ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р2 - 6129

В.А. Алебастров, Г.В. Ефимов, Ш.З. Сельцер

НЕЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ С W-БОЗОНОМ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1971

P2 - 6129

В.А.Алебастров, Г.В.Ефимов, Ш.З.Сельцер

НЕЛОКАЛЬНАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ С W -БОЗОНОМ

Направлено в ***Annals of Physics***

Алебастров В.А., Ефимов Г.В., Сельцер Ш.З. Р2-6129

Нелокальная теория электромагнитных и слабых взаимодействий с W-бозоном

В рамках нелокальной теории рассмотрено электромагнитное и слабое взаимодействие лептонов и заряженных векторных W -бозонов. Предполагается, что фотонное и нейтринные поля связаны нелокально с заряженными локальными полями электрона, мюона и W-бозона. Вводится регуляризация, в рамках которой S-матрица ковариантна, унитарна, макропричинна и градиентно инвариантна в каждом порядке теории возмущений. S -матрица конечна без каких-либо бесконечных перенормировок.

Препринт Объединенного института ядерных исследований. Дубна, 1971

Alebastrov V.A., Efimov G.V., Seltser Sh.Zh. P2-6129

Non-Local Theory of the Electromagnetic and Weak Interactions with W-Bosons

The perturbation theory of the electromagnetic and weak interactions is considered in the framework of non-local theory. A hypothesis is proposed that the photon and neutrino fields are connected with the charged local fields of the electrons, muons and W-bosons in the non-local way.

The definite intermediate regularization procedure is introduced that the S-matrix is finite, unitary, causal, gauge invariant in perturbation theory when regularization is moved off. The interaction Lagrangian contains no infinite counter terms and the S-matrix is finite without any infinite renormalizations.

Preprint. Joint Institute for Nuclear Research. Dubna, 1971

§1. Введение

В настоящее время существуют две модели слабых взаимодействий: универсальное - 4-фермионное взаимодействие и взаимодействие с промежуточным векторным бозоном. С точки зрения методов теории возмущений обе эти модели являются неренормируемыми, что существенно затрудняет изучение слабых процессов в высших порядках по константе связи в рамках локальной теории.

Исследование структуры S -матрицы в теории возмущений [1-4] наводит на мысль, что для последовательного построения теории неренормируемых взаимодействий с самого начала необходимо привлекать методы нелокальной теории поля. Действительно, в теории универсального четырехфермионного слабого взаимодействия и в квантовой электродинамике было показано [2,3], что в рамках нелокальной теории (см. [4]) возможно построить S -матрицу, которая ковариантна, унитарна, макропричинна, градиентно-инвариантна и конечна в каждом порядке теории возмущений.

Один из основных физических постулатов нелокальной теории состоит в следующем:

"Все нейтральные поля взаимодействуют с заряженными нелокальным образом".

Введение таким способом нелокальности в теорию приводит эффективно к тому, что при построении коэффициентных функций S-матрицы в ряду теории возмущений изменяются пропагаторы нейтральных полей. Например, для фотона

$$\frac{1}{-k^2 - i\epsilon} \longrightarrow \frac{V(-\ell^2 k^2)}{-k^2 - i\epsilon}. \tag{1.1}$$

Здесь $V(-\ell^2 k^2)$ – формфактор; параметр ℓ имеет смысл элементарной длины.

Отметим, что появление формфактора в пропагаторах нейтральных частиц, с одной стороны, дает возможность построения конечной теории, с другой стороны, означает явное введение функционального произвола в определение S-матрицы.

В оправдание этого можно сказать следующее. Известно /1/, что неперенормируемую теорию можно сделать конечной, должным образом определяя T-произведение. Однако такое определение нельзя связать с изменением конечного числа констант, как это было в случае перенормируемой теории. Поэтому определение T-произведения неоднозначно, что приводит к появлению бесконечного числа произвольных констант, величина которых ничем не ограничена, и нет никаких идей для их определения. Это, по сути дела, означает существование функционального произвола при построении S-матрицы в случае неперенормируемых взаимодействий.

В нелокальной теории задание формфактора полностью определяет конечную S-матрицу, и весь функциональный произвол сосредоточен в выборе формфактора, который имеет прозрачный физический смысл. Именно, в случае (1.1) введение формфактора означает изменение закона Кулона на расстояниях порядка ℓ (см. подробнее[3]).

Другим неопределенным параметром теории является "элементарная" длина ℓ. В настоящее время мало что можно сказать о величине ℓ.

Если взаимодействие действительно нелокально, то ℓ – должна быть некоторой новой универсальной константой, величина которой будет определена из опыта.

Если же нелокальность появляется как внутреннее свойство теории (например, нелокальный формфактор фотона может возникнуть в результате некоторого частичного суммирования ряда теории возмущений для фотонной функции Грина[5]), из соображений размерности следует ожидать, что величина ℓ будет определяться как

$$\ell \sim \frac{1}{m} f(a),$$

где $a = \dfrac{e^2}{4\pi}$, m – характерная масса (в электродинамике m – масса электрона), $f(a)$ – некоторая неаналитическая по a функция, например, $e^{-\frac{1}{a}}$; $\dfrac{1}{a}$ и т.д.

Исходя из вышесказанного, мы считаем, что введение нелокальности при построении теории неренормируемых взаимодействий является естественным и представляет непосредственный физический интерес.

В настоящей работе предлагается вариант нелокальной теории слабых и электромагнитных взаимодействий с участием заряженных векторных бозонов. Строится S-матрица, обладающая в каждом порядке теории возмущений всеми требуемыми свойствами: конечностью, унитарностью, ковариантностью, макропричинностью и градиентной инвариантностью. Доказательство унитарности и макропричинности в этой теории проводится так же, как в квантовой теории скалярного поля (см.[4]).

В качестве составных частей рассматриваемая теория включает нелокальный вариант спинорной электродинамики, ранее построенный в /2/, нелокальную векторную электродинамику и нелокальную теорию слабых лептонных взаимодействий через промежуточный векторный W-бозон.

Электродинамика векторных бозонов рассматривалась в /6,7/, однако предложенные там схемы построения теории нельзя считать завершенными, поскольку не показано, как проводить перенормировку в n-ном порядке теории возмущений (см. /8/). Кроме того, в /7/ электродинамическое поле считается неквантованным.

§2. Лагранжиан системы полей и введение нелокальности в теорию

Исходный лагранжиан, описывающий электромагнитное и слабое взаимодействие лептонов и заряженных векторных бозонов, выберем следующим образом[x/]:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_1(x)\,; \tag{2.1}$$

[x/] Нами принята следующая система обозначений:

$$\hat{p} = p_a \gamma_a = p_0 \gamma_0 - \vec{p}\,\vec{\gamma}\,; \qquad pk = p_0 k_0 - \vec{p}\,\vec{k}\,;$$

$$\Box = -\partial_\mu \partial_\mu = -\partial_0^2 + \vec{\partial}^2\,; \qquad \partial_a = \frac{\partial}{\partial x^a}\,;$$

$$\gamma_a \gamma_\beta + \gamma_\beta \gamma_a = 2 g_{a\beta}\,; \qquad \gamma_5^2 = 1\,;$$

$$g_{a\beta} = 0, \quad a \neq \beta\,; \qquad g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = 1\,;$$

$$O_a = \gamma_a (1 + \gamma_5)\,.$$

$$\mathfrak{L}_0(x) = -\frac{1}{2} : \partial_\beta A_a(x)\, \partial_\beta A_a(x) : - \tag{2.2а}$$

$$-\frac{1}{2} : G_{\mu\nu}(x)\, G^+_{\mu\nu}(x) : + M^2 : W_\mu(x)\, W^+_\mu(x) : + \tag{2.2б}$$

$$+ \sum_a : \bar{\psi}_a(x)\, (i\hat{\partial} - m_a)\, \psi_a(x) : \tag{2.2в}$$

Здесь $A_a(x)$ – электромагнитное поле, $W_\mu(x)$ – заряженное векторное поле с массой M,

$$G_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu W_\nu(x) - \partial_\nu W_\mu(x). \tag{2.3}$$

Суммирование в (2.2) проводится по всем рассматриваемым лептонным полям $(a = e;\ \mu;\ \nu_e;\ \nu_\mu)$.

Выбор свободного лагранжиана заряженного векторного поля в форме (2.2б) автоматически обеспечивает выполнение условия

$$\partial_\mu W^{(-)}_\mu(x) \,|\,\Phi\rangle = 0$$

(где $|\,\Phi\rangle$ – произвольное физическое состояние системы), исключающего из теории свободного векторного поля кванты со спином 0. При этом уравнения поля имеют вид:

$$\partial_\mu G_{\nu\mu}(x) - M^2 W_\nu(x) = 0,$$

$$\partial_\mu G^+_{\nu\mu}(x) - M^2 W^+_\nu(x) = 0,$$

а "причинная" функция Грина подчиняется уравнению

$$(g_{\mu\lambda}\,\Box^{x} + \partial^{x}_{\mu}\,\partial^{x}_{\lambda} - g_{\mu\lambda}\,M^2\,)\,\overline{W_\lambda(x)\,W^{+}_{\nu}}(y) = -i\,g_{\mu\nu}\,\delta^{4}(x-y)$$

(см. подробнее[1,9,10]).

