СООБЩЕНИЯ
ОБЪЕДИНЕННОГО
ИНСТИТУТА
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р2 - 6134

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

В.Н.Первушин

КОНТИНУАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

1971

P2 - 6134

В.Н.Первушин

КОНТИНУАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ КВАЗИПОТЕНЦИАЛЬНОГО ТИПА

S U M M A R Y

The solution of the quasipotential equation (1.1) [1-3] is obtained in the form of the Feynman continual integral over the phase-space paths: (1.7), (1.14), (2.12). It is shown in ref.[4] that the method of finite approximation for this integral should be chosen in accordance with the kind of quantization which defines the order of the momentum and co-ordinate operators in the polynomial expansion of the nonlocal potential operator. The method of solving implies the following steps: i) Instead of eq. (1.1), an equivalent Lippmann-Schwinger equation (1.5) with nonlocal potential (1.6) and a certain kind of quantization, the order of the action of operators in eq. (1.6) being defined by their indices, is considered; ii) The solutions (1.9), (1.14) of the Lippman-Schwinger equation are expressed in terms of the operator of time evolution; iii) The Feynman Operator Calculus[5] is used to give the operator of time evolution in the form of a continual integral: (2.6) - (2.11); iiii) The continual solution of eq. (1.1) is compared with that by perturbation theory. The high- energy asymptotics of the quasipotential scattering amplitude is investigated in the Straight-Line Path Approximation[6,7].

Метод континуального интегрирования является удобным и компактным инструментом для исследования квантовой теории. Представляет интерес применить этот метод в квазипотенциальном подходе[1,2,3], который сочетает богатую информацию релятивистской квантовой теории поля с простотой и наглядностью физической интерпретации нерелятивистской квантовой механики. В настоящей статье находится решение уравнения квазипотенциального типа (I.I) в виде континуального интеграла в фазовом пространстве. Как было показано в недавней работе Березина[4], интегралы такого типа сильно зависят от способа конечнократной аппроксимации, который должен выбираться в соответствии с вариантом квантования, т.е. способом расстановки некоммутирующих операторов импульса и координаты при полиномиальном разложении функций от этих операторов.

В разделе I квазипотенциальное уравнение сводится к уравнению Липмана-Швингера с нелокальным потенциалом и определенным вариантом квантования. В разделе 2 находится континуальное представление для амплитуды с указанием способа аппроксимации. Мы используем при этом операторное исчисление Фейнмана[5], которое, по нашему мнению, является в данном случае более простым и удобным, чем метод построения конечнократных интегралов, предложенный в работе[4]. В разделе 3 полученное континуальное решение сравнивается с решением по теории возмущений, а в разделе 4 исследуется высокоэнергетическая асимптотика амплитуды рассеяния в приближении прямолинейных путей[6,7].

I. Сведение к уравнению Липмана-Швингера

Рассмотрим уравнение квазипотенциального типа:

$$F(k_1,k_2)=\tilde{A}[k_1(-)k_2]+\int d^3\ell\,\varphi(\ell)\,\frac{\tilde{A}[k_1(-)\ell]\,F(\ell,k_2)}{E-H_0(\ell)+i\varepsilon}\,. \tag{I.I}$$

Здесь: $\tilde{A}$ - квазипотенциал , зависящий от E , как от параметра;

$$\vec{k}_1(-)\vec{k}_2=\vec{k}_1-\vec{k}_2+\vec{\alpha}(k_1,k_2)\,; \tag{I.2}$$

$\alpha(k_1,k_2)$, $\varphi(\ell)$, $H_0(\ell)$ -вообще говоря, произвольные функции. На "энергетической" поверхности $H_0(k_1)=H_0(k_2)=E$; $\varphi(k_1)=\varphi(k_2)$ квазипотенциальная амплитуда $F(k_1,k_2)$ совпадает с физической амплитудой, которую дает формализм S -матрицы.

