравнениям (I) и (2), то во всем мире M

$$u(x) = i\int\limits_{\Sigma} \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} H_4[Q_1 Q_2 Q_3]\, u(y), \tag{13}$$

$$\bar{v}(x) = i\int\limits_{\Sigma} \bar{v}(y) H_4[Q_1 Q_2 Q_3]\{\psi(y), \bar{\psi}(x)\}. \tag{14}$$

Ввиду линейности уравнений (7) и (8) эти формулы не зависят от того, являются ли поля u, $\bar{v}$ классическими или квантованными полями, так что в формуле (I3) на место u можно ставить ψ, а в формуле (I4) на место $\bar{v}$ можно ставить $\bar{\psi}$.

5. Компоненты вектора тока J_μ и тензора энергии-импульса $T_{\mu\nu}$ в произвольном ортогональном репере имеют точно такой же вид, как и в плоском пространстве-времени в декартовых координатах:

$$J_\mu = e\,\bar{\psi} H_\mu \psi, \tag{15}$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{i\hbar}{4}\left(\bar{\psi} H_\mu \psi_\nu - \bar{\psi}_\nu H_\mu \psi + \bar{\psi} H_\nu \psi_\mu - \bar{\psi}_\mu H_\nu \psi\right). \tag{16}$$

Их дивергенции равняются нулю

$$\mathcal{D}^\mu J_\mu = 0, \qquad \mathcal{D}^\mu T_{\mu\nu} = 0. \tag{17}$$

6. Пусть оператор $\hat{K}$ обладает следующим свойством: если ψ

удовлетворяет уравнению (7), то и $\hat{K}\psi$ удовлетворяет уравнению (7). Любому такому оператору соответствует вторично квантованный оператор

$$\hat{\mathfrak{K}} = (\bar{\psi}, \hat{K}\psi). \tag{18}$$

В частности, таким вторично квантованным оператором является оператор заряда

$$\hat{e} = \int_{\Sigma} J_{\mu}\, d\sigma^{\mu} = -e(\bar{\psi}, \psi). \tag{19}$$

7. Если векторное поле K^{α} удовлетворяет уравнению Киллинга $\mathcal{D}_{\mu}K_{\nu} + \mathcal{D}_{\nu}K_{\mu} = 0$, то оператор

$$\hat{K} = -i\hbar\left[K^{\mu}\mathcal{D}_{\mu} + \frac{1}{4}(\mathcal{D}_{\alpha}K_{\beta})H^{\alpha}H^{\beta}\right] \tag{20}$$

коммутирует с оператором $H^{\nu}\mathcal{D}_{\nu} - \frac{imc}{\hbar}H^{4}$ и, следовательно, обладает свойством 6. Соответствующий вторично квантованный оператор равняется

$$\hat{\mathfrak{K}} = (\bar{\psi}, \hat{K}\psi) = \int_{\Sigma} T_{\mu\nu} K^{\nu} d\sigma^{\mu}. \tag{21}$$

Всё изложенное выше подробно объясняется в работе /1/, см. также /5/.

