ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6137

В.М.Мальцев, Н.К.Душутин

МНОГОЧАСТИЧНЫЕ СОСТОЯНИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1971

P2 - 6137

В.М.Мальцев , Н.К.Душутин

МНОГОЧАСТИЧНЫЕ СОСТОЯНИЯ В РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СТАТИСТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

Направлено в ТМФ

Взаимодействие частиц в области высоких энергий в основном приводит к многочастичным состояниям. Часто представляют интерес распределения одной выделенной частицы по каким-либо физическим переменным (импульсу, углу и т.д.). В этом случае по всем остальным частицам выполняется интегрирование. Усреднение сглаживает детали динамического рассмотрения настолько, что весьма удобным становится статистическое описание.

Цель работы состоит в том, чтобы для многочастичной системы построить классическую релятивистскую статистику, т.е. вычислить для нее статистические функции, аналогичные потоку частиц, тензору энергии-импульса, давлению и т.д.

Такой подход предполагает, что вначале рассматриваемая многочастичная система изолирована, занимает в фазовом пространстве некоторый объем и принадлежит микроканоническому ансамблю. Однако микроканонический ансамбль оказывается неудобным для вычислений. Поэтому, выполняя преобразование Лапласа по суммарному 4-импульсу системы, мы вводим канонический ансамбль, вычисляем статистический интеграл и, следовательно, термодинамические функции.

Будем характеризовать n -частичное состояние фазовым интегралом

$$R_n(P) = \int \prod_{l=1}^{n} d^4 p_l \, \delta(p_l^2 - m_l^2)\, \delta^4\Big(P - \sum_{l=1}^{n} p_l\Big)\, \Theta(p_l), \tag{1}$$

где $P = (P_0, P_1, P_2, P_3)$ – суммарный 4-импульс состояния, $p_i = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ – 4-импульс i -той частицы, m_i – масса i -той частицы. Тогда 4-преобразование Лапласа по суммарному 4-импульсу состояния можно записать в виде

$$\Phi_n(a) = \int [\int e^{-aP} \delta^4 (P - \sum_{i=1}^{n} p_i) d^4 P] \prod_{i=1}^{n} d^4 p_i \, \delta(p_i^2 - m_i^2) \Theta(p_i) = \prod_{i=1}^{n} \phi_i(a), \quad (2)$$

где $a = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ – 4-вектор, а

$$\phi_i(a) = \int e^{-ap_i} \delta(p_i^2 - m_i^2) \Theta(p_i) d^4 p_i \,. \quad (3)$$

Для сходимости интеграла (2) необходимо потребовать, чтобы 4-вектор a был времениподобным, т.е. $a^2 = a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 > 0.$

Из экспериментальных данных следует, что поперечные импульсы вторичных частиц, образованных в высокоэнергетических взаимодействиях, ограничены. Это ограничение приводит к следующей форме для $\phi_i(a)$ – функции

$$\phi_i(a) = \int_{m_i}^{\infty} e^{-a_0 p_0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{a_1 p_1} \int_{-p'}^{p'} e^{a_2 p_2} \int_{-p''}^{p''} e^{a_3 p_3} \delta(p_0^2 - \sum_{\nu=1}^{3} p_\nu^2 - m_i^2) \prod_{\mu=0}^{3} dp_\mu \,, \quad (4)$$

где p' и p'' – предельные значения поперечных компонент импульса. Поскольку спектр продольной p_1 -компоненты импульса неограничен, интегрирование по ней дает

$$\phi_i(a) = \int_{m_i}^{\infty} e^{-a_0 p_0} \int_{-p'}^{p'} e^{a_2 p_2} \int_{-p''}^{p''} e^{a_3 p_3} e^{a_1 \sqrt{p_0^2 - p_2^2 - p_3^2 - m_i^2}} \frac{dp_0 \, dp_2 \, dp_3}{2\sqrt{p_0^2 - p_2^2 - p_3^2 - m_i^2}} \,. \quad (5)$$