Для уравнения Логунова-Тавхелидзе /I/ с локальным квазипотенциалом имеем x)

$$\alpha(k_1,k_2)\equiv 0\;;\qquad \varphi(\ell)=\frac{1}{\sqrt{\ell^2+m^2}}\;;\ H_0(\ell)=\frac{\ell^2}{2m}\,. \tag{I.3}$$

В уравнении Кадышевского /2/ фигурируют образы и операции пространства Лобачевского:

$$\vec{\alpha}(k_1,k_2)=\vec{k}_2\left[1-\sqrt{1+\frac{k_1^2}{m^2}}+\frac{(k_1\cdot k_2)}{m^2\left(1+\sqrt{1+\frac{k_2^2}{m^2}}\right)}\right];$$

$$\varphi(\ell)=\frac{1}{\sqrt{\ell^2+m^2}}\;;\quad H_0(\ell)=\sqrt{\ell^2+m^2}\,. \tag{I.4}$$

---

x) Для краткости перед слагаемыми в правой части уравнения (I.I) мы опустим коэффициенты, которые нетрудно восстановить с помощью преобразования типа $F\to FC_1$, $\tilde{A}\to\tilde{A}C_2$ с определенными для каждого конкретного случая C_1 и C_2 .

Вообще говоря, с уравнением (I.I) можно связать произвольную поверхность в 4-пространстве импульсов. Уравнение (I.I) нетрудно свести к уравнению Липмана-Швингера на матрицу рассеяния $\hat{t}$:

$$\hat{t} = \hat{V} + \hat{V}\frac{1}{E - \hat{H}_0 + i\varepsilon}\hat{t} \qquad (I.5)$$

с нелокальным потенциалом

$$\hat{V} = \varphi(\hat{p}_0)A(\hat{q}_1)\, e^{i\hat{q}_1\alpha(\hat{p}_0;\hat{p}_2)} \quad ; A(r) = \int d^3\ell\, \tilde{A}(\ell)e^{-i\ell r}. \qquad (I.6)$$

Причем квазипотенциальная амплитуда имеет вид

$$F(k_1,k_2) = \frac{\langle k_1|\hat{t}|k_2\rangle}{\varphi(k_1)}. \qquad (I.7)$$

Здесь: $\hat{p}$ и $\hat{q}$ - операторы импульса и координаты с обычными коммутационными соотношениями; $[\hat{p}_i, \hat{q}_j] = -i\delta_{ij}$; $|k\rangle$ - собственный вектор оператора импульса, удовлетворяющий условиям полноты и ортогональности:

$$\int d^3k\, |k\rangle\langle k| = I \quad ; \langle k_1|k_2\rangle = \delta^3(k_1 - k_2), \qquad (I.8)$$

которые справедливы и для собственных векторов оператора координаты $|r\rangle$. Порядок действия операторов в (I.6) определяется индексом, а именно, оператор с большим индексом действует позднее. Фактически в (I.6) задан способ расстановки некоммутирующих операторов при полиномиальном разложении нелокального потенциала: /4/

$$\hat{V} \equiv \hat{V}(\hat{p}_0, \hat{p}_2|\hat{q}_1) = \sum_{\ell,n,m}(\hat{p}_2)^\ell(\hat{q}_1)^n(\hat{p}_0)^m V_{\ell n m}.$$

Простейшие алгебраические выкладки приводят к следующим операторным решениям уравнения (I.5):

$$\hat{t} = \hat{V}\frac{1}{E-\hat{H}+i\varepsilon}\left(E-\hat{H}_c\right), \tag{I.9}$$

или

$$\hat{t} = \left[E-\hat{H}_c\right]\left[\frac{1}{E-\hat{H}+i\varepsilon} - \frac{1}{E-\hat{H}_c+i\varepsilon}\right]\left[E-\hat{H}_c\right], \tag{I.10}$$

где

$$\hat{H} = \hat{H}_c + \hat{V} - \tag{I.11}$$

полный гамильтониан; $\frac{1}{E-\hat{H}+i\varepsilon}$ есть символическая запись фурье-образа оператора сдвига по времени:

$$\frac{1}{E-\hat{H}+i\varepsilon} = (-i)\int_0^\infty dt\, e^{iEt}\hat{\mathcal{R}}_t , \tag{I.12}$$

который удовлетворяет уравнению Шредингера:

$$i\,\partial_t\hat{\mathcal{R}}_t = \hat{H}\hat{\mathcal{R}}_t\ ;\quad \hat{\mathcal{R}}_{t=0} = I. \tag{I.13}$$

Используя решение (I.9) и условие полноты для собственных векторов оператора координаты, амплитуду рассеяния запишем в виде

$$\langle k_1|\hat{t}|k_2\rangle = \int d^3r\,\langle k_1|\hat{V}|r\rangle\,\varphi_{k_2}(r), \tag{I.14}$$

$$\varphi_{\kappa_2}(\tau) = \lim_{H_c(\kappa_1)\to E} [E - H_0(\kappa_1)] \langle \tau | \frac{1}{E - \hat{H} + i\epsilon} | \kappa_2 \rangle \ . \tag{I.15}$$