Введем для удобства обозначения лептонных полей в двухкомпонентной форме

$$\ell(x) = \begin{Bmatrix} \ell_1(x) \\ \ell_2(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_e(x) \\ \psi_\mu(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e(x) \\ \mu(x) \end{Bmatrix},$$

$$\nu(x) = \begin{Bmatrix} \nu_1(x) \\ \nu_2(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_{\nu_e}(x) \\ \psi_{\nu_\mu}(x) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \nu_e(x) \\ \nu_\mu(x) \end{Bmatrix}. \tag{2.4}$$

Тогда плотность лагранжиана взаимодействия запишется:

$$\mathfrak{L}_I(x) = \mathfrak{L}_{\ell_{em}}(x) + \mathfrak{L}_{W_{em}}(x) + \mathfrak{L}_w(x) \tag{2.5}$$

$$\mathfrak{L}_{\ell_{em}}(x) = -e : \bar{\ell}(x)\,\hat{\mathfrak{A}}_\mu(x)\,\ell(x) : \tag{2.6}$$

$$\mathfrak{L}_{W_{em}}(x) = ie : \{ W_\mu(x)\,G^{+}_{\mu\nu}(x) - G_{\mu\nu}(x)\,W^{+}_{\mu}(x) \} : \mathfrak{A}_\nu(\ell, x)$$

$$+ e^2 : \{ W_\mu(x) W^{+}_{\nu}(x) - g_{\mu\nu} W_\lambda(x) W^{+}_{\lambda}(x) \} : \mathfrak{A}_\mu(\ell, x)\,\mathfrak{A}_\nu(\ell, x)\,, \tag{2.7}$$

$$\mathfrak{L}_w(x) = f : \{\bar{\ell}(x) O_a\, N(\ell,x) W_a(x) + \bar{N}(\ell,x) O_a\, \ell(x) W_a^+(x)\} : \qquad (2.8)$$

Здесь $e = \sqrt{4\pi a}$

$f^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} G M^2$; G – универсальная константа слабого 4-фермионного взаимодействия ($G = 10^{-5} \frac{1}{m_p^2}$; m_p – масса протона)

$$\mathfrak{A}_\mu(\ell,x) = K_A(\ell_A^2 \Box)\, A_\mu(x) = \int dy\, K_A(x-y)\, A_\mu(y) ;$$

$$N(\ell,x) = K_\nu(\ell_\nu^2 \Box)\, \nu(x) = \int dy\, K_\nu(x-y)\, \nu(y) ; \qquad (2.9)$$

$$K_i(x-y) = K_i(\ell_i^2 \Box)\, \delta^4(x-y) \quad -$$

нелокальная обобщенная функция (подробнее см. /4/), о свойствах которой будет сказано ниже.

Как видно из (2.9), мы предполагаем, что формфакторы $K_A(x)$ и $K_\nu(x)$, а также параметры ℓ_A и ℓ_ν , имеющие смысл элементарных длин, в общем случае различны. В нашем подходе они являются параметрами теории.

Обратим внимание на расстановку нормального упорядочения операторов поля в четырехлинейном члене, описывающем взаимодействие W - бозонов с электромагнитным полем. Электромагнитные поля должны быть выбраны в форме обычного произведения, чтобы физические величины теории не зависели от калибровки пропагатора фотона (см. замечание на стр. 458 в /11/). Выбор произведения операторов поля W -бозонов в нормальной форме может привести к нарушению градиентной инвариантности теории, однако, как будет показано ниже, выбор регуляризационной процедуры снимает эту трудность.

Легко проверить, что лагранжиан системы заряженных полей, взаимодействующих с электромагнитным полем, инвариантен относительно следующей группы калибровочных преобразований:

$$
\begin{aligned}
&A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \\
&\ell(x) \to \ell(x)\, e^{-ieK_A(\ell_A^2\Box)f(x)}; \quad \bar{\ell}(x) \to \bar{\ell}(x)\, e^{ieK_A(\ell_A^2\Box)f(x)}; \\
&W_\mu(x) \to W_\mu(x)\, e^{-ieK_A(\ell_A^2\Box)f(x)}; \quad W_\mu^+(x) \to W_\mu(x)\, e^{ieK_A(\ell_A^2\Box)f(x)}; \\
&\nu(x) \to \nu(x),
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

где $f(x)$ – произвольная функция из пространства функций, на которых определен оператор $K(\ell^2\Box)$ (подробнее см.[4]).

Группа преобразований (2.10) отличается от обычно рассматриваемой калибровочной группы изменением фазы преобразования заряженных полей $\ell(x)$ и $W_\mu(x)$. При градиентных преобразованиях с постоянной фазой $(f = const)$ преобразования (2.10) совпадают с общепринятым, поскольку оператор $K(\ell^2\Box)$ нормирован условием $K(0) = 1$.

Преобразования (2.10) с произвольной функцией $f(x)$ формально гарантируют сохранение электромагнитного тока заряженных полей. Это означает (см.[12]), что спин свободного и взаимодействующего электромагнитного поля равен единице.

Каков физический смысл калибровочного преобразования заряженного поля

$$\phi \rightarrow \phi\, e^{iqK(\ell^2\Box)f(x)}\ ?$$

Константа q определяет заряд поля ϕ, если оператор $K(\ell^2\Box)$ нормирован условием $K(0)=1$. Нелокальный оператор $K(\ell^2\Box)$ характеризует распределение заряда q в x-пространстве (см.[3]).

Заметим, что лагранжиан свободного электромагнитного поля инвариантен относительно преобразования $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$ только при дополнительном условии $\Box f = 0$. Это условие связано с трудностями при квантовании свободного электромагнитного поля (см., например,[1,11]).

§3. S-матрица и теория возмущений

Формально S-матрица записывается в виде:

$$S = T\ \exp\ \{\, i \int d^4x\ \mathcal{L}_I(x)\,\}. \tag{3.1}$$

Для получения теории возмущений необходимо разложить экспоненту в (3.1) в ряд по степеням $\mathcal{L}_I(x)$ и перейти к нормальному произведению операторов поля согласно теореме Вика.

Возникающие при этом хронологические свертки операторов полей в рассматриваемой теории определяются следующим образом. Причинные функции заряженных полей остаются такими же, как в локальной теории

$$S_c^{(ij)}(x-y) = \langle 0|\, T\ \{\ell^{(i)}(x),\ \bar{\ell}^{(j)}(y)\}\,|0\rangle =$$

$$= \frac{\delta_{ij}}{(2\pi)^4 i}\int \frac{d^4p\,(m_i+\hat{p})}{m^2-p^2-i\epsilon}\, e^{-ip(x-y)}\ ; \tag{3.2}$$

$$\Delta^{(1)}_{\alpha\beta}(x-y) = \langle 0 | T \{ W_\alpha(x), W^+_\beta(y) \} | 0 \rangle =$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^4 i} \int d^4p \, \frac{g_{\alpha\beta} - \frac{p_\alpha p_\beta}{M^2}}{M^2 - p^2 - i\epsilon} e^{-ip(x-y)}; \tag{3.3}$$

$$\Delta^{(2)}_{\mu\nu;\alpha}(x-y) = \langle 0 | T \{ G_{\mu\nu}(x), W^+_\alpha(y) \} | 0 \rangle =$$

$$= \frac{+1}{(2\pi)^4} \int d^4p \, \frac{p_\mu g_{\nu\alpha} - p_\nu g_{\mu\alpha}}{M^2 - p^2 - i\epsilon} e^{-ip(x-y)}; \tag{3.4}$$

$$\Delta^{(2+)}_{\alpha;\mu\nu}(x-y) = \langle 0 | T \{ W_\alpha(x), G^+_{\mu\nu}(y) \} | 0 \rangle =$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^4} \int d^4p \, \frac{p_\mu g_{\nu\alpha} - p_\nu g_{\mu\alpha}}{M^2 - p^2 - i\epsilon} e^{-ip(x-y)}; \tag{3.5}$$

$$\Delta^{(3)}_{\mu\nu;\alpha\beta}(x-y) = \langle 0 | T \{ G_{\mu\nu}(x) G^+_{\alpha\beta}(y) \} | 0 \rangle =$$

$$= \frac{-1}{(2\pi)^4 i} \int d\,p \, \frac{p_\mu p_\alpha g_{\nu\beta} + p_\nu p_\beta g_{\mu\alpha} - p_\mu p_\beta g_{\alpha\nu} - p_\nu p_\alpha g_{\mu\beta}}{M^2 - p^2 - i\epsilon} e^{-ip(x-y)}. \tag{3.6}$$

Причинные функции нейтральных полей (нейтрино и фотон) принимают вид:

$$S^{\nu}_{c}(x-y) = \langle 0 | T \{ N(\ell_{\nu}, x), \bar{N}(\ell_{\nu}, y) \} | 0 \rangle =$$

$$K_{\nu}(\ell^2_{\nu}\Box^{x}) K(\ell^2_{\nu}\Box^{y}) \langle 0 | T \{ \nu(x) \bar{\nu}(y) \} | 0 \rangle = \tag{3.7}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4p \frac{[K_{\nu}(\ell^2_{\nu} p^2)]^2}{-\hat{p} - i\epsilon} e^{-ip(x-y)};$$

$$D_{\alpha\beta}(x-y) = \langle 0 | T \{ \mathfrak{A}(\ell_A, x), \mathfrak{A}(\ell_A, y) \} | 0 \rangle =$$

$$K_A(\ell^2_A\Box^{x}) K_A(\ell^2_A\Box^{y}) \langle 0 | T \{ A_{\alpha}(x) A_{\beta}(y) \} | 0 \rangle = \tag{3.8}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4p \frac{[K_A(\ell^2_A p^2)]^2}{-p^2 - i\epsilon} e^{-ip(x-y)}.$$

Такой выбор свёртки операторов поля соответствует T -произведению в форме Вика или операции T^* /1,13/. В соответствии с результатами /2-4/ будем предполагать, что формфакторы $V_i(-\ell^2_i p^2) = [K_i(\ell_i p^2)]^2$ удовлетворяют следующим условиям:

(1) $V(z)$ – целая функция порядка роста $\frac{1}{2} \le \rho < 1$;

(2) $[V(z)]^* = V(z^*)$; (3.9)

(3) $V(x) > 0$ при вещественных x;

(4) $V(0) = 1$

(5) $\int_0^{\infty} du\ u^2 V(u) < \infty$.