В плоскости, перпендикулярной к p_1, введем двухкомпонентные векторы $\vec{a}_\perp = (a_2, a_3)$ и $\vec{p}_\perp = (p_2, p_3)$ и выразим их скалярное произведение через угол ψ между ними. Перейдем в интеграле (5) от интегрирования по компонентам p_2 и p_3 последовательно к интегрированию по абсолютной величине вектора $p_\perp$ и азимутальному углу, а затем к интегрированию по углу ψ. Полагая $p = \sqrt{p'^2 + p''^2}$ и производя замену $\cos\psi = x$, приходим к выражению

$$\phi_l(a) = \int_{m_l}^{\infty} e^{-a_0 p_0} \int_0^{p} \frac{e^{a_1\sqrt{p_0^2 - p_\perp^2 - m_l^2}}}{\sqrt{p_0^2 - p_\perp^2 - m_l^2}} \int_{-1}^{1} e^{a_\perp p_\perp x} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\, dp_0\, p_\perp\, dp_\perp , \qquad (6)$$

в котором последний интеграл выражается через модифицированную функцию Бесселя 1-го рода

$$\phi_l(a) = \int_{m_l}^{\infty} e^{-a_0 p_0} \int_0^{p} \frac{e^{a_1\sqrt{p_0^2 - p_\perp^2 - m_l^2}}}{\sqrt{p_0^2 - p_\perp^2 - m_l^2}} I_0(a_\perp p_\perp)\, dp_0\, p_\perp\, dp_\perp . \qquad (7)$$

Введем в комплексной плоскости (p_0 , p_1) векторы $\vec{a}_k = (a_0, a_1)$ и $\vec{p}_k = (p_0, \sqrt{p_0^2 - p_\perp^2 - m_l^2})$ и запишем их в полярных координатах $\vec{a}_k = (a_k \operatorname{ch}\kappa', a_k \operatorname{sh}\kappa')$ и $\vec{p}_k = (p_k \operatorname{ch}\kappa, p_k \operatorname{sh}\kappa)$, где $a_k = \sqrt{a_0^2 - a_1^2}$ и $p_k = \sqrt{p_\perp^2 + m_l^2}$, а $\kappa' = \operatorname{arc\,ch}\dfrac{a_0}{\sqrt{a_0^2 - a_1^2}}$ и $\kappa = \operatorname{arc\,ch}\dfrac{p_0}{\sqrt{p_\perp^2 + m_l^2}}$.

Тогда скалярное произведение их равно

$$\vec{a}_k \vec{p}_k = a_0 p_0 - a_1\sqrt{p_0^2 - p_\perp^2 - m_l^2} = a_k p_k \operatorname{ch}(\kappa - \kappa') . \qquad (8)$$

Переходя последовательно от интегрирования по компоненте p_0 к интегрированию по полярной координате κ, а затем по "углу" между p_k и a_k, область определения которого $(0, \infty)$, получаем

$$\phi_l(a) = 2\pi \int_0^p K_0\left(a_k\sqrt{p_\perp^2 + m_l^2}\right) I_0(a_\perp p_\perp)\, p_\perp\, dp_\perp\ , \tag{9}$$

где $K_0\left(a_k\sqrt{p_\perp^2 + m_l^2}\right)$ – модифицированная функция Бесселя 2-го рода.

Производные от логарифма статистического интеграла по компонентам 4-вектора a естественно связать с определенными термодинамическими функциями /1/. Легко видеть, что

$$N^\mu(a) = -\frac{1}{M}\frac{\partial \ln \Phi_n(a)}{\partial a^\mu} = -\frac{1}{M}\frac{\partial \ln \Phi_n(a)}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial a^\mu} \tag{11}$$

имеет физический смысл 4-вектора потока частиц, а величина

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}(a) = \frac{1}{M}\frac{\partial^2 \ln \Phi_n(a)}{\partial a^\mu\, \partial a^\nu} \tag{12}$$

эквивалентна тензору энергии – импульса релятивистского газа. В выражениях (11) – (12) введена нормирующая масса М. Соотношение

$$\frac{\partial a}{\partial a^\mu} = \frac{a^\mu}{a} = U^\mu\ , \tag{13}$$

где $a = \sqrt{a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}$, а U^μ – единичный вектор, формально позволяет записать выражения (11) и (12) в виде /2/

$$N^\mu(a) = \nu_0(a)\, U^\mu\ , \tag{14}$$

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = [\rho(a) + \pi(a)]\, U^\mu U^\nu - \pi(a)\, g^{\mu\nu}\ . \tag{15}$$

В этих соотношениях инвариантные функции $\nu_0(a)$, $\pi(a)$ и $\rho(a)$ следует рассматривать как нормированные выражения для собственной плотности частиц, давления и плотности энергии в системе, а $g^{\mu\nu}$ – метрический тензор.