Учитывая (I.2) и соотношение

$$\lim_{a\to 0} (-ia) \int_0^\infty dt\, e^{iat} f(t) = \lim_{t\to\infty} f(t) , \tag{I.16}$$

справедливое для ограниченных функций, для волновой функции $\varphi_{\kappa_2}(\tau)$ получим выражение

$$\varphi_{\kappa_2}(\tau) = \lim_{t\to\infty} \left[\langle \tau | \hat{\mathcal{R}}_t | \kappa_2 \rangle e^{iEt} \right] \ . \tag{I.17}$$

В приложении с помощью операторного решения (I.10) находится выражение для амплитуды, симметричное относительно начального и конечного импульсов κ_1 , κ_2 .

2. Континуальное представление

Решение уравнения Шредингера (I.13) представимо в виде упорядоченной по времени экспоненты /5,8/:

$$\hat{\mathcal{R}}_t = \exp\left\{ -i \int_0^t d\tau\, \hat{H}(\hat{p}_\tau, \hat{q}_\tau) \right\} \ . \tag{2.I}$$

Операторы $\hat{p}_\tau$, $\hat{q}_\tau$ зависят от времени τ , как от упорядочивающего индекса, причем операторы с большим индексом действуют позднее. Запись решения уравнения Шредингера в форме (2.I) необходимо дополнить заданием схемы квантования, т.е. способа расстановки некоммутирующих операторов в гамильтониане при одинаковых временах. Как мы уже видели в предыдущем разделе, вид квазипотенциального уравнения определяет расстановку операторов в потенциале (см. (I.6)). Но существует произвол в способе расстановки операторов $\hat{p}$ и $\hat{q}$, принадлежащих разным частям полного гамильтониана, $\hat{H}_0$ и $\hat{V}$, соответственно. Для определенности выберем этот способ расстановки таким образом, чтобы он совпал с расстановкой операторов в потенциале при $\alpha \equiv 0$, т.е. в случае локального квазипотенциала.

Мы будем учитывать схему квантования в самом выражении (2.I), сдвигая аргументы $\hat{p}_\tau$, $\hat{q}_\tau$ относительно друг друга на бесконечно малую величину $\Delta\tau > 0$, или задавая способ конечнократной аппроксимации интеграла под знаком экспоненты в (2.I):

$$\int_0^t d\tau\, \hat{H}(\hat{p}_\tau, \hat{q}_\tau) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \Delta\tau\, H(\hat{p}_k, \hat{q}_k)\ ; \tag{2.2}$$

$$\hat{p}_k = \hat{p}_{\tau_k}\ ; \quad \tau_k = \frac{kt}{N}\ ; (k = 0, 1, \ldots) \quad \Delta\tau = \frac{t}{N}\ . \tag{2.3}$$

В построении интегральных сумм типа (2.2), соответствующих разбиению (2.3) области изменения переменной τ, вообще говоря, существует большой произвол, но задание схемы квантования однозначно определяет выбор точек p_k, q_k, участвующих в составлении интегральной суммы. Для потенциалов типа (I.6), $\hat{V} \equiv V(\hat{p}_1, \hat{p}_2 | \hat{q}_1)$, с учётом дополнительного способа расстановки операторов, принадлежащих разным частям полного гамильтониана,

мы должны поставить в (2.I) и (2.2) соответственно

$$\hat{H}(\hat{p}_\tau, \hat{q}_\tau) = \hat{H}_0(\hat{p}_{\tau-\Delta\tau}) + \hat{V}(\hat{p}_{\tau-\Delta\tau}, \hat{p}_{\tau+\Delta\tau} | \hat{q}_\tau)\ , \tag{2.4}$$

$$\hat{H}(\hat{p}_k, \hat{q}_k) = \hat{H}_0(\hat{p}_{k-1}) + \hat{V}(\hat{p}_{k-1}, \hat{p}_{k+1} | \hat{q}_k)\ . \tag{2.5}$$

Распутыванием выражения (2.I) назовём операцию приведения его к такой форме, в которой все операторы $\hat{p}$ действуют позднее операторов $\hat{q}$: $\hat{\Omega}_t[\hat{p}_\tau, \hat{q}_\tau] \to \hat{\Omega}_t(\hat{p}_\tau, \hat{q}_\tau)$.