При расчётах удобно пользоваться представлением формфактора /2/:

$$V(z) = \frac{1}{2i}\int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} d\zeta \, \frac{u(\zeta)}{\operatorname{Sin}\pi\zeta \;\Gamma^2(1+\zeta)} \left(\frac{z}{4}\right)^{\zeta}, \tag{3.10}$$

где $2 < \beta < 3$ и

$$u(\zeta) = -2^{2\zeta} \frac{\Gamma(1+\zeta)\zeta}{\Gamma(1-\zeta)} \int_0^\infty \frac{dt\, V(t)}{t^{1+\zeta}}. \tag{3.11}$$

Из (3.9) и (3.11) следует:

(1) $u(\zeta)$ – регулярна в полуплоскости $Re\,\zeta > -2$, кроме полюса первого порядка в точке $\zeta = -1$;

(2) $u(\zeta) = O\{\Gamma(\frac{\zeta}{\gamma})\}$, при $\zeta \to +\infty$, где $\gamma = \frac{\rho}{2\rho - 1} > 1$;

(3) $u(0) = 1$:

(4) $Im\, u(x) = 0$ при $-3 < x < \infty$.

Таким образом, мы получаем обычный ряд теории возмущений с единственным отличием, что причинные функции фотонного и нейтринного полей заменяются на функции (3.7) и (3.8).

Обсудим теперь формальное определение S-матрицы (3.1). Следует заметить, что в локальной и тем более нелокальной квантовой теории поля T-произведение, по существу, не означает операцию строгого упорядочения операторов поля по времени, поскольку в ряду теории возмущений присутствуют ультрафиолетовые расходимости.

Символически схема построения конечной S-матрицы по теории возмущений может быть представлена в виде:

$$S = \lim_{\Lambda\to\infty} T_\Lambda \exp\{ i \int d^4x\, \mathcal{L}_I(x,\Lambda)\}. \tag{3.12}$$

Здесь введены следующие обозначения. Символ T_Λ обозначает хронологическое упорядочение операторов поля плюс некоторую регуляризационную процедуру (обычно это регуляризационная процедура Паули–Вилларса с различными возможными модификациями), которая делает конечными все матричные элементы ряда теории возмущений.

Λ – параметр регуляризации, при стремлении которого к бесконечности возникают бессмысленные расходящиеся выражения. Для компенсации получающихся расходящихся выражений в лагранжиан взаимодействия $\mathfrak{L}_I$ вводится некоторое число контрчленов, зависящих от Λ как от параметра. Операторная структура контрчленов и их явная зависимость от Λ подбираются таким образом, чтобы полностью компенсировать все возникающие при вычислении амплитуд расходящиеся при $\Lambda \to \infty$ выражения. Таким образом, предел в (3.12) существует.

Что является неудовлетворительным при таком построении S -матрицы? Нефизический параметр Λ фигурирует как в определении регуляризационной процедуры $T\Lambda$, так и в задании лагранжиана взаимодействия $\mathfrak{L}_I(x, \Lambda)$. Это делает физически бессмысленным лагранжиан взаимодействия, поскольку параметр Λ никакого физического смысла не имеет. Получается, что лагранжиан взаимодействующих полей, который определяет физику процесса, так зависит от математического аппарата, с помощью которого вычисляются матричные элементы S -матрицы, что теряет свой первоначальный физический смысл. Поэтому $\mathfrak{L}_I(x, \Lambda)$ следует рассматривать как некоторый искусственный объект, выбранный таким образом, чтобы обеспечить существование предела в (3.12). В рамках этой процедуры физический смысл имеет только S -матрица (см., например, /1/).

Поэтому, как нам кажется, было бы целесообразно так подобрать регуляризационную процедуру, зависящую от параметра Λ, чтобы никаких бессмысленных контрчленов не появлялось в лагранжиане взаимодействия. Следовательно, должно быть

$$S = \lim_{\Lambda \to \infty} T_\Lambda \exp \{ i \int d^4x \; \mathcal{L}_I(x) \} , \tag{3.13}$$

где $\mathcal{L}_I(x)$ не зависит от параметра регуляризации Λ. Эта идея впервые была высказана Д.А. Славновым /14/, который исследовал квантовую теорию самодействующего скалярного поля, и в духе этой идеи построена нелокальная квантовая электродинамика /3/.

Точно таким же образом мы поступим и в рассматриваемом нами случае. Именно, мы так сформулируем вспомогательную регуляризационную процедуру, чтобы предел в (3.13) существовал, и S -матрица удовлетворяла всем необходимым требованиям в каждом порядке теории возмущений.

При этом лагранжиан взаимодействия $\mathcal{L}_I(x)$ остается конечным. Если же в теории надо будет сделать какие-либо перенормировки, то такие перенормировки будут означать не процедуру устранения расходимостей, а переход от одних менее удобных к другим более удобным физическим параметрам. Все перенормировочные постоянные будут конечны.

§4. Регуляризационная процедура

Итак, как было сказано выше, построение S -матрицы по теории возмущений возможно лишь в рамках определенного математического аппарата. Сформулируем теперь регуляризационную процедуру, которой мы будем пользоваться при вычислении матричных элементов в теории возмущений.

Нелокальные пропагаторы нейтрино и фотона регуляризуются при помощи функции R^δ (подробнее см. /2-4/)

$$reg\, S_c^{\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4 i} \int d^4k \, \frac{V_\nu(-\ell_\nu^2 k^2) R^\delta(k^2)}{-\hat{k} - i\epsilon} e^{-ikx} ;$$

$$reg\, D_{\alpha\beta}(x) = \frac{-g_{\alpha\beta}}{(2\pi)^4 i} \int d^4k \, \frac{V_A(-\ell_A^2 k^2) R^\delta(k^2)}{-k^2 - i\epsilon} e^{-ikx} . \tag{4.1}$$

Здесь

$$R^\delta(z) = \exp\left\{ -\delta (z + i\mu^2)^{-\frac{1}{2}+\nu} e^{-i\pi\sigma} \right\} , \tag{4.2}$$

где $0 < \nu < \sigma < \frac{1}{2}$; μ^2 – некоторый параметр размерности квадрата массы. Введение такой регуляризационной функции обеспечивает переход в амплитудах физических процессов к интегрированию по евклидову пространству, после чего можно осуществить предельный переход $\delta \to 0$, так как благодаря достаточно быстрому убыванию формфакторов $V_i(-\ell_i^2 k^2)$ при $k^2 \to -\infty$ интегралы, содержащие пропагаторы нейтрино и фотона, будут сходиться.

Интегралы, соответствующие циклическим диаграммам Фейнмана, составленным только из пропагаторов заряженных полей лептонов и векторных бозонов, будем регуляризовать с помощью частично видоизмененной циклической регуляризации Паули-Вилларса (см., например, /1/).

Пусть функция

$$e^a f^b \pi(m_e ; m_\mu ; M ; x_1 - x_2 ; x_2 - x_3 \ldots x_n - x_1) \tag{4.3}$$

описывает цикл, составленный из пропагаторов заряженных лептонов и векторных бозонов. Целые числа a и b описывают порядок теории возмущений рассматриваемого цикла по константам e и f соответственно. Введем теперь числа θ_ℓ и θ_W, которые равны 1 или 0 в зависимости от того, имеется или нет в цикле хоть один пропагатор соответственно заряженного лептона или векторного бозона. Определим число

$$d = a\,\theta_\ell (1 - \theta_W) + \lambda(a)\,\theta_W \qquad (4.4)$$

$$\lambda(a) = \begin{cases} 0, & a - \text{чётное} \\ 1, & a - \text{нечётное} \end{cases}$$

Число d равно числу внешних фотонных линий, если цикл представляет собой чисто спинорное электродинамическое взаимодействие, и $d = \lambda(a)$ во всех остальных случаях.

Тогда вместо выражения (4.3) будем рассматривать функцию

$$reg\ \pi = \sum_{j=0}^{8} C_j\, e^a\, f^b\, \Lambda_j^{a+b-d} \times \qquad (4.5)$$

$$\times\, \pi\, (m_e \Lambda_j;\ m_\mu \Lambda_j;\ M \Lambda_j;\ x_1 - x_2;\ x_2 - x_3;\ \ldots\, x_n - x_1).$$

Здесь берется сумма циклов, полученных из исходного цикла (4.3) согласно следующим заменам:

$$\begin{aligned} m_e &\to m_e \Lambda_j\ ; \\ m_\mu &\to m_\mu \Lambda_j\ ; \\ M &\to M \Lambda_j\ ; \\ f &\to f \Lambda_j\ ; \\ e &\to e \Lambda_j\ . \end{aligned} \qquad (4.6)$$

Кроме того, имеется дополнительный множитель Λ_j^{-d} . $\Lambda_0 = 1$, $\Lambda_j\ (j = 1,2...)$– большие безразмерные параметры регуляризации, мы их выберем в виде:

$$\Lambda_j = \Lambda + \epsilon_j \qquad (j = 1,2,\ldots) ,$$

где $\epsilon_j \ll 1$, а $\Lambda \gg 1$.

Коэффициенты $C_0 = 1$, $C_j\ (j = 1\ldots 10)$ удовлетворяют системе уравнений:

$$\sum_{j=0}^{8} C_j \Lambda_j^k = 0 \ ; \qquad (k = 0,1,2,3,4) , \tag{4.7}$$

$$\sum_{j=0}^{8} C_j \Lambda_j^m \log \Lambda_j = 0 \quad (m = 0,\ 2,\ 4) . \tag{4.8}$$

Первые уравнения (4.7) обеспечивают сходимость интегралов от регуляризованной функции (4.5). Уравнения (4.8) являются условиями, при которых в пределе $\Lambda \to \infty$ не возникает никаких бессмысленных расходящихся выражений.