§ 2. Уравнение Дирака в сферическом мире

Сферический мир де Ситтера можно представить в виде однополостного гиперболоида $z^{2} \equiv \eta_{ab}x^{a}x^{b} = z_{0}^{2}$ в пятимерном мире Пуанкаре-Минковского. Если обозначить ξ^{0}, ξ^{1}, ξ^{2}, ξ^{3} координаты в мире де Ситтера, то гиперболоид можно задать системой уравнений $x^{a} = z_{0}N^{a}(\xi^{0},\xi^{1},\xi^{2},\xi^{3})$, где $\eta_{ab}N^{a}N^{b} = 1$. Добавив $f^{4} = dz$ к ортогональному базису f^{α} в мире де Ситтера, мы получим ор тогональный базис f^a в пятимерном мире, так что $\eta_{ab} dx^a dx^b = \eta_{ab} f^a f^b$. Дуальный базис состоит из векторных полей e_α, $e_4 = \frac{\partial}{\partial r}$. Переход от базиса f^a к базису dx^a достигается ортогональным преобразованием $dx^a = \tilde{L}^a_b f^b$, $f^a = L^a_b dx^b$. Соответственно, $\frac{\partial}{\partial x^a} = L^b_a e_b$, $e_a = \tilde{L}^b_a \frac{\partial}{\partial x^b}$. Условие ортогональности есть $\eta_{am} \tilde{L}^m_b = \eta_{bm} L^m_a$. Можно показать, что $\tilde{L}^\alpha_\beta = e_\beta x^\alpha$, $\tilde{L}^a_4 = \frac{x^a}{r}$, $L^4_a = \frac{x_a}{r}$, $L^\beta_a = \eta^{\beta\nu} e_\nu x_a$. Коэффициенты связности в пятимерном мире в базисе f^a равны $\omega_{abc} = \eta_{mn} \tilde{L}^m_a e_c \tilde{L}^n_b$, причем $\omega_{\alpha\beta\nu}$ являются коэффициентами связности в мире де Ситтера в базисе f^α. Существует матрица S такая, что

$$(-1)^p S^{-1} H^a S = \tilde{L}^a_b H^b, \qquad (-1)^p S H^a S^{-1} = L^a_b H^b,$$
$$(-1)^p S H_a S^{-1} = \tilde{L}^b_a H_b, \qquad (-1)^p S^{-1} H_a S = L^b_a H_b, \tag{22}$$

где $(-1)^p = \det(L^a_b)$. Согласно теореме, доказанной в /I/ фактически для пространства-времени любой размерности, имеем

$$\frac{1}{4}\omega_{abc} H^a H^b f^c = \frac{1}{4} S^{-1} H_a S\, d(S^{-1} H^a S) = S^{-1} dS. \tag{23}$$

Заметим, что $e_4 \tilde{L}^n_b = \frac{\partial}{\partial r} \tilde{L}^n_b = 0$ и, соответственно, $\omega_{ab4} = 0$, $\frac{\partial S}{\partial r} = 0$. Кроме того, $\omega_{\alpha 4 \nu} = \frac{1}{r} \eta_{\alpha\nu}$. Следовательно,

$$\frac{1}{4}\omega_{abc} H^a H^b f^c = \frac{1}{4}\omega_{\alpha\beta\nu} H^\alpha H^\beta f^\nu + \frac{1}{2r} H_\nu H^4 f^\nu = S^{-1} f^\nu e_\nu S.$$

Полагая $\psi' = S\psi$, отсюда находим

$$\psi_\nu = S^{-1} e_\nu \psi' - \frac{1}{2r} H_\nu H^4 S^{-1} \psi'. \tag{24}$$

Так как

$$S^{+}H_{o} = (-1)^{p} H_{o} S^{-1},$$

(25)

то $\overline{\psi}' = \psi'^{*} H_{o} = (-1)^{p} \overline{\psi} S^{-1}$. Подобно (24) находим

$$\overline{\psi}_{\nu} = (-1)^{p} \left[(e_{\nu} \overline{\psi}') S - \frac{1}{2z} \overline{\psi}' S H^{4} H_{\nu} \right]. \qquad (26)$$

Рассмотрим теперь, как преобразуются уравнения (7) и (8) при переходе к базису dx^{a}. Из (24) и (26) получаем

$$H^{\nu}\psi_{\nu} - \frac{imc}{\hbar} H^{4}\psi = H^{\nu} S^{-1} e_{\nu}\psi' - \left(\frac{2}{z} + \frac{imc}{\hbar}\right) H^{4} S^{-1}\psi',$$

$$\overline{\psi}_{\nu} H^{\nu} + \frac{imc}{\hbar} \overline{\psi} H^{4} = (-1)^{p} \left[(e_{\nu}\overline{\psi}') S H^{\nu} - \left(\frac{2}{z} - \frac{imc}{\hbar}\right) \overline{\psi}' S H^{4} \right].$$