Следуя Фейнману[5], для того чтобы распутать выражение (2.I), применим к оператору $\hat{\Omega}_t$, как функционалу от функции $\hat{p}_\tau$, континуальное фурье-преобразование, которое определяется в[15] как континуальный предел конечнократного фурье-преобразования функционала от дискретной функции (2.

$$\hat{\Omega}_t[\hat{p}_\tau, \hat{q}_\tau] = \lim_{N\to\infty} e^{-i\sum_{k=1}^{N} \Delta\tau\, \hat{H}(\hat{p}_k, \hat{q}_k)} = \tag{2.6}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int\cdots\int \prod_{k=1}^{N+2} \left[d\pi_{k-1} \frac{dx_k^3}{(2\pi)^3}\right] e^{i\sum_{k=1}^{N+2} x_k(\pi_{k-1} - \hat{p}_{k-1})} \left[e^{-i\sum_{k=1}^{N} \Delta\tau\, H(\pi_k, \hat{q}_k)}\right] = \tag{2.7}$$

$$= \lim_{N\to\infty} \int\cdots\int_{x_0'=0} \prod_{k=1}^{N+2} \left[d^3\pi_{k-1} \frac{d^3x_k'}{(2\pi)^3}\right] e^{i\sum_{k=1}^{N+2} (x_k' - x_{k-1}')(\pi_{k-1} - \hat{p}_{k-1})} \times$$
$$\times \left[e^{-i\sum_{k=1}^{N} \Delta\tau\, H(\pi_k, \hat{q}_k)}\right] = \tag{2.8}$$

$$= \iint_{x(0)=0} \prod_{\tau} \left[d^3\pi(\tau) \frac{d^3x(\tau)}{(2\pi)^3} \right] e^{i\int_0^t d\tau\, \dot{x}(\tau)\pi(\tau)} \hat{U}_t \quad ; \quad \dot{x}(\tau) = \frac{d}{d\tau}x(\tau) \tag{2.9}$$

(при переходе от (2.7) и (2.8) была сделана замена переменных $x_k = x'_k - x'_{k-1}$ при условии $x'_0 = 0$). Оператор $\hat{U}_t$ в (2.9) удовлетворяет уравнению Шредингера

$$i\partial_t \hat{U}_t = [\hat{p}\,\dot{x}(t) + \hat{H}(\pi(t), \hat{q})]\,\hat{U}_t \quad ; \quad \hat{U}_{t=0} = I, \tag{2.10}$$

которое легко решается[5] с помощью унитарного преобразования

$$\hat{U}_t = e^{i\hat{p}\,x(t)} \hat{\Lambda}_t \equiv e^{i\hat{P}_\tau x(t)} \hat{\Lambda}_t(\hat{q}_c) .$$

Причем для оператора $\hat{\Lambda}_t$ имеет место простое уравнение:

$$i\partial_t \hat{\Lambda}_t = \hat{\hat{H}} \Lambda_t \quad ; \quad \hat{\hat{H}} = e^{i\hat{p}x(t)} \hat{H}(\pi(t), \hat{q})\, e^{-i\hat{p}x(t)} = \hat{H}(\pi(t), \hat{q} + x(t)).$$

Таким образом, окончательно для оператора сдвига $\hat{\Omega}_t$ получим выражение

$$\hat{\Omega}_t[\hat{P}_\tau, \hat{q}_c] = \iint_{X(0)=0} \prod_{\tau} \left[d^3\pi(\tau) \frac{d^3x(\tau)}{(2\pi)^3} \right] \exp\left\{ i\int_0^t d\tau \left[\dot{x}(\tau)(\pi(\tau) - \hat{P}_\tau) - \hat{H}(\pi(\tau), \hat{q}_0 + x(\tau)) \right] \right\} . \tag{2.11}$$

Учитывая, что $\langle \tau | \hat{\Omega}_t(\hat{P}_\tau, \hat{q}_c) | K_2 \rangle = \Omega_t(K_2, \tau) \langle \tau | K_2 \rangle$, функцию $\varphi_{K_2}(\tau)$, определенную равенством (I.17), представим в виде