До сих пор мы не придавали 4-вектору a какого-либо физического смысла. Однако, если сравнить записанные выше соотношения с аналогичными уравнениями классической нерелятивистской термодинамики, то легко установить соответствие между обратной температурой и 4-мерным обобщением ее - вектором a. Мы полагаем, что вследствие неэквивалентности энергетических характеристик, связанных с продольным и поперечным движением частиц в системе, можно отделить поперечные a_2 и a_3 компоненты обобщенной обратной температуры от продольной a_1 -компоненты. Далее предположим, что нулевая компонента связана с такими взаимодействиями частиц внутри системы, при которых происходит обмен резонанса с отрицательным квадратом массы /3/ (обмен тахионом), а абсолютная величина a -вектора пропорциональна обратной критической температуре Хагедорна /4/. В этом случае a -вектор полностью определен и представляет 4-мерное релятивистское обобщение понятия обратной температуры.

Отметим, что предшествующие определения 4-вектора температуры /5,6/ отличаются от приведенного выше другой интерпретацией физического смысла этого вектора. Мы их обсуждать не будем.

Уравнения (11) и (12) содержат неизвестную нормирующую массу, поэтому удобнее определить 4-вектор потока частиц и тензор энергии-импульса в виде

$$N^{\mu}(a) = \frac{1}{\Phi_n(a)} \int \prod_{i=1}^{n} e^{-ap_i} \frac{p_i^{\mu}}{m_i} \delta(p_i^2 - m_i^2)\, \Theta(p_i)\, d^4p_i \qquad (16)$$

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}(a) = \frac{1}{\Phi_n(a)} \int \prod_{i=1}^{n} e^{-ap_i} \frac{p_i^{\mu}\, p_i^{\nu}}{m_i} \delta(p_i^2 - m_i^2)\, \Theta(p_i)\, d^4p_i . \qquad (17)$$

Оба определения совпадают, когда нормировка равна массе частицы в однокомпонентной системе. В дальнейшем мы отдаем предпочтение уравнениям (16) и(17).

Рассмотрим возможные приближения в уравнении (9).

1. Допустим, что абсолютное значение поперечного импульса частицы не ограничено, т.е. $p \to \infty$. Тогда имеем

$$\lim_{p\to\infty} \phi_l(a) = \frac{2\pi\, m_l}{\sqrt{a_0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2}}\, K_1\left(m_l\sqrt{a_0^2-a_1^2-a_2^2-a_3^2}\,\right). \tag{18}$$

Аналогичный результат получен Сухоненом /7/, но в системе, где $a = (a_0, 0, 0, 0)$. В этом приближении вектор потока частиц и тензор энергии-импульса равны

$$N^{\mu}(a) = \sum_{l=1}^{n} \frac{K_2(m_l a)}{K_1(m_l a)}\, U^{\mu}, \tag{19}$$

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}(a) = \sum_{l=1}^{n} \left\{ m_l \left[\frac{K_3(m_l a)}{K_1(m_l a)} - \left(\frac{K_2(m_l a)}{K_1(m_l a)} \right)^2 \right] U^{\mu} U^{\nu} - \frac{1}{a}\, \frac{K_2(m_l a)}{K_1(m_l a)}\, g^{\mu\nu} \right\}, \tag{20}$$

где $a = \sqrt{a_0^2 - a_1^2 - a_2^2 - a_3^2}$, а $U^{\mu} = \dfrac{a^{\mu}}{a}$ – единичный 4-вектор.