Согласно (22) имеем

$$(-1)^{p} S H^{4} S^{-1} = L^{4}_{b} H^{b} = \frac{x_{b}}{z} H^{b} = \frac{1}{z} X \qquad (27)$$

и

$$(-1)^{p} S H^{\nu} S^{-1} e_{\nu} = L^{\nu}_{b} H^{b} e_{\nu} = L^{a}_{b} H^{b} e_{a} - L^{4}_{b} H^{b} e_{4} = H^{b} \frac{\partial}{\partial x^{b}} - X \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z}.$$

Иначе последнее равенство можно написать в виде

$$z (-1)^{p} S H^{\nu} S^{-1} e_{\nu} = H^{a} m_{a} , \qquad (28)$$

где

$$m_{a} = z \frac{\partial}{\partial x^{a}} - \frac{1}{z} x_{a} x^{b} \frac{\partial}{\partial x^{b}} \qquad (29)$$

– генераторы конформных преобразований гиперболоида $z = z_{o}$. С помощью формул (27) и (28) находим, что уравнение (7) преобразуется в уравнение

$$H^{a} \psi'_{a} = \left(\frac{2}{z} + \frac{imc}{\hbar}\right) X \psi' , \qquad (30)$$

а уравнение (8) - в уравнение

$$\bar{\psi}_a' H^a = \left(\frac{2}{r} - \frac{imc}{\hbar}\right)\bar{\psi}' X \quad , \tag{31}$$

где $\psi_a' = m_a \psi'$, $\bar{\psi}_a' = m_a \bar{\psi}'$.

Уравнения (30) и (31) указаны Дираком в работе/6/. Ему же принадлежит и другая форма этих уравнений, а именно:

$$\frac{1}{2} H^a H^b \psi_{ab}' = \left(2 + \frac{imcr}{\hbar}\right)\psi', \tag{32}$$

$$\frac{1}{2}\bar{\psi}_{ab}' H^a H^b = \left(2 - \frac{imcr}{\hbar}\right)\bar{\psi}', \tag{33}$$

где $\psi_{ab}' = m_{ab}\psi'$, $\bar{\psi}_{ab}' = m_{ab}\bar{\psi}'$,

$$m_{ab} = x_a \frac{\partial}{\partial x^b} - x_b \frac{\partial}{\partial x^a} \tag{34}$$

-векторные поля Киллинга на гиперболоиде $r = r_0$. Переход к этим уравнениям совершается с помощью тождества

$$\frac{1}{2} H^a H^b m_{ab} = \frac{1}{2}(X H^a - H^a X)\frac{\partial}{\partial x^a} = \frac{1}{r} X H^a m_a \, . \tag{35}$$

Преобразование $\psi' = S\psi$ сильно упрощает уравнение (7), так как каждая из четырех компонент спинора ψ' удовлетворяет одному и тому же уравнению второго порядка, а именно:

$$m^a m_a \psi' = \left(2 + \frac{imcr}{\hbar}\right)\left(1 - \frac{imcr}{\hbar}\right)\psi'. \tag{36}$$

Каждая из четырех компонент спинора $\bar{\psi}'$ удовлетворяет одному и тому же уравнению

$$m^a m_a \bar{\psi}' = \left(2 - \frac{imcr}{\hbar}\right)\left(1 + \frac{imcr}{\hbar}\right)\bar{\psi}'. \tag{37}$$