континуального интеграла:

$$\varphi_{K_2}(\tau) = \langle \tau | K_2 \rangle \iint \prod_{\tau} \left[d^3\pi(\tau) \frac{d^3x(\tau)}{(2\pi)^3} \right] \exp\left\{ i\int_0^\infty d\tau \left[\dot{x}(\pi(\tau) - K_2) + E - H(\pi(\tau), \tau + x(\tau)) \right] \right\} .$$

Из (2.11) нетрудно также получить известное выражение ядра оператора сдвига в координатном представлении:

$$\langle \tau_1 | \Omega_t | \tau_2 \rangle = \iint_{\substack{x(0)=\tau_1 \\ x(t)=\tau_2}} \prod_{\tau} \left[d\pi(\tau) \frac{d^3x(\tau)}{(2\pi)^3} \right] e^{iS} \quad ; \quad S = \int_0^t d\tau \left[\dot{x}\pi - H(\pi, x) \right] .$$

Способ конечнократной аппроксимации выражений (2. (2.13) задан формулами (2.5), (2.8) и однозначно опред схемой квантования, что впервые было показано в случае тейших схем квантования в недавней работе Березина[4].

3. Теория возмущения

Метод континуального интегрирования далёк от ст обоснования. Поэтому необходимым условием для дальнейше работы с полученными континуальными решениями уравнения Шредингера является сравнение их с рядом теорий возмуще $h^{\underline{u}}$ порядок разложения по потенциалу волновой функци с гамильтонианом (2,4) имеет вид

$$\varphi^{(n)}_{K_2}(\tau) = \langle \tau | K_2 \rangle \iint \prod_{\tau} \left[d^3\pi(\tau) \frac{d^3x(\tau)}{(2\pi)^3} \right] \exp\left\{ i\int_0^\infty d\tau \left[\dot{x}(\tau)(\pi(\tau) - K_2) + E - H_0(\pi(\tau - \Delta)) \right] \right.$$

$$\times \frac{(-i)^n}{n!} \prod_{j=1}^{n} \left[\int_0^\infty d\xi_j\, V[\pi(\xi_j - \Delta), \pi(\xi_j + \Delta) | \tau + x(\xi_j)] \right] .$$

Схему квантования мы учли здесь сдвигом аргумента импульса относительно аргумента координаты на бесконечно малую величину $\Delta > 0$. Используя тождество

$$\frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n}\left[\int_0^{\infty} d\zeta_k\, f(\zeta_k)\right] \equiv \int_0^{\infty} d\zeta_1 \int_0^{\zeta_1} d\zeta_2 \ldots \int_0^{\zeta_{n-1}} d\zeta_k \prod_{k=1}^{n} f(\zeta_k) \tag{3.2}$$

и делая фурье-преобразование для каждого из n потенциалов, для (3.I) получим выражение

$$\begin{aligned}\varphi^{(n)}_{\kappa_2}(\tau) = \int \prod_j \left[\frac{d^3 r_j}{(2\pi)^3}\, d\ell_j\, e^{i r_j \tilde{\ell}_j}\right] \int_0^{\infty} d\zeta_1 \int_0^{\zeta_1} d\zeta_2 \ldots \int_0^{\zeta_{n-1}} d\zeta_n \int\!\!\!\int \prod_{\tau}\left[d^3 x(\tau) \frac{d^3 \pi(\tau)}{(2\pi)^3}\right] \times \\ \times e^{i\int^{\infty} d\tau\, \dot{x}\left[\pi(\tau) - \mathcal{P}^{(n)}(\tau)\right]} \left[\exp\left\{i\int_0^{\infty} d\tau\left[E - H_0(\pi(\tau-\Delta))\right]\right\} \prod_{j=1}^{n} V\left(\pi(\zeta_j-\Delta), \pi(\zeta_j+\Delta) \middle| r_j\right)\right],\end{aligned} \tag{3.3}$$

где

$$\tilde{\ell}_n = \kappa_2 - \ell_n\ ;\quad \tilde{\ell}_{n-1} = \ell_n - \ell_{n-1}\ ;\ \ldots\ ;\ \tilde{\ell}_1 = \ell_2 - \ell_1\ ; \tag{3.4}$$

$$\mathcal{P}^{(n)}(\tau) = \kappa_2 - \sum_{j=1}^{n} \tilde{\ell}_j\, \theta(\zeta_j - \tau)\ ;\qquad \theta(\tau) = \begin{cases} 1, & \tau > 0 \\ 0, & \tau < 0 \end{cases}. \tag{3.5}$$