Выражения для собственной плотности частиц

$$\nu_0(a) = \sum_{l=1}^{n} \frac{K_2(m_l a)}{K_1(m_l a)} \tag{21}$$

давления

$$\pi(a) = \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{a}\, \frac{K_2(m_l a)}{K_1(m_l a)} = \frac{\nu_0(a)}{a} \tag{22}$$

и плотности энергии в системе

$$\rho(a) = \sum_{l=1}^{n} \left\{ m_l \left[\frac{K_3(m_l a)}{K_1(m_l a)} - \left(\frac{K_2(m_l a)}{K_1(m_l a)} \right)^2 - \frac{1}{m_l a}\, \frac{K_2(m_l a)}{K_1(m_l a)} \right] \right\} \tag{23}$$

совпадают с соответствующими уравнениями релятивистского идеального газа.

2. Допустим теперь, что абсолютная величина поперечного импульса частицы ограничена, но значительно больше массы, т.е. $p_\perp \gg m_l$. В этом случае

$$\phi_l(a) = \frac{2\pi p}{a_k^2 - a_\perp^2}\left[a_\perp I_1(a_\perp p) K_0(a_k p) - a_k I_0(a_\perp p) K_1(a_k p)\right], \quad (24)$$

где

$$a_k = \sqrt{a_0^2 - a_1^2} \qquad a_\perp = \sqrt{a_2^2 + a_3^2} .$$

В безразмерных переменных $z = a_k p$ и $z_\perp = a_\perp p$ поток частиц можно записать в виде

$$\begin{aligned}
N^{(0)} &= \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{m_l}\left[pd \frac{a^{(0)}}{a_k} + \frac{a^{(0)}}{a_k^2 - a_\perp^2}\right], \\
N^{(1)} &= -\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{m_l}\left[pd \frac{a^{(1)}}{a_k} + \frac{a^{(1)}}{a_k^2 - a_\perp^2}\right], \\
N^{(2)} &= -\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{m_l}\left[pg \frac{a^{(2)}}{a_\perp} + \frac{a^{(2)}}{a_k^2 - a_\perp^2}\right], \\
N^{(3)} &= -\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{m_l}\left[pg \frac{a^{(3)}}{a_\perp} + \frac{a^{(3)}}{a_k^2 - a_\perp^2}\right],
\end{aligned} \quad (25)$$

где

$$\begin{aligned}
d &= \frac{z_\perp I_1(z_\perp) K_1(z) + z I_0(z_\perp) K_0(z)}{z_\perp I_1(z_\perp) K_0(z) - z I_0(z_\perp) K_1(z)} \\
g &= \frac{z I_1(z_\perp) K_1(z) + z_\perp I_0(z_\perp) K_0(z)}{z_\perp I_1(z_\perp) K_0(z) - z I_0(z_\perp) K_1(z)} .
\end{aligned} \quad (26)$$

Легко выделить в соотношениях (25) изотропную часть потока частиц, равную $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} \frac{a^{\mu}}{a_k^2 - a_\perp^2}$. Оставшаяся часть потока является псевдоизотропной. Она обладает выделенной изотропией по компонентам $N^{(0)}$ и $N^{(1)}$ и отдельно по компонентам $N^{(2)}$ и $N^{(3)}$.

Аналогичным образом можно разделить тензор энергии-импульса на две части, выделив в нем $\mathcal{T}_0^{\mu\nu}$ – изотропную часть и $\mathcal{T}_1^{\mu\nu}$ – неизотропный остаток

$$\mathcal{T}^{\mu\nu}(a) = \mathcal{T}_0^{\mu\nu} + \mathcal{T}_1^{\mu\nu} . \tag{27}$$

Изотропная часть тензора энергии-импульса может быть представлена выражением (15), где давление и плотность энергии в системе равны

$$\pi(a) = \rho(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{m_i} \frac{1}{(a_k^2 - a_\perp^2)} . \tag{28}$$