Вообще говоря, вместо уравнений (4.8) можно было бы потребовать

$$\sum_{j=0}^{8} C_j \Lambda_j^m \log \Lambda_j = a_m ,$$

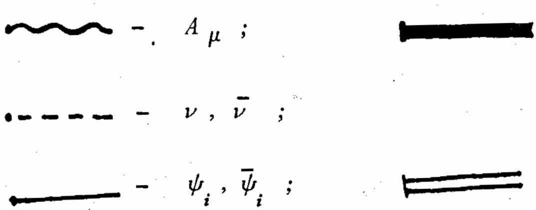
где a_m – произвольные постоянные. Однако условия $a_m = 0$, как будет видно ниже, связываются с вполне разумными физическими требованиями.

В рамках этой регуляризации интегралы от любых замкнутых циклов сходятся, и существует конечный предел при $\Lambda \to \infty$.

§5. Условия сходимости произвольного графа Фейнмана

Прежде чем приступить к исследованию сходимости фейнмановских интегралов, проведем удобную для дальнейшего рассмотрения классификацию графов в нашем случае.

Введем условные обозначения для графического описания членов матрицы рассеяния. Операторам свободных полей сопоставим линии:

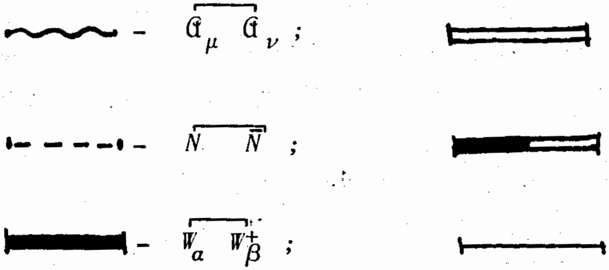


– A_μ ; – W_a ; W_a^+ ;

– ν , $\bar{\nu}$;

– ψ_i , $\bar{\psi}_i$; – $G_{\alpha\beta}$; $G^+_{\alpha\beta}$,

спариванию операторов полей – линии:



– $\overline{\mathfrak{A}_\mu \; \mathfrak{A}_\nu}$; – $\overline{G_{\alpha\beta} \; G_{\mu\nu}}$;

– $\overline{N \; \bar{N}}$; – $\overline{W_a \; G^+_{\mu\nu}}$;

– $\overline{W_a \; W^+_\beta}$; – $\overline{\psi_i \; \bar{\psi}_j}$.

Тогда, присутствующие в $\mathfrak{L}_I$ вершины изображаются следующим образом:

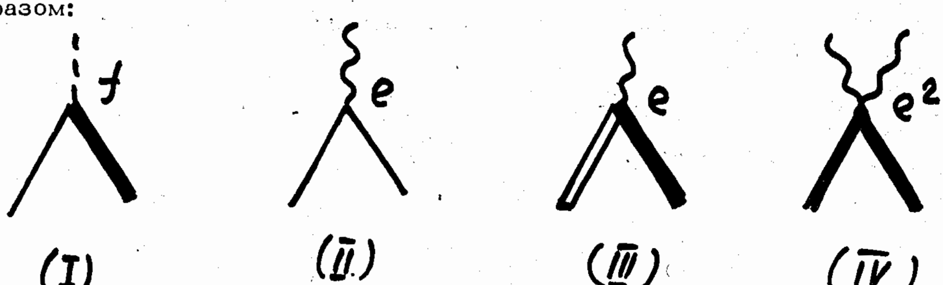


Рис. 1.

Здесь (I) – слабая вершина ω_I ; (II) – электромагнитная спинорная вершина – ω_{II} ; (III) – электромагнитная векторная – ω_{III} ; (IV) – электромагнитная векторная ω_{IV}.

Любой связный граф теории возмущений представляется совокупностью разомкнутых линий и циклов, образованных спариваниями заряженных полей, соединяющихся между собой линиями нейтральных полей. Пример одного из возможных графов приведен на рис. 2.

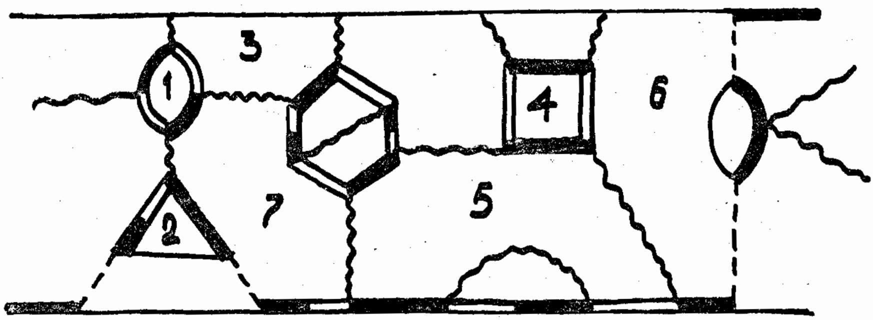


Рис. 2.

Ясно, что при достаточно быстром убывании формфактора в евклидовой области все интегрирования, связанные с циклами, включающими хотя бы одну нейтральную[x/] линию, сходятся (циклы 3,5,6 и т.д. на рис.2). Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением заряженных циклов (циклы 1,2,4 и т.д.).

Произвольный заряженный цикл можно характеризовать следующими числами:

[x/] Для краткости пунктирные и волнистые линии, соответствующие фотону и нейтрино, будем называть нейтральными, а все остальные – заряженными.

1) N_1 - число внешних фотонных линий,

$2N_2$ - число внешних нейтринных линий,

2) n_j - число вершин ω_j $(j = I, II, III, IV)$

3) s_i - число пропагаторов $\Delta^{(i)}$ $(i = 1,2,3)$

t - число пропагаторов S_c .

Между этими числами существуют соотношения:

$$\begin{aligned}
N_1 &= n_{II} + n_{III} + 2n_{IV} ;\\
2N_2 &= n_I ;\\
s_2 + 2s_3 &= n_{III} ;\\
2s_1 + s_2 &= n_I + n_{III} + 2n_{IV} ;\\
2t &= n_I + 2n_{II} .
\end{aligned} \tag{5.1}$$

Пример одного из возможных циклов изображен на рис. 3.

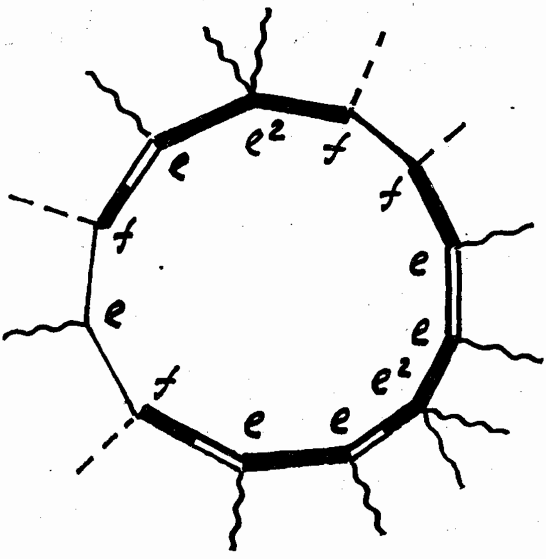


Рис. 3.

Максимальный индекс цикла ω (см. /1/) равен

$$\omega(\pi_{n_I, n_{II}, n_{III}, n_{IV}}) = 4 - \frac{n_I}{2} - n_{II} - \lambda(n_{III}) =$$
$$= 4 - N_2 - n_I - s_2 = 4 - t - s_2 ,$$

т.е. интегралы, соответствующие любым заряженным циклам, расходятся не быстрее четвертой степени по импульсу[x/].

Покажем теперь, что выбранная нами регуляризация обеспечивает существование конечного предела при $\Lambda \to \infty$ для произвольного заряженного цикла. Опуская векторные индексы, несущественные для изучения сходимости, амплитуду, соответствующую циклу, можно записать в форме:

$$reg\, \tilde{\pi}(n_I; n_{II}; n_{III}; n_{IV}; p_1; p_2, \ldots, p_e) =$$

$$= e^{n_{II}+n_{III}+2n_{IV}} f^{n_I} \int d^4k \sum_{j=0}^{8} C_j \Lambda_j^{n_I+n_{II}+n_{III}+2n_{IV}-d} \times$$

$$\times \prod_{i_1=1}^{s_1} \tilde{\Delta}^{(1)}(M_j; k-p_{i_1}) \prod_{i_2=1}^{s_2} \tilde{\Delta}^{(2)}(M_j; k-p_{i_2}) \times \tag{5.2}$$

$$\times \prod_{i_3=1}^{s_3} \tilde{\Delta}^{(3)}(M_j; k-p_{i_3}) \prod_{i_4=1}^{t} \tilde{S}_c(m_j; k-p_{i_4}) .$$

Учитывая соотношения (5.1) и объединяя $\Lambda_j^{2s_1}$ с $\prod_{i_1=1}^{s_1} \tilde{\Delta}^{(1)}(M_j; k-p_{i_1})$, получим:

---

x/ Поэтому теория заряженного векторного поля во внешнем электромагнитном поле относится к классу ренормируемых /7/.

$$\operatorname{reg} \tilde{\pi} (n_I ; n_{II} ; n_{III} ; n_{IV} ; p_1 \dots p_e) =$$

$$= e^{N_1} f^{2N_2} \int d^4k \sum_{j=0}^{8} C_j \Lambda_j^{s_2+t-N_2-d} \times$$

$$\times \prod_{i_1=1}^{s_1} \frac{\Lambda_j^2 - \frac{(k-p_{i_1})(k-p_{i_1})}{M^2}}{M^2\Lambda_j^2 - (k-p_{i_1})^2} \prod_{i_2=1}^{s_2} \frac{k - p_{i_2}}{M^2\Lambda_j^2 - (k-p_{i_2})^2} \times \tag{5.3}$$

$$\times \prod_{i_3=1}^{s_3} \frac{(k-p_{i_3})(k-p_{i_3})}{M^2\Lambda_j^2 - (k-p_{i_3})^2} \prod_{i_4=1}^{t} \frac{m\Lambda_j + \hat{k} - \hat{p}_{i_4}}{m^2\Lambda_j^2 - (k-p_{i_4})^2} .$$

При больших k подинтегральное выражение в (5.3) представимо в виде:

$$\sum_{j=0}^{8} C_j \Lambda_j^{s_2+t-N_2-d} \left\{ \frac{A_1}{k_E^{s_2+t}} + \frac{\Lambda_j A_2}{k_E^{s_2+t+1}} + \dots \right\} , \tag{5.4}$$

где k_E – длина евклидова 4-вектора; A_1 , A_2 ,... – некоторые коэффициенты. Из (5.4) следует, что интеграл (5.3) расходится при больших k , если

$$s_2 + t = 0, 1, 2, 3, 4 .$$

Однако коэффициенты при этих членах тождественно равны нулю в силу (4.8).