Эти уравнения также получены Дираком. Их вывод основывается на тождестве

$$(2+i\hat{M})(1-i\hat{M})=\frac{1}{2}\,m^{ab}m_{ab}=m^a m_a\,, \tag{38}$$

где

$$\hat{M}=-\frac{i}{2}\,H^a H^b m_{ab}+2i\,. \tag{39}$$

Заметим ещё, что уравнение (30) можно записать как безмассовое уравнение Дирака в пятимерном мире Пуанкаре-Минковского

$$H^a\,\frac{\partial}{\partial x^a}\,\Psi=0\,, \tag{40}$$

где

$$\Psi=\psi'\,\frac{r_0^2}{r^2}\,e^{-\frac{imc}{\hbar}r}\,. \tag{41}$$

§3. Скалярное произведение в пространстве решений

Рассмотрим теперь, как преобразуется скалярное произведение (9) при переходе к базису dx^a. Нетрудно подсчитать, что

$$\bar{v}\,H_4\,[Q_1\,Q_2\,Q_3]\,u=(-1)^p\,\bar{v}'\,\frac{X}{r}\,[d_1X\,d_2X\,d_3X]\,u'\,, \tag{42}$$

где $d_1X=\frac{\partial X}{\partial q^1}\,dq^1$,....Это позволяет преобразовать все формулы, которые выражаются через скалярное произведение (9). Например, если спинорное поле ψ' задано на полной гиперповерхности Σ и удовлетворяет уравнению (30), то во всем мире де Ситтера

$$\psi'(x)=i\int_\Sigma\{\psi'(x),\bar{\psi}'(y)\}\,\frac{X}{r}\,[d_1X\,d_2X\,d_3X]\,\psi'(y)\,, \tag{43}$$

$$\bar{\psi}'(x)=i\int_\Sigma\bar{\psi}'(y)\,\frac{X}{r}\,[d_1X\,d_2X\,d_3X]\,\{\psi'(y),\bar{\psi}'(x)\}\,.$$

Антикоммутатор спинорного поля, очевидно, преобразуется следующим образом:

$$\{\psi'(x), \bar{\psi}'(y)\} = (-1)^P S(x) \{\psi(x), \bar{\psi}(y)\} S^{-1}(y). \qquad (44)$$

Явное выражение для антикоммутатора (44) получено в работе /5/.

К числу полных относится гиперповерхность $z = z_0$, $x^0 = 0$. Для неё

$$i \bar{v}' \frac{X}{z} [d_1 X d_2 X d_3 X] u' = z_0^3 v'^* u' d\Omega, \qquad (45)$$

где $d\Omega$ - элемент объёма единичной трехмерной сферы.

§ 4. Вектор тока и тензор энергии-импульса

В базисе f^a компоненты J_μ вектора тока и $T_{\mu\nu}$ тензора энергии-импульса равняются (15) и (16), остальные компоненты J_4 и $T_{4a} = T_{a4}$ равняются нулю. Поэтому в базисе dx^a имеем $J'_\alpha = L^\mu_a J_\mu$, $T'_{\alpha\beta} = L^\mu_a L^\nu_b T_{\mu\nu}$. С помощью формул (22), (24) и (26) находим

$$J'_a = \frac{e}{z} \bar{\psi}' X_\alpha \psi', \qquad (46)$$

$$T'_{ab} = \frac{i\hbar}{4 z_0^2} \left(\bar{\psi}' X_a \psi'_b - \bar{\psi}'_b X_a \psi' + \bar{\psi}' X_b \psi'_a - \bar{\psi}'_a X_b \psi' \right),$$

где $X_a = m_\alpha X$. Так $x^\alpha m_\alpha = 0$, то $x^a J'_a = 0$, $x^a T'_{\alpha b} = 0$.