Неизотропный остаток тензора энергии-импульса приводится к виду

$$\mathcal{T}_1^{\mu\nu} = \sum_{i=1}^{n} \frac{p^2}{m_i^2} \begin{bmatrix} (f+2h)\dfrac{a^{(0)}a^{(0)}}{a_k^2} + \dfrac{d}{z}; & (f+2h)\dfrac{a^{(0)}a^{(1)}}{a_k^2}; & b\dfrac{a^{(0)}a^{(2)}}{a_k a_\perp}; & b\dfrac{a^{(0)}a^{(3)}}{a_k a_\perp} \\ (f+2h)\dfrac{a^{(0)}a^{(1)}}{a_k^2}; & (f+2h)\dfrac{a^{(1)}a^{(1)}}{a_k^2} - \dfrac{d}{z}; & -b\dfrac{a^{(2)}a^{(1)}}{a_k a_\perp}; & -b\dfrac{a^{(3)}a^{(1)}}{a_k a_\perp} \\ b\dfrac{a^{(2)}a^{(0)}}{a_k a_\perp}; & -b\dfrac{a^{(2)}a^{(1)}}{a_k a_\perp}; & \left(f+\dfrac{d+b}{z_\perp}\right)\dfrac{a^{(2)}a^{(2)}}{a_\perp^2} - \dfrac{g}{z_\perp}; & \left(f+\dfrac{d+b}{z_\perp}\right)\dfrac{a^{(2)}a^{(3)}}{a_\perp^2} \\ b\dfrac{a^{(3)}a^{(0)}}{a_k a_\perp}; & -b\dfrac{a^{(3)}a^{(1)}}{a_k a_\perp}; & \left(f+\dfrac{d+b}{z_\perp}\right)\dfrac{a^{(2)}a^{(3)}}{a_\perp^2}; & \left(f+\dfrac{d+b}{z_\perp}\right)\dfrac{a^{(3)}a^{(3)}}{a_\perp^2} - \dfrac{g}{z_\perp} \end{bmatrix} . \tag{29}$$

В этом выражении $f = 1 + d^2$

$$b = \frac{z I_1(z_\perp) K_1(z) - z_\perp I_0(z_\perp) K_0(z)}{z_\perp I_1(z_\perp) K_0(z) - z I_0(z_\perp) K_1(z)}, \tag{30}$$

где d определено соотношением (26), и

$$h = I_0(z_\perp) K_0(z) [z_\perp I_1(z_\perp) K_0(z) - z I_0(z_\perp) K_1(z)]^{-1}.$$

3. Наконец, рассмотрим случай, когда абсолютная величина поперечного импульса ограничена и такая, что всегда значительно меньше массы частицы, т.е. $m_i^2 \gg p^2$.

Тогда

$$\phi_i(a) = \frac{2\pi p}{a_\perp} I_1(a_\perp p) K_0(a_k m_i). \tag{31}$$

Определяя вектор потока частиц обычным образом, снова, как и в предыдущем случае, находим его псевдоизотропным.

Действительно, выражения

$$N^{(0)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_1(a_k m_i)}{K_0(a_k m_i)} \frac{a^{(0)}}{a_k},$$

$$N^{(0)} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{K_1(a_k m_i)}{K_0(a_k m_i)} \frac{a^{(1)}}{a_k}, \tag{32}$$

$$N^{(2)} = -\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{p}{m_i} \frac{I_0(a_\perp p)}{I_1(a_\perp p)} - \frac{2}{m_i a_\perp}\right] \frac{a^{(2)}}{a_\perp},$$

$$N^{(3)} = -\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{p}{m_i} \frac{I_0(a_\perp p)}{I_1(a_\perp p)} - \frac{2}{m_i a_\perp}\right] \frac{a^{(3)}}{a_\perp}$$

распадаются на две части, одна из которых содержит изотропию по компонентам $N^{(0)}$ и $N^{(1)}$, другая – по компонентам $N^{(2)}$ и $N^{(3)}$. Здесь, по сравнению с ранее рассмотренными случаями, нет общей изотропной части потока и, следовательно, связи между продольными и поперечными движениями в системе.

Вычисления тензора энергии-импульса довольно громоздки и приводят к расщеплению тензора на два блока

$$\mathcal{T}^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \mathcal{T}^{00}; \mathcal{T}^{01}; & 0 \\ \mathcal{T}^{10}; \mathcal{T}^{11}; & \\ 0 & \mathcal{T}^{22}; \mathcal{T}^{23}; \\ & \mathcal{T}^{32}; \mathcal{T}^{33}. \end{bmatrix} \tag{33}$$