Действительно, в случае циклов, состоящих только из заряженных лептонов, имеем $t = N_1$, $N_2 = 0$ и, следовательно,

$$s_2 + t - d = 0 .$$

Значит, регуляризация наша совпадает с обычной циклической регуляризацией Паули-Вилларса /1/. Для сходимости интеграла достаточно выполнения первых двух условий в (4.8), так как (5.4) принимает вид:

$$\sum_{j=0}^{8} C_j \left\{ \frac{A_1}{k_E^{N_1}} + \frac{\Lambda_j A_2}{k_E^{N_1+1}} + \ldots \right\} .$$

В этом случае мы имеем уже рассмотренный в /2/ вариант нелокальной квантовой электродинамики.

Во всех остальных случаях $d=\lambda(N_1)$ и для сходимости интеграла (5.4) необходимо, чтобы выполнялись условия:

$$\sum_{j=0}^{8} C_j \Lambda_j^{s_2 + t - N_2 - \lambda(N_1)} = 0 \qquad (5.5)$$

для всех $s_2 + t = 0, 1, 2, 3, 4$. Но (5.5) эквивалентно (4.7), поскольку всегда $t \geq N_2$.

Из (5.5) и (5.4) следует, что добавление в заряженный цикл внешних нейтринных линий понижает степень расходимости.

Покажем теперь, что в случае векторной электродинамики интеграл (5.3) определяет функцию, растущую как четвертая степень любого внешнего импульса. Наличие внешних линий нейтрино снижает степень роста. Для этого перейдем в интеграле (5.3) к a -представлению Фейнмана, и, как обычно, избавимся в знаменателе от членов, линейно зависящих от импульса интегрирования. Заметим, что пропагаторы фермионного поля входят в цикл только в комбинациях

$$\tilde{\Sigma}_t(p_1\ldots p_t) = 0_\alpha \prod_{j=0}^{t-1} \frac{m+\hat{p}_j}{m^2-p_j^2}\gamma_{\mu_j}\frac{m+\hat{p}_t}{m^2-p_t^2}0\beta ,$$

что соответствует диаграмме

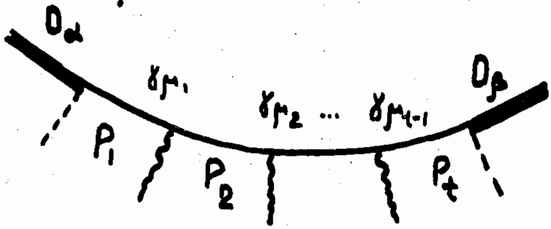


Рис. 4.

Поскольку $0_\alpha\, \gamma_1 \cdots \gamma_n 0\beta = 0$ при чётном n, справедливо равенство

$$\tilde{\Sigma}_t(-p_1\ldots -p_t) = (-)^t\tilde{\Sigma}_t(p_1\ldots p_t) .$$

С учётом этого числитель в (5.3) представляется в виде

$$\sum_{i=0}^{[\frac{t}{2}]}\sum_{n=0}^{s_1}\sum_{u=0}^{[\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}s_2+s_3+s_1-i-n]} B_{inu}\, m^{2i} M^{2n}(p_k\, p_m)^{u+\frac{1}{2}\lambda(s_2+t)} \times$$

$$\times \Lambda_j^{2(n+i)}(k^2)^{\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}s_2+s_1+s_3-i-n-u-\frac{1}{2}\lambda(s_2+t)} .$$

Здесь

$[x]$– целая часть числа x

B_{inu} – коэффициенты, зависящие от α –параметров Фейнмана

$$\lambda(s_2+t) = \begin{cases} 0 & \text{если } (s_2+t) - \text{чётное число,} \\ 1 & \text{если } (s_2+t) - \text{нечётно.} \end{cases}$$

Как следует из (5.1), чётность числа $(s_2 + t)$ совпадает с чётностью $(N_1 + N_2)$. Исследуемый нами интеграл (5.3) разбивается на сумму интегралов вида

$$I = \int d^4k \sum_{j=0}^{8} C_j \Lambda_j^{s_2 + t - N_2 + 2r - \lambda(N_1)} \times$$

$$\times \frac{(k^2)^{\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}s_2 + s_1 + s_3 - r - u - \frac{1}{2}\lambda(s_2 + t)}}{[m\Lambda_j^2 + \Re(p_k p_m) - k^2]^{s_1 + s_2 + s_3 + t}}, \tag{5.6}$$

где $r = i + n$; $m = \sum_i a_i M^2 + \sum_j a_j m^2$; $\Re(p_k p_m)$ – квадратичная форма по внешним импульсам. В свою очередь, (5.6) интегрированием по частям с учётом (4.7) сводится к сумме интегралов

$$I_u = \int d^4k \sum_{j=0}^{8} C_j \Lambda_j^{2s_1 + 2s_2 + 2s_3 + 2t - 2u - N_2 - \lambda(s_2 + t) - \lambda(N_1)} \times$$

$$\times \frac{1}{[m\Lambda_j^2 + \Re(p_m p_e) - k^2]^{s_1 + s_2 + s_3 + t}}. \tag{5.7}$$

Выполняя интегрирование в (5.7), получим:

$$I_u = const \sum_{j=0}^{8} C_j \Lambda_j^{2(s_1+s_2+s_3+t)-N_2-2u-\lambda(s_2+t)-\lambda(N_1)}$$

$$\times \frac{1}{[m\Lambda_j^2 + \Re(p_m p_e)]^{s_1+s_2+s_3+t-2}} =$$

$$= const \sum_{j=0}^{8} C_j \frac{\Lambda_j^{4-N_2-2u-\lambda(s_2+t)-\lambda(N_1)}}{[m + \frac{1}{\Lambda_j^2}\Re(p_e p_m)]^{s_1+s_2+s_3+t-2}}; \tag{5.8}$$

при

$$s_1 + s_2 + s_3 + t > 2$$

и

$$I_u = const \sum_{j=0}^{8} C_j \Lambda_j^{4-N_2-2u-\lambda(N_1+N_2)-\lambda(N_1)} \log(\Lambda_j^2 + \frac{\Re(p_e p_m)}{m}) =$$

$$= const \{ \sum_{j=0}^{8} C_j \Lambda_j^{4-N_2-2u-\lambda(N_1+N_2)-\lambda(N_1)} \log \Lambda_j^2 \tag{5.9}$$

$$+ \sum_{j=0}^{8} C_j \Lambda_j^{4-N_2-2u-\lambda(N_1+N_2)-\lambda(N_1)} \log(1 + \frac{\Re(p_e p_m)}{\Lambda_j^2 m}) \}$$

при $s_1 + s_2 + s_3 + t \leq 2$.

Легко убедиться, что в (5.9) всегда $0 \leq 4 - N_2 - 2u - \lambda(N_1+N_2) - \lambda(N_1) \leq 4$.

Итак, мы получили, что после выполнения интегрирования в (5.4) результат зависит от членов $a_m = \sum_{j=0}^{8} C_j \Lambda_j^m \log \Lambda_j$; $(m = 0, 2, 4)$, которые при обычной регуляризации Паули-Вилларса растут при $\Lambda \to \infty$ как Λ^m. Это приводит к необходимости введения в $\mathfrak{L}_I$ соответствующих контрчленов для того, чтобы обеспечить существование предела при $\Lambda \to \infty$, о чем говорилось выше. В нашем случае эти члены равны нулю в силу уравнений (4.8).

Переходя в (5.8) и (5.9) к пределу $\Lambda \to \infty$, получим окончательно:

$$I_u = const \left\{ \left(\frac{1}{m + \Re(p_e p_m)} \right)^{s_1+s_2+s_3+t-2} + \right.$$

$$+ \frac{1}{m^{s_1+s_2+s_3+t-2}} \sum_{k=0}^{L} (-)^{1+k} \frac{(s_1+s_2+s_3+t-3+k)!}{(s_1+s_2+s_3+t-3)!\,k!} \times \tag{5.10}$$

$$\left. \times \left(\frac{\Re(p_e p_m)}{m} \right)^k \right\} ;$$

при $s_1 + s_2 + s_3 + t > 2$

$$I_u = const \left\{ \log \left(\frac{m + \Re(p_e p_m)}{m} \right) + \right.$$

$$(5.11)$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{L} (-)^k \frac{1}{k!} \left(\frac{\Re(p_e p_m)}{m} \right)^k \right\}$$

при

$$s_1 + s_2 + s_3 + t \leq 2 \quad , \quad L = \left[\frac{1}{2} \{ 4 - N_2 - 2u - \lambda(N_1 + N_2) - \lambda(N_1) \} \right],$$

где $[\ x\ ]$ – целая часть x .

Сумма по k в (5.10) появляется, если $L \geq 0$.