§ 5. Операторы в пространстве решений

Теперь мы перестанем обращаться к базису f и не будем больше писать штрих, означающий принадлежность той или иной величины к базису dx. Операторы, обладающие свойством 6, указанным в § I, действуют в пространстве решений уравнения Дирака. В случае де Ситтера имеется целая группа весьма интересных операторов такого рода. Уравнение Дирака (32) можно записать в виде $\hat{M}\psi = m\psi$, где $m = \frac{mcr_0}{\hbar}$ - безразмерный параметр, $\hat{M}$ -оператор, равный

$$\hat{M} = -\frac{i}{2}[H^p H^q] m_{pq} + 2i \quad . \tag{47}$$

По аналогии с $\hat{M}$ составим операторы

$$\begin{aligned} \hat{M}^a &= -\frac{i}{2}[H^a H^p H^q] m_{pq} + \frac{3i}{2} H^a, \\ \hat{M}^{ab} &= -\frac{i}{2}[H^a H^b H^p H^q] m_{pq} + i[H^a H^b], \\ \hat{M}^{abc} &= -\frac{i}{2}[H^a H^b H^c H^p H^q] m_{pq} + \frac{i}{2}[H^a H^b H^c] \end{aligned} \tag{48}$$

и докажем, что все они коммутируют с $\hat{M}$ и действуют, таким образом, в пространстве решений уравнения Дирака.

Прежде всего имеем

$$\begin{aligned} \hat{M}^{abc} &= \frac{i}{2\hbar} \varepsilon^{abcpq} \hat{K}_{pq} \quad , \\ \hat{M}^a &= \frac{1}{4\hbar^2} \varepsilon^{abcpq} \hat{K}_{bc} \hat{K}_{pq} \quad , \end{aligned} \tag{49}$$

где

$$\hat{K}_{pq} = -i\hbar \left(m_{pq} + \frac{1}{2}[H_p H_q] \right) \tag{50}$$

- операторы вида (20). Они соответствуют векторным полям m_{pq}. В силу (5) и таких же коммутационных соотношений для m_{ab} и m_{pq} без труда находим, что операторы $\hat{K}_{pq}$ коммутируют с $\hat{M}$. Следовательно, коммутируют с $\hat{M}$ и операторы (49).

Докажем теперь, что и операторы $\hat{M}^{ab}$ коммутируют с $\hat{M}$. Имеем

$$< \hat{M}, \hat{M}^{ab} > = < A_1 B_1 , A_2 B_2 > + < A_1 B_1 , i[H^a H^b] >, \tag{51}$$

где

$$A_1=-\frac{i}{2}[H^r H^s]\,,\quad A_2=-\frac{i}{2}[H^a H^b H^p H^q]\,,\quad B_1=m_{rs}\,,B_2=m_{pq}\,.$$

Поскольку операторы A_1 и A_2 коммутируют с операторами B_1 и B_2, то

$$<A_1B_1\,,A_2B_2>=<A_1,A_2>B_1B_2+A_2A_1<B_1,B_2>.$$

Воспользовавшись коммутационнными соотношениями для m_{rs} и m_{pq} и формулами (3), находим:

$$A_2A_1<B_1,B_2>=-i\,\varepsilon^{abpqc}H_c[H^sH_q]m_{ps}\,. \quad (52)$$

С помощью (3) и (4) находим

$$<A_1,A_2>=\frac{i}{2}\,(\varepsilon^{abpqr}H^s-\varepsilon^{abpqs}H^r)$$

и, далее,

$$<A_1,A_2>B_1B_2=i\,\varepsilon^{abpqr}H^s m_{rs}m_{pq}=-i\,\varepsilon^{abpqc}m_{cp}H_q\,. \quad (53)$$

Складывая (52) и (53), получаем первое слагаемое в (5I)

$$<A_1B_1,A_2B_2>=-i\,\varepsilon^{abpqc}H_cH^sH_q\,m_{ps}\,. \quad (54)$$

С помощью (5) и (3) получаем второе слагаемое в (5I)

$$<A_1B_1\,,i[H^aH^b]>=\frac{i}{3}(\eta^{bs}\varepsilon^{paclq}-\eta^{as}\varepsilon^{pbclq})H_cH_lH_q\,m_{ps}\,. \quad (55)$$