В (3.3) содержится континуальный интеграл от функционала линейного в экспоненте по $x(\tau)$. Такие континуальные интегралы легко берутся, а именно, согласно определению (26)-(29), после интегрирования по $x(\tau)$, $\pi(\tau)$ мы должны положить всюду в (3.3) $\pi(\tau) \equiv \mathcal{P}^{(n)}(\tau)$. Сдвиг аргументов $\pi(\tau)$, $x(\tau)$, учитывающий схему квантования, фактически доопределяет θ -функцию (3.5) в нуле:

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}^{(n)}(\zeta_j - \Delta) = \ell_{j+1} - (\ell_{j+1} - \ell_j)\,\theta(\zeta_j - (\zeta_j - \Delta)) = \ell_j\ ; \\ &\mathcal{P}^{(n)}(\zeta_j + \Delta) = \ell_{j+1}\ .\end{aligned} \tag{3.6}$$

Нетрудно показать, что имеют место равенства:

$$\int\limits_0^\infty d\tau\left[E-H_0\left(\mathcal{P}^{(n)}(\tau-0)\right)\right]=\zeta_n\left[E-H_0(\ell_n)\right]+\sum_{j=1}^{n}(\zeta_{j-1}-\zeta_j)\left[E-H_0(\ell_j)\right],\tag{3.7}$$

$$\int\limits_0^\infty d\zeta_1\int\limits_0^{\zeta_1}d\zeta_2\cdots\int\limits_0^{\zeta_{n-1}}d\zeta_n\exp\left\{i\int\limits_0^\infty d\tau\left[E-H_0\left(\mathcal{P}^{(n)}\right)\right]\right\}=\prod_{j=1}^{n}\frac{i}{E-H_0(\ell_j)},\tag{3.8}$$

$$\int\frac{d^3 r_k}{(2\pi)^3}e^{ir_k(\ell_{k+1}-\ell_k)}V(\ell_k,\ell_{k+1}/r_k)=\langle\ell_1|\hat V|\ell_2\rangle,\tag{3.9}$$

с учётом которых выражение (3.I) принимает вид

$$\varphi_{K_1}^{(n)}(r)=\int\cdots\int\prod_{k=1}^{n}\left[\frac{d^3\ell_k}{E-H_0(\ell_k)}\right]\langle r|\ell_1\rangle\langle\ell_1|\hat V|\ell_2\rangle\cdots\langle\ell_n|V|K_1\rangle.\tag{3.I0}$$

Отсюда следует, что $(n+1)$ порядок разложения амплитуды рассеяния (I.4),(2.I2) совпадает с соответствующим выражением, полученным иттерацией уравнения Липмана-Швингера, что может служить в какой-то мере обоснованием континуальных решений (2.II)-(2.I2).

Важно отметить, что интеграл (3.7) не зависит от того, каким образом мы будем сдвигать аргумент $\mathcal{P}(\tau)$ в H_0 относительно аргумента $X(\tau)$ в потенциале. Следовательно, теория возмущений не чувствительна к дополнительному способу расстановки операторов $\hat p$ и $\hat q$, принадлежащих разным частям полного гамильтониана. С другой стороны, в работе [4] рассмотрен пример, в котором результаты точного вычисления континуального интеграла существенно зависят от такого способа расстановки. Представляет интерес подробно исследовать вопрос о зависимости точного решения (2.I2) от дополнительной схемы квантования.

4. Приближение прямолинейных путей

Рассмотрим высокоэнергетическую асимптотику амплитуды в приближении прямолинейных путей[6,7]. Согласно этому приближению, интеграл под знаком экспоненты и саму экспоненту нужно разложить в ряд по степеням функциональной переменной, описывающей отклонение от классической траектории свободного движения:

$$x(\tau) = \vec{v}\tau \quad ; \quad \vec{v} = \frac{\vec{\partial} H_0(k_z)}{\partial k_z} . \tag{4.1}$$

Как показано в работе[7], такой ряд совпадает с эйкональным разложением амплитуды рассеяния[9]. Основной член разложения и поправки к нему проще всего вычислить, если записать континуальный интеграл (2.I2) в дифференциальной форме Фрадкина[15]:

$$\Phi_{k_z}(\tau) = \langle \tau | k_z \rangle \exp\left\{ i \int_0^\infty d\tau \left[i\bar{x}(\tau) v + E - H\left(i\bar{x}(\tau) + k_z, \tau + v\tau + \int_0^\tau \frac{\delta}{\delta \bar{x}(\eta)} d\eta \right) \right] \right\} \Bigg|_{\bar{x}(\tau)=0} . \tag{4.2}$$