Из (5.10) и (5.11) видно, что максимальная степень роста цикла по внешним импульсам зависит от N_2 (числа внешних нейтринных линий) и определяется следующим образом:

$$\tilde{\pi}(p_1; p_2 \dots p_e) \sim \{ \Re(p_e p_m) \}^{\left[\frac{4 - N_2 - \lambda(N_1)}{2} \right]} \qquad (5.12)$$

при $N_2 = 0, 1, 2, 3, 4$. Во всех остальных случаях интеграл (5.3) определяет убывающую с ростом внешних импульсов функцию.

Принимая во внимание (5.12), легко убедиться, что условие (3.9(5)) на формфактор обеспечивает сходимость любых диаграмм теории возмущений.

§6. Градиентная инвариантность S -матрицы

Требование градиентной инвариантности S -матрицы, т.е. инвариантности относительно преобразования

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu f(x) \tag{6.1}$$

с произвольной функцией $f(x)$ может быть записано в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x_{1\mu_1}} \cdots \frac{\partial}{\partial x_{n\mu_n}} \left(\frac{\delta^n S}{\delta A_{\mu_1}(x_1) \ldots \delta A_{\mu_n}(x_n)} \right) = 0 \tag{6.2}$$

при условии, что все остальные операторы рассматриваемых полей подчиняются свободным уравнениям движения.

Для доказательства (6.2) достаточно ограничиться рассмотрением случая с $n = 1$, т.е.

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(\frac{\delta S}{\delta A_\mu(x)} \right) = 0 . \tag{6.3}$$

Прежде всего проведем формальное доказательство, основываясь только на представлении

$$S = T \exp \{ i \int d^4x \; \mathcal{L}_I(x) \} . \tag{6.4}$$

Мы будем предполагать, что представление (6.4) обеспечивает построение ряда теории возмущений с причинными функциями (3.2-8), и S -матрица разлагается в ряд по нормальным произведениям полевых операторов, подчиняющихся свободным уравнениям движения. Мы не будем учитывать введенную нами регуляризацию, но затем покажем, что изложенное доказательство справедливо в рамках наших регуляризаций.

Воспользовавшись представлением (6.4), получим:

$$\frac{\delta S}{\delta A_\nu(x)} = iT\left\{\left(\frac{\delta}{\delta A_\nu(x)}\int d^4y\ \mathfrak{L}_I(y)\right)S\right\} =$$

$$= T\{-e\left[W_\mu(x)\,G^+_{\mu\nu}(x) - G_{\mu\nu}(x)\,W^+_\mu(x)\right] +$$

$$+ ie^2\left[W_\mu(x)W^+_\nu(x) + W_\nu(x)W^+_\mu(x) - 2g_{\nu\mu}W_\sigma(x)W^+_\sigma(x)\right]\mathfrak{A}_\mu(\ell, x) \tag{6.5}$$

$$- ie\left[\bar{\ell}(x)\gamma_\nu\ell(x)\right])S\}.$$

Воспользуемся далее формулами:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu}T\{G_{\mu\nu}(x)S\} = T\{[M^2W_\mu(x) -$$

$$- i\frac{\delta}{\delta W^+_\mu(x)} + i\left(g_{\mu\beta}\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - g_{\mu\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\right)\frac{\delta}{\delta G^+_{\alpha\beta}(x)}.]S\};$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} T \{ G^+_{\mu\nu}(x) S \} = T \{ [M^2 W^+_\mu(x) - i \frac{\delta}{\delta W_\mu(x)} +$$

$$+ i (g_{\mu\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - g_{\mu\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta}) \frac{\delta}{\delta G_{\alpha\beta}(x)}] S \} ;$$

$$i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \gamma_\mu T \{ \ell(x) S \} = T \{ [m \ell(x) + i \frac{\delta}{\delta \bar{\ell}(x)}] S \}; \qquad (6.6)$$

$$i \frac{\partial}{\partial x_\mu} T \{ \bar{\ell}(x) \gamma_\mu S \} = T \{ [-m \bar{\ell}(x) - i \frac{\delta}{\delta \ell(x)}] S \} .$$

Соотношение (6.5) и (6.6) справедливо, если теория возмущений строится согласно теореме Вика с хронологическими свертками операторов поля (3.2-6), а S -матрица зависит от операторов поля, удовлетворяющих свободным уравнениям.

С помощью этих формул получим:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\delta S}{\delta A_\nu(x)} = T \{ [- e (\frac{\partial W_\mu(x)}{\partial x_\nu} G^+_{\mu\nu}(x) - G_{\mu\nu}(x) \frac{\partial W^+_\mu(x)}{\partial x_\nu}) -$$

$$- e W_\mu(x) (M^2 W^+_\mu(x) + i \frac{\delta}{\delta W_\mu(x)} + i [g_{\mu\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - g_{\mu\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta}] \frac{\delta}{\delta G_{\alpha\beta}(x)}) +$$

$$+ e W_\mu^+(x)(M^2 W_\mu(x) - i \frac{\delta}{\delta W_\mu^+(x)} + i [g_{\mu\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - g_{\mu\alpha} \frac{\partial}{\partial x_\beta}] \frac{\delta}{\delta G^+_{\alpha\beta}(x)}) +$$

$$+ i e^2 \frac{\partial}{\partial x_\mu} (W_\rho(x) W_\mu^+(x) \mathfrak{A}_\rho(x) + W_\rho^+(x) W_\mu(x) \mathfrak{A}_\rho(x) -$$

$$- 2 W_\rho(x) W_\rho^+(x) \mathfrak{A}_\mu(x)) -$$

$$(6.7)$$

$$+ i e (m \bar{\ell}(x) \ell(x) + i \bar{\ell}(x) \frac{\delta}{\delta \bar{\ell}(x)} -$$

$$- m \bar{\ell}(x) \ell(x) - i \ell(x) \frac{\delta}{\delta \ell(x)})] S \} .$$

После несложных преобразований имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\delta S}{\delta A_\nu(x)} = T \{ [-i e^2 (W_\rho(x) G^+_{\rho\nu}(x) + W_\rho^+(x) G_{\rho\nu}(x)) \mathfrak{A}_\nu(x) +$$

$$(6.8)$$

$$+ i e^2 W_\rho(x) (\frac{\partial}{\partial x_\rho} W_\nu^+(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} W_\rho^+(x)) \mathfrak{A}_\nu(x) +$$

$$+ i e^2 W_\rho^+(x) (\frac{\partial}{\partial x_\rho} W_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} W_\rho(x)) \mathfrak{A}_\nu(x)] S \} .$$

Поскольку $G_{\rho\nu} = \frac{\partial W_\nu}{\partial x_\rho} - \frac{\partial W_\rho}{\partial x_\nu}$, то соотношение (6.3) выполнено.

Итак, S -матрица градиентно инвариантна в рамках проведенного формального рассмотрения.

Покажем теперь, что проведенные формальные преобразования справедливы в рамках нашей процедуры регуляризации.

Ряд теорий возмущений для S -матрицы представляет собой набор диаграмм Фейнмана типа диаграммы, представленной на рис. 2. Оператор электромагнитного поля $A_\mu(x)$ всегда связан с линией, описывающей заряженные частицы. Возможны два случая: или эта линия незамкнута, или эта линия образует замкнутый цикл. Доказательство градиентной инвариантности математически сводится к изучению действия на S -матрицу оператора

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\delta}{\delta A_\mu(x)} .$$

Поскольку в этот оператор входит только первая вариационная производная по электромагнитному полю $A_\mu(x)$, можно рассматривать преобразования типа проведенных в (6.5-8) для каждой незамкнутой линии и каждого замкнутого цикла совершенно независимо.

Так как массы частиц и их заряды e и f, а также число d являются инвариантами при градиентном преобразовании, а преобразования в (6.5-8) затрагивают только операторы и пропагаторы заряженных полей, проведенные выкладки справедливы независимо для каждой отдельной незамкнутой линии и для каждого отдельного цикла, входящего в сумму (4.5).

Поэтому S -матрица градиентно инварианта в каждом порядке теории возмущений в рамках сформулированных правил регуляризации.

§7. Второй порядок теории возмущений

Здесь мы рассмотрим амплитуды второго порядка, соответствующие графам Фейнмана на рис. 5-6 и покажем, что из условия нормировки поляризации вакуума в векторной электродинамике следует:

$$a_m = 0 \qquad (m = 2\,;4\,)\,. \tag{7.1}$$

Равенство нулю константы a_0 вытекает из нормировки поляризационного оператора в спинорной электродинамике.

Это было подробно рассмотрено в работе[3].

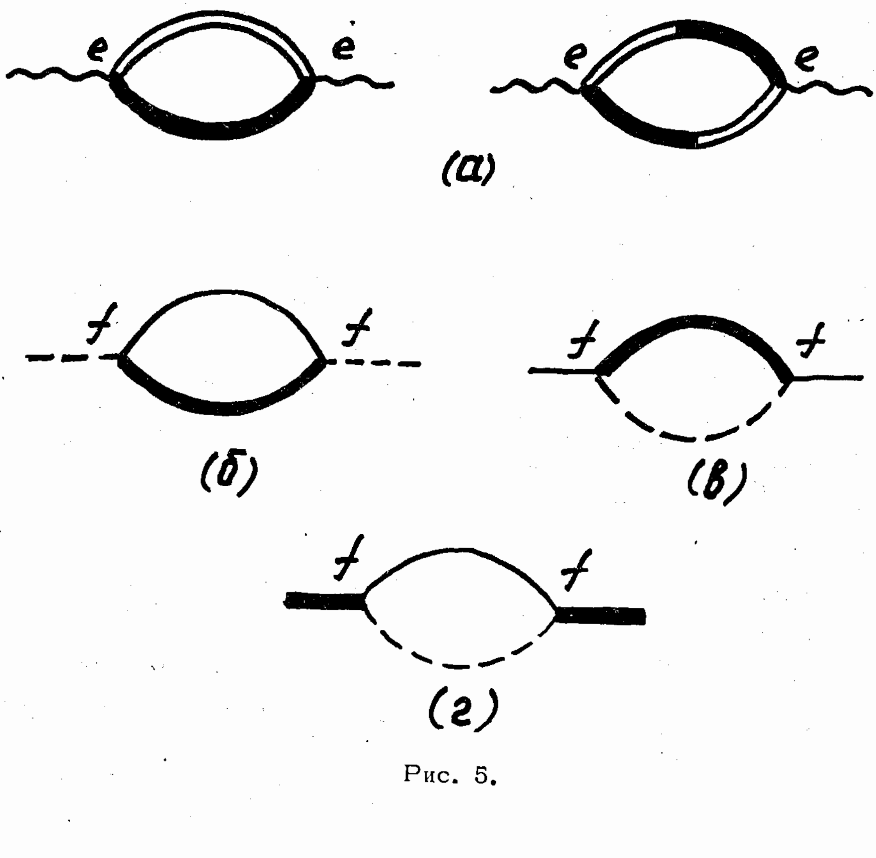


Рис. 5.