Каждый из блоков связан с определенным (продольным или поперечным) движением внутри системы. Отличными от нуля являются следующие компоненты тензора:

$$\mathcal{T}^{(0,0)} = \sum_{l=1}^{n} \{ m_l [1 + (\frac{K_1(a_k m_l)}{K_0(a_k m_l)})^2] \frac{a^{(0)} a^{(0)}}{a_k^2} - \frac{K_1(a_k m_l)}{K_0(a_k m_l)} \frac{a_0^2 + a_1^2}{a_k^3} \},$$

$$\mathcal{T}^{(0,1)} = \mathcal{T}^{(1,0)} = \sum_{l=1}^{n} m_l [1 - \frac{K_1(a_k m_l)}{K_0(a_k m_l)} \frac{2}{a_k m_l} + (\frac{K_1(a_k m_l)}{K_0(a_k m_l)})^2] \frac{a^{(0)} a^{(1)}}{a_k^2},$$

$$\mathcal{T}^{(1,1)} = \sum_{l=1}^{n} \{ m_l [1 + (\frac{K_1(a_k m_l)}{K_0(a_k m_l)})^2] \frac{a^{(1)} a^{(1)}}{a_k^2} - \frac{K_1(a_k m_l)}{K_0(a_k m_l)} \frac{a_0^2 + a_1^2}{a_k^3} \},$$

$$\mathcal{T}^{(2,2)} = \sum_{l=1}^{n} \{ [\frac{p^2}{m_l} (1 - (\frac{I_0(a_\perp p)}{I_1(a_\perp p)})^2) - \frac{2}{a_\perp^2 m_l}] \frac{a^{(2)} a^{(3)}}{a_\perp^2} + \frac{I_0(a_\perp p)}{I_1(a_\perp p)} \frac{p}{a_\perp m_l} + \frac{2 a_3^2}{m_l a_\perp^4} \},$$

$$\mathcal{T}^{(3,3)} = \sum_{i=1}^{n} \{ [\frac{p^2}{m_i} (1-(\frac{I_0(a_\perp p)}{I_1(a_\perp p)})^2) - \frac{2}{a_\perp^2 m_i}] \frac{a^{(3)}a^{(3)}}{a_\perp^2} + \frac{I_0(a_\perp p)}{I_1(a_\perp p)} \frac{p}{a_\perp m_i} + \frac{2a_2^2}{m_i a_\perp^4} \},$$

$$\mathcal{T}^{(2,3)} = \sum_{i=1}^{n} \{ \frac{p^2}{m_i} [1 - (\frac{I_0(a_\perp p)}{I_1(a_\perp p)})^2] + \frac{4}{a_\perp^2 m_i} \} \frac{a^{(2)}a^{(3)}}{a_\perp^2} = \mathcal{T}^{(3,2)}. \qquad (34)$$

Разбиение тензора энергии–импульса на два несвязанных блока также подтверждает вывод о невозможности перекачки энергии–импульса из одного движения в другое. Таким образом, в данном приближении система участвует в двух независимых движениях продольном и поперечном.

Вычислим для каждого движения собственную плотность частиц, давление и плотность энергии. Для продольного движения имеем

$$\nu_0(a_k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_1(a_k m_i)}{K_0(a_k m_i)},$$

$$\pi(a_k) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_1(a_k m_i)}{K_0(a_k m_i)} \frac{1}{a_k}, \qquad (35)$$

$$\rho(a_k) = \sum_{i=1}^{n} m_i [1 - \frac{K_1(a_k m_i)}{K_0(a_k m_i)} \frac{1}{a_k m_i} + (\frac{K_1(a_k m_i)}{K_0(a_k m_i)})^2].$$

Отсюда следует, что уравнение состояния релятивистского идеального газа $\pi(a_k) = \nu_0(a_k)/a_k$ в данном случае выполняется. Для поперечного движения соответствующие выражения имеют вид

$$\nu_0(a_\perp) = \sum_{i=1}^{n} [\frac{p}{m_i} \frac{I_0(a_\perp p)}{I_1(a_\perp p)} - \frac{2}{a_\perp m_i}],$$

$$\pi(a_\perp) = \sum_{l=1}^{n} \left[\frac{p}{a_\perp m_l} \frac{I_0(a_\perp p)}{I_1(a_\perp p)} - \frac{2}{a_\perp^2 m_l} \right], \tag{36}$$

$$\rho(a_\perp) = \sum_{l=1}^{n} \left\{ \frac{p^2}{m_l} \left[1 - \frac{I_0(a_\perp p)}{I_1(a_\perp p)} \frac{1}{a_\perp p} - \left(\frac{I_0(a_\perp p)}{I_1(a_\perp p)} \right)^2 \right] - \frac{2}{a_\perp^2 m_l} \right\},$$

которые также аналогичны выражениям для идеального газа. Мы приходим к любопытному следствию, что в случае $m_l^2 \gg p_{l\perp}^2$ система релятивистских частиц становится эквивалентной двум различным идеальным газам или двухкомпонентному идеальному газу.