Раскладывая это выражение в ряд по вариационной производной с учетом схемы квантования (2.4) и выбирая ось z вдоль импульса k_z, получим:

$$\Phi_{k_z}(\tau) = \langle \tau | k_z \rangle e^{-i\chi_0(\tau)} \left[1 + \chi_1(\tau) + \cdots \right] . \tag{4.3}$$

$$\chi_0(\tau) = \int_0^\infty d\zeta \, V(k_z, k_z | \tau + v\zeta) = \frac{1}{|v|} \int_z^\infty dz_1 V(k_z, k_z | \tau_\perp, z_1); \quad \tau = (\tau_\perp, z) . \tag{4.4}$$

$$\chi_1(\tau) = \int_0^\infty d\zeta \left[\vec{\partial}_k \vec{\partial}_\tau V(k, k_z | \tau + v\zeta) - i \vec{\partial}_\tau V(k_z, k_z | \tau + v\zeta) \int_0^\zeta d\eta \, \vec{\partial}_k V(k, k | \tau + v\eta) \right] \Bigg|_{k=k_z} . \tag{4.5}$$

Достаточные условия справедливости эйконального приближения можно найти, сравнивая по по порядку величины эйкональные поправки[19]:

$$|\chi_0| \gg |\chi_1| \quad ; \quad |\chi_1| \ll 1 . \tag{4.6}$$

В частности, если $|\partial_\tau V| \sim \frac{V_0}{R}; \; |\partial_k V| \sim \frac{V_0}{K}; \; \partial_k H_0 \sim \frac{H_0}{K}$ (где V_0 -порядок потенциала в основной области его существования, R -размер этой области), что выполняется для уравнения Логунова-Тавхелидзе (I.3), то из (4.6) получим условия гладкости квазипотенциала и малости потенциальной энергии

$$KR \gg 1 , \qquad \left| \frac{V_0}{H_0} \right| \ll \frac{1}{\sqrt{KR}} . \tag{4.7}$$

При малых углах рассеяния, $\theta \ll \frac{1}{\sqrt{KR}}$, из (I.14) и (4.3) нетрудно получить представление Мольера[10]

$$\langle k_1 | \hat{t} | k_2 \rangle_{\text{эйк}} = i|v| \int d^3\tau_\perp \, e^{i\tau_\perp (k_1 - k_2)} \left[e^{-i\chi_0(\tau_\perp)} - 1 \right]; \quad \chi_0(\tau_\perp) = \chi_0(\tau)\big|_{z=-\infty} . \tag{4.8}$$

Для квазипотенциальной амплитуды (I.3) это представление впервые было найдено в работе[11] и применено затем для описания экспериментов по высокоэнергетическому рассеянию адронов.[11,12]

Для нелокального квазипотенциала (I.4) первое из условий (4.6) не выполняется: $|\chi_1| \sim |\chi_0|$, что согласуется при $\sqrt{R} \sim \sqrt{\frac{1}{m}}$ с результатами работы[17], где было исследовано высокоэнергетическое поведение амплитуды, подчиняющейся уравнению Кадышевского.

Отметим, что вследствие достаточного характера условий (4.6) нарушение их, вообще говоря, еще не означает несправедливости приближения прямолинейных путей и вопрос этот требует дальнейших исследований[16].

В заключение автор искренне благодарит Б.М.Барбашова, Д.И.Блохинцева, Г.В.Ефимова, В.Г.Кадышевского, Б.Кунста, В.А.Матвеева, Н.Н.Меймана, Р.М.Мир-Касимова, Н.Б.Скачкова, А.Н.Тавхелидзе и Л.Д.Фаддеева за полезные и стимулирующие обсуждения.

Приложение

В этом приложении с помощью операторного решения (I.I0) мы получим симметричное относительно импульсов k_1 и k_2 интегральное представление для амплитуды (I.14).