1) Поляризация вакуума в векторной электродинамике

Член S -матрицы, соответствующий диаграмме на рис. 5(а), может быть записан

$$-i \int A_\mu(x)\, \Pi_{\mu\nu}(x-y)\, A_\nu(y) \quad , \tag{7.2}$$

где

$$\Pi_{\mu\nu}(x) = i e^2 \{ \Delta^{(2)}_{\sigma\mu;\lambda}(x)\, \Delta^{(2)}_{\lambda\nu;\sigma}(-x) - \Delta^{(3)}_{\sigma\mu;\lambda\nu}(x)\, \Delta^{(1)}_{\lambda\sigma}(-x) \} . \tag{7.3}$$

Используя принятую нами регуляризацию и переходя к импульсному представлению, получим:

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) = \lim_{\Lambda_j \to \Lambda \to \infty} \frac{-i e^2}{(2\pi)^4} \int d^4k \int d^4q\, \delta^4(p-k-q) \times \sum_{j=0}^{8} C_j \Lambda_j^2 \{ \Delta^{(2)}_{\sigma\mu;\lambda}(k)\, \Delta^{(2)}_{\lambda\nu;\sigma}(q) - \Delta^{(3)}_{\sigma\mu;\lambda\nu}(k)\, \Delta^{(1)}_{\lambda\sigma}(q) \} =$$

$$= \lim_{\Lambda_j \to \Lambda \to \infty} \{ (g_{\mu\nu}\, p^2 - p_\mu p_\nu)\, \tilde{\Pi}'_{\Lambda_j}(p^2) + g_{\mu\nu}\, \tilde{\Pi}''_{\Lambda_j}(p^2) \} . \tag{7.4}$$

Здесь

$$\Pi'_{\Lambda_j}(p^2) = \frac{e^2}{16\pi^2}\int_0^1 da\,\Big[\,\Big\{\Phi_1(a) + \Phi_2(a)\frac{p^2}{M^2}\Big\}\times$$

$$\log\Big(\frac{M^2 - a(1-a)p^2}{M^2}\Big) + a(1-a)\,\Phi_1(a)\frac{p^2}{M^2} +$$

$$+\,\Phi_2(a)\frac{p^2}{M^2}\sum_{j=1}^{8} C_j \log \Lambda_j^2 + \Phi_1(a)\sum_{j=1}^{8} C_j \Lambda_j^2 \log \Lambda_j^2\,\Big]\,; \qquad (7.5)$$

$$\tilde{\Pi}''_{\Lambda_j}(p^2) = \frac{9e^2}{32\pi^2}M\sum_{j=1}^{8} C_j \Lambda_j^4 \log \Lambda_j\,;$$

$$\Phi_1(a) = -1 + 9a(1-a)\,,$$

$$\Phi_2(a) = -5a^2(1-a)^2\,, \qquad (7.6)$$

Из (7.4) видно, что при

$$a_4 = \sum_{j=1}^{8} C_j \Lambda_j^4 \log \Lambda_j \neq 0$$

уже во втором порядке по e S-матрица не удовлетворяет требованию градиентной инвариантности. Это связано с тем, что в лагранжиане взаимодействия (2.8) все векторные заряженные поля стоят под знаком нормального произведения. Если $a_4 = 0$, то градиентно-неинвариантные добавки исчезают.

Из условия

$$\tilde{\Pi}'(0) = \lim_{\Lambda_j \to \Lambda \to \infty} \tilde{\Pi}'_{\Lambda_j}(0) = 0 ,$$

которое означает, что, по крайней мере, во втором порядке теории возмущений не происходит перенормировки заряда, следует

$$a_2 = \sum_{j=1}^{8} C_j \Lambda_j^2 \log \Lambda_j = 0 .$$

Равенство нулю константы a_0, как упоминалось выше, вытекает из условия нормировки поляризационного оператора в спинорной электродинамике /3/.

Окончательно после несложных преобразований (7.4) принимает вид:

$$\tilde{\Pi}_{\mu\nu}(p) = -(g_{\mu\nu} p^2 - p_\mu p_\nu) \times$$

$$\times \frac{e^2 p^4}{32\pi^2} \int_{4M^2}^{\infty} du \frac{1}{u^2(u - p^2 - i\epsilon)} \sqrt{\frac{u - 4M^2}{u}} \times \tag{7.7}$$

$$\times \int_{-1}^{+1} d\nu \left\{ \Phi_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}\sqrt{\frac{u-4M^2}{u}}\right) + \Phi_2\left(\frac{1}{2} + \frac{\nu}{2}\sqrt{\frac{u-4M^2}{u}}\right)\frac{u}{M^2} \right\} .$$

2) Собственная энергия нейтрино

Член S-матрицы, соответствующий диаграмме собственной энергии нейтрино (рис. 5(б)), представляется в виде:

$$-i : \bar{\nu}_i(x)\ \Sigma^{\nu_i}(x-y)\ \nu_i(y):$$

Здесь

$$\Sigma^{\nu_i}(x) = -i f^2 0_\alpha\ S^i_c(x)\ 0_\beta\ \Delta^{(1)}_{\alpha\beta}(-x)\ . \qquad (7.8)$$

Аналогично тому, как это было сделано выше, можно получить

$$\tilde{\Sigma}^{\nu_i}(p) = \frac{f^2}{(2\pi)^4 i} \int d^4k \sum_{j=0}^{10} C_j\, \Lambda_j^2 \times$$

$$\times \frac{0_\alpha\,(m_{ij}+k)\ 0_\beta \left\{ g_{\alpha\beta} - \frac{(k-p)_\alpha (k-p)_\beta}{M_j^2} \right\}}{(m^2_{ij}-k^2-i\epsilon)\ \{ M_j^2 - (k-p)^2 - i\epsilon} =$$

$$= \frac{f^2 \hat{p}(1+\gamma_5)}{8\pi^2} \int_0^1 da\ \Big[\Big\{ 2a + \frac{3a-4}{M^2} (aM^2 + (1-a)\ m^2 -$$

$$-a(5-4a)(1-a)p^2 \Big\} \log\left(\frac{aM^2 + (1-a)m_i^2 - a(1-a)\ p^2}{aM^2 + (1-a)\ m_i^2} \right) + \qquad (7.9)$$

$$+ \frac{a(1-a)\ p^2}{am_i^2 + (1-a)M^2} \Big\{ 2a + \frac{3a-4}{M^2} (aM^2 + (1-a)\ m_i^2) \Big\} +$$

$$+ \{ 2a(1-a)^2 + (4a-5)(1-a)a \} \frac{p^2}{M^2} \sum_{j=1}^{8} C_j \log \Lambda_j^2 +$$

$$+ \Big\{ 2a + \frac{(3a-4)}{M^2} (aM^2 + (1-a)\ m_i^2) \Big\} \sum_{j=1}^{8} C_j\, \Lambda_j^2 \log \Lambda^2 \Big]\ .$$

С учётом того, что $a_0 = 0$ и $a_2 = 0$, (7.8) можно преобразовать к виду:

$$\tilde{\Sigma}^{\nu_i}(p) = -\frac{f^2 p^4 \hat{p}(1+\gamma_5)}{16\pi^2} \int\limits_{(M+m_i)^2}^{\infty} du \, \frac{\sqrt{\lambda(M^2; m_i^2; u)}}{u^3(u-p^2-i\epsilon)} \times \tag{7.10}$$

$$\times \int\limits_{-1}^{1} d\nu \; P\left(-\frac{M^2 - m_i^2 + u}{2u} + \frac{\nu}{2u}\sqrt{\lambda(M^2; m_i^2; u)}\right),$$

где

$$\lambda(x_1; x_2; x_3) = \sum_{i=1}^{3} x_i^2 - 2\sum_{i\neq j}^{3} x_i x_j$$

$$P(x) = 2x + \frac{3x-4}{M^2}\{xM_i^2 + (1-x)m^2 - x(1-x)u(5-4x)\}.$$

Из (7.10) видно, что поправка в собственную массу нейтрино равна нулю. Это является следствием γ_5 -инвариантности лагранжиана слабых взаимодействий.