Рассмотрим асимптотическое по температуре продольного движения поведение системы релятивистских частиц. По определению, модуль a 4-вектора – постоянная величина, равная обратной предельной температуре Хагедорна. Поэтому для изотропного распределения в случае неограниченного поперечного импульса получаем

$$\begin{aligned} &\nu_0(a), \quad \pi(a), \quad \rho(a) < \infty, \\ &N^\mu(a) \to 0, \\ &\mathcal{T}^{\mu\nu}(a) \to \pi(a)\,\delta^{\mu\nu}. \end{aligned} \tag{37}$$

Во втором случае, когда $p_{l\perp} \gg m_l$, а поперечный импульс ограничен, асимптотика общей изотропной части потока частиц и тензора энергии-импульса аналогична выражениям (37). Однако в этом случае имеется еще псевдоизотропная часть потока и неизотропный остаток тензора. Конечность поперечного импульса налагает ограничение на температуру поперечного движения, что ведет к вымиранию нулевой и продольной компоненты вектора потока частиц, тогда как поперечные компоненты остаются конечными. В неизотропной части тензора энергии-импульса происходит вымирание всех компонент, связанных с нулевой и продольной компонентой 4-вектора a .

К аналогичному результату приходим в последнем случае, когда $p_{l\perp} \ll m_l$, и общая изотропная часть полностью отсутствует.

Таким образом, легко проследить эволюцию релятивистской системы, связанную со все более жестким ограничением на абсолютную величину поперечного импульса частицы. Действительно, когда ограничение отсутствует, мы имеем однородный идеальный релятивистский газ, идеальный не в смысле отсутствия взаимодействий, а вследствие формального соответствия уравнению состояния для идеального газа.

Слабое ограничение на поперечный импульс немедленно ведет к нарушению изотропии движения и выделению неизотропной части. В этом случае еше существует общая изотропная часть, которая связывает продольное движение с поперечным. Моделирующий поведение системы релятивистский газ становится трехкомпонентным, оставаясь по каждой компоненте идеальным в указанном выше смысле.

Сильное ограничение поперечного импульса величиной, значительно меньшей массы частицы, приводит к полному отделению поперечного движения от продольного, и, следовательно, к двухкомпонентному идеальному газу.

Поскольку ограничения на импульс поперечного движения связаны с массой частиц, и, кроме того, собственная плотность, давление и плотность энергии также зависят от массы (причем нелинейно), то подобное поведение может быть объяснено гравитационным взаимодействием, в некоторой степени аналогично тому,как объясняется анизотропия плазмы в магнитном поле. К сожалению, в настоящее время мы не можем привести достаточно строгого количественного описания такого взаимодействия, потому что применение О.Т.О. к динамическим системам многих частиц сталкивается со значительными трудностями, но мы надеемся, что в дальнейшем нам удастся эти трудности преодолеть.

Литература

1. Д.Л. Синдж. "Релятивистский газ", Атомиздат, Москва, 1960.
2. G. Boillat. Lett. Nuovo Cimento 3, 521 (1970).
3. A.M. Gleeson, M.G. Gundzik, E.C.G. Sudarshan, A. Pagnamenta. "Interpretation of Angular Distribution in Terms of Complex Mass Particles" prepr. Univ. of Texas, U.S.A. (1970).
4. R. Hagedorn. Astron. Astrophys. 5, 184 (1970).
5. H. Arzelies. Nuovo Cimento 35, 792 (1965).
6. F. Rohrlich. Nuovo Cimento 45B, 76 (1966).
7. E. Suhonen. "Phase-space Integral and Statistical Quantities in High-Energy Collisions" prepr. Univ. of Jyväskylä, Finland (1970).

Рукопись поступила в издательский отдел
25 ноября 1971 года.