Заметим теперь, что комбинация

$$\eta^{bs}\varepsilon^{paclq}-\eta^{ps}\varepsilon^{baclq}-\eta^{as}\varepsilon^{pbclq}-$$
$$-\eta^{cs}\varepsilon^{pablq}-\eta^{ls}\varepsilon^{pacbq}-\eta^{qs}\varepsilon^{paclb}$$

антисимметрична по шести индексам b,p,a,c,l,q, принимающим только пять значений. Следовательно, она равняется нулю. Это позволяет преобразовать (55) к следующему виду:

$$<A_1B_1\,,i[H^aH^b]>=\frac{i}{3}(\eta^{cs}\varepsilon^{pablq}+\eta^{ls}\varepsilon^{pacbq}+\eta^{qs}\varepsilon^{paclb})H_cH_lH_q\,m_{ps},$$

откуда легко найти, что

$$< A_1 B_1 , i[H^a H^b] > = i\,\varepsilon^{abpqc} H_c H^s H_q m_{ps} . \tag{56}$$

Складывая (54) и (56), находим, что коммутатор (5I) равняется нулю.

В соответствии с § I п. 6 операторам (48) соответствуют вторично квантованные операторы

$$\hat{\mathfrak{M}}^a = (\bar\psi, \hat M^a \psi), \quad \hat{\mathfrak{M}}^{ab} = (\bar\psi, \hat M^{ab} \psi), \quad \hat{\mathfrak{M}}^{abc} = (\bar\psi, \hat M^{abc} \psi). \tag{57}$$

В заключение, наряду с (49), укажем ещё три зависимости между операторами (47), (48) и (50):

$$\hat M^{ab} \hat K_{ab} = 5 i \hbar \hat M, \tag{58}$$

$$-\frac{1}{2\hbar^2} \hat K^{ab} \hat K_{ab} = \hat M \hat M + \frac{3}{2}, \quad \frac{1}{3} \hat M^a \hat M_a = \hat M \hat M + \frac{1}{4}. \tag{59}$$

Заметим также, что тройка взаимно-коммутирующих операторов

$$\begin{aligned} \hat M^0 &= -i H^0 \Big(\frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{4} H^p H^q m_{pq} - \frac{3}{2} \Big), \\ \hat M^{04} &= -i H^0 H^4 \Big(\frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{3} H^p H^q m_{pq} - 1 \Big) = \\ &= H_1 m_{23} + H_2 m_{31} + H_3 m_{12} + H_1 H_2 H_3 , \\ \hat M^{034} &= -i H^0 H^3 H^4 \Big(\frac{1}{2} \sum_{p,q=1}^{2} H^p H^q m_{pq} - \frac{1}{2} \Big) = m_{21} + \frac{1}{2} H_2 H_1 \end{aligned} \tag{60}$$

позволяет решить уравнение Дирака методом разделения переменных в сферических координатах, а тройка взаимно-коммутирующих операторов $\hat M^0$, $\hat K_{12}$, $\hat K_{34}$ – таким же методом в бисферических координатах.

Литература:

1. Н.А. Черников, Н.С. Шавохина. Препринт ОИЯИ, Р2-6109, Дубна, 1971 г.
2. N.A.Chernikov, E.A.Tagirov. Ann.Inst.Henri Poincare, v.IX, N.2, Sect.A Paris, 1968.

   Препринт ОИЯИ, Р2-3777, Дубна, 1968.
3. А.П. Котельников, В.А. Фок. Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике, ГИТТЛ, М.-Л. 1950.
4. Э. Картан. Теория спиноров. ИЛ., М., 1947.
5. Н.С. Шавохина. ТМФ. том 10,3, 1972 г.
6. P.A.M.Dirac. Ann.Mathem. v. 36, N.3, 1935.

Рукопись поступила в издательский отдел
15 декабря 1971 года.