Используя для оператора сдвига запись в виде упорядоченной по времени экспоненты и равенство $e^{a}-1=\int_0^1 d\lambda\, a\, e^{\lambda a}$, матрицу рассеяния (I.I0) представим в виде:

$$\hat{t} = [E-\hat{H}_0](-i)\int_0^\infty dt\, e^{iEt}\left[e^{-i\int_0^t d\tau \hat{H}_0}\left(e^{-i\int_0^t d\tau \hat{V}_\tau}-1\right)\right][E-\hat{H}_0] = \tag{I}$$

$$= [E-\hat{H}_0](-i)^2\int_0^\infty dt\int_0^t d\tau\int_0^1 d\lambda\, e^{iE(t-\tau)+iE\tau} \times \left[e^{-i\int_\tau^t d\tau \hat{H}^{(\lambda)}_\tau}\,\hat{V}_\tau\, e^{-i\int_0^\tau d\tau \hat{H}^{(\lambda)}_\tau}\right][E-\hat{H}_0], \tag{II}$$

где

$$\hat{H}^{(\lambda)}_\tau = \hat{H}_{0\tau} + \lambda \hat{V}_\tau . \tag{III}$$

Делая замену переменных $t-\tau=t'$ и совершая переход на энергетическую поверхность аналогично (I.I5)-(I.I7), для амплитуды рассеяния получим выражение

$$\langle k_1|\hat{t}|k_2\rangle = \int_0^1 d\lambda\int d^3r_1\int d^3r_2\, \varphi^{*(\lambda)}_{k_1}(r_1)\langle r_1|\hat{V}|r_2\rangle\varphi^{(\lambda)}_{k_2}(r_2) . \tag{IV}$$

Здесь $\varphi^{(\lambda)}_{k_2}(r)$, $\varphi^{*(\lambda)}_{k_1}(r)$ – волновые функции

$$\varphi^{(\lambda)}_{k_2}(r_2) = \lim_{\tau\to\infty}\langle r_2|\exp\left\{-i\int_0^\tau d\tau\left[\hat{H}^{(\lambda)}_\tau - E\right]\right\}|k_2\rangle , \tag{V}$$

$$\varphi^{*(\lambda)}_{k_1}(r_1) = \lim_{\tau'\to\infty}\langle k_1|\exp\left\{-i\int_{-\tau'}^0 d\tau\left[\hat{H}^{(\lambda)}_\tau - E\right]\right\}|r_1\rangle . \tag{VI}$$

Литература

I. A.A.Logunov, A.N.Tavkhelidze. Nuovo Cim., 29, 380 (196

2. V.G.Kadyshevsky, R.M.Mir-Kasimov, N.B.Skachkov. Nuovo Cim., B6, 125 (1968).

3. I.T.Todorov. Phys.Rev., D3, 2351 (1971).

4. Ф.А.Березин. ТМФ, 6, I94 (I97I).

5. R.P.Feynman. Phys.Rev., 84, 108 (1951).

6. B.M.Barbashov, S.P.Kuleshov, V.A.Matveev, V.N.Pervus A.N.Sissakian, A.N.Tavkhelidze. Phys.Lett., 33B, 484

7. В.Н. Первушин. ТМФ, 4, 22 (I970).

8. С.М. Биленький. Введение в диаграммную технику Фей М., Атомиздат, I97I.

9. P.S.Saxon, L.I.Schiff Nuovo Cim., 6, 614 (1957).

I0. G.Moliere, Z.Naturforsch., 2A, 133 (1947).

II. V.R.Garsevanishvili, V.A.Matveev, L.A.Slepchenko, A.N.Tavkhelidze. Phys.Lett., 29B, 191 (1969).

I2. В.Р. Гарсеванишвили, В.А. Матвеев, Л.А. Слепченко. ЭЧАЯ, I, 9I (I970).

I3. В.Р. Гарсеванишвили, С.В. Голоскоков, В.А. Матвеев, Л.А. Слепченко, А.Н. Тавхелидзе. ТМФ, 6, 36 (I97I).

I4. С.П. Кулешов, В.А. Матвеев, А.Н. Сисакян, М.А. Смо ОИЯИ, Е2-5833, Дубна (1971).

I5. Е.С. Фрадкин. ДАН СССР, I00, 897 (I955).

I6. В.Н. Первушин. ОИЯИ, Р2-5990, Е2-5938, Дубна, I97I.

I7. В.Р. Гарсеванишвили, В.Г. Кадышевский, Р.М. Мир-Кас Н.Б. Скачков, ТМФ, 7, 203 (I97I).

Рукопись поступила в издательский отдел
24 ноября I97I года.