3) Поправка к собственной энергии векторного бозона в векторной электродинамике

Рассмотрим член S -матрицы, соответствующий диаграммам, представленным на рис. 6(а):

$$
\begin{aligned}
&-i : \{ -G_{\mu\nu}(x)\, \Sigma^{(1)}_{\mu\lambda;\nu\sigma}(x-y)\, G_{\nu\sigma}(y) + \\
&+ W^{+}_{\mu}(x)\, \Sigma^{(2)}_{\mu;\nu\lambda}(x-y)\, G_{\nu\lambda}(x) + G^{+}_{\mu\lambda}(x)\, \Sigma^{(2+)}_{\mu\lambda;\nu}(x-y)\, W_{\nu}(y) - \\
&- W^{+}_{\mu}(x)\, \Sigma^{(3)}_{\mu\nu}(x-y)\, W_{\nu}(y) \} :
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

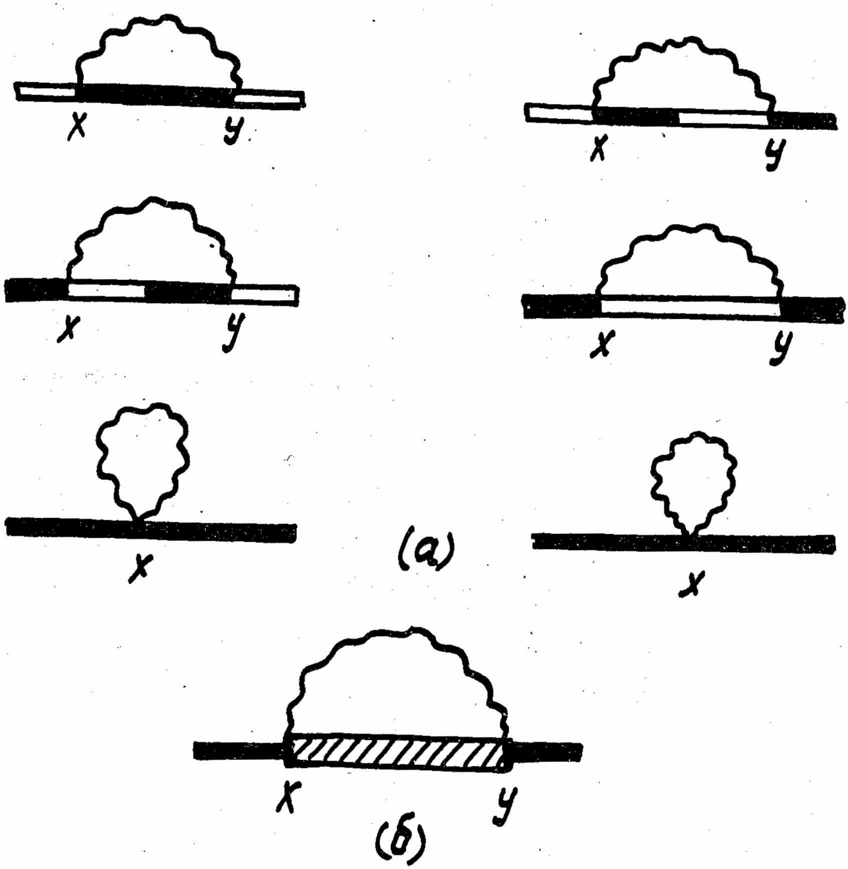


Рис. 6.

Здесь

$$\Sigma^{(1)}_{\mu\lambda;\nu\sigma}(x) = ie^2 D_{\lambda\sigma}(x)\ \Delta^{(1)}_{\mu\nu}(-x),$$

$$\Sigma^{(2)}_{\mu;\nu\lambda}(x) = ie^2 D_{\lambda\sigma}(x)\ \Delta^{(2)}_{\mu\sigma;\nu}(-x),$$

$$\Sigma^{(2+)}_{\mu\lambda;\nu}(x) = ie^2 D_{\lambda\sigma}(x)\ \Delta^{(2+)}_{\mu;\nu\sigma}(-x),$$

$$\Sigma^{(3)}_{\mu\nu}(x) = ie^2 \{ D_{\lambda\sigma}(x)\ \Delta^{(3)}_{\mu\lambda;\nu\sigma}(-x) - \tag{7.12}$$

$$- i [D_{\mu\nu}(x) - g_{\mu\nu} D_{\lambda\lambda}(x)] \} .$$

Переходя к импульсному представлению и используя представление (3.10) формфактора, получим:

$$\tilde{\Sigma}^{(1)}_{\mu\lambda;\nu\sigma}(p) = \frac{e^2 g_{\lambda\sigma}}{8\pi}\frac{1}{2i}\int\limits_{-\beta_1+i\infty}^{-\beta_1-i\infty} d\zeta\ \frac{u(\zeta)}{\sin^2\pi\zeta\,\Gamma^3(1+\zeta)}\left(\frac{M^2\ell^2}{4}\right)^{\zeta} F^{(1)}_{\mu\nu}(p;\zeta);$$

$$\tilde{\Sigma}^{(2)}_{\mu;\nu\lambda}(p) = (g_{\lambda\mu}p_\nu - g_{\lambda\nu}p_\mu)\frac{e^2}{16\pi}\int\limits_{-\beta_2+i\infty}^{-\beta_2-i\infty} d\zeta\ \frac{u(\zeta)}{\sin^2\pi\zeta\ \Gamma^3(1+\zeta)}\times$$

$$\times\left(\frac{M^2\ell^2}{4}\right)^{\zeta} F^{(2)}(p;\zeta);$$

$$\tilde{\Sigma}^{(2+)}_{\mu\lambda;\nu}(p) = (g_{\lambda\mu} p_\nu - g_{\mu\nu} p_\lambda) \frac{e^2}{16\pi} \int\limits_{-\beta_2+i\infty}^{-\beta_2-i\infty} d\zeta \frac{u(\zeta)}{\sin^2\pi\zeta\ \Gamma^3(1+\zeta)} \times$$

$$\times \left(\frac{M^2\ell^2}{4}\right)^\zeta F^{(2)}(p,;\zeta);$$

$$\tilde{\Sigma}^{(3)}_{\mu\nu}(p) = -\frac{e^2}{8\pi}\frac{1}{2i}\int\limits_{-\beta_3-i\infty}^{-\beta_3-i\infty} d\zeta \frac{u(\zeta)}{\sin^2\pi\zeta\ \Gamma^3(1+\zeta)}\left(\frac{M^2\ell^2}{4}\right)^\zeta F^{(3)}(p;\zeta). \tag{7.13}$$

Здесь: $1 < \beta_1 < 2$; $1 < \beta_3 < 2$; $0 < \beta_2 < 1$;

$$F^{(i)}_{\mu\nu}(p;\zeta) = \frac{1}{\Gamma(1-\zeta)}\left[\int\limits_0^1 da\ P^{(i)}_{\mu\nu}(p^2;\zeta;a) -\right.$$

$$\left.-\zeta p^2 \int\limits_{M^2}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\zeta}(u-p^2-i\epsilon)^{1-\zeta}} \int\limits_{a^-(u)}^{a^+(u)} d\beta\ P^{(i)}_{\mu\nu}(p^2;\zeta;\beta)\right]; \quad (i=1,3)$$

$$P^{(2)}(p;\zeta) = \frac{1}{\Gamma(1-\zeta)}\left[\int\limits_0^1 da\ P^{(2)}(a;\zeta) -\right.$$

$$\left.-\zeta p^2 \int\limits_{M^2}^{\infty} \frac{du}{u^{1+\zeta}(u-p^2-i\epsilon)^{1-\zeta}} \int\limits_{a^-(u)}^{a^+(u)} d\beta\ P^{(2)}(\zeta;\beta)\right];$$

$$P^{(1)}_{\mu\nu}(p^2;\zeta;x) = x^\zeta(1-x)^{-\zeta}\left[g_{\mu\nu}\left\{1-\frac{xM^2-x(1-x)p^2}{(1+\zeta)\ 2M^2}\right\}-(1-x)\frac{p_\mu p_\nu}{M^2}\right];$$

$$p^{(2)}(\zeta;x) = x^{\zeta}(1-x)^{-\zeta+1} \quad ;$$

$$P^{(3)}_{\mu\nu}(p^2;\zeta;x) = x^{\zeta}(1-x)^{-\zeta}[\, g_{\mu\nu}\{4(1-x)^2p^2-3M^2+\frac{3}{2}\;\frac{xM^2-x(1-x)p^2}{1+\zeta}\}+ \tag{7.14}$$

$$+2(1-x)^2\,p_\mu p_\nu\,] \;; \qquad a^{\pm}(u) = \frac{1}{2u}\,[\,u-M^2 \pm (u-M^2)\,] \;.$$

Функции $F^{(1;3)}(p;\zeta)$ – регулярны в полуплоскости $Re\,\zeta > -2$, за исключением точки $\zeta = -1$, в которой эти функции имеют полюс первого порядка. Функция $F^{(2)}(p;\zeta)$ регулярна в полуплоскости $Re\,\zeta > -1$.

Удобно с самого начала ввести в рассмотрение оператор собственной энергии $\Sigma^{W}_{\mu\nu}(x)$, определяемый как

$$\Sigma^{W}_{\mu\nu}(x-y) = -i\,\frac{\delta^2 S_2}{\delta W^{+}_{\mu}(x)\,\delta W_{\nu}(y)} \;, \tag{7.15}$$

где S_2 – член S -матрицы второго порядка по константе электромагнитного взаимодействия. С помощью несложных вычислений получим:

$$\Sigma^{W}_{\mu\nu}(x) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p\; e^{ipx}\,\tilde{\Sigma}^{W}_{\mu\nu}(p) \;;$$

$$\tilde{\Sigma}^{W}_{\mu\nu}(p) = -\frac{e^2}{8\pi}\,\frac{1}{2i}\int\limits_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} d\zeta\,\frac{u(\zeta)}{Sin^2\pi\zeta\;\Gamma^3(1+\zeta)}\left(\frac{\ell^2M^2}{4}\right)^{\zeta}\times \tag{7.16}$$

$$\times[\,F_{1\mu\nu}(p;\zeta) + F_{2\mu\nu}(p;\zeta)\,] \;;$$

$$F_{1\mu\nu}(p,\zeta) = \frac{g_{\mu\nu}p^2 - p_\mu p_\nu}{\Gamma(1-\zeta)} \int_0^1 da\; P_1(a;p^2;\zeta)\left[\frac{M^2-(1-a)p^2}{M^2}\right]^\zeta ;$$

$$F_{2\mu\nu}(p;\zeta) = -\frac{3g_{\mu\nu}}{\Gamma(1-\zeta)} \int_0^1 da\; P_2(a;p^2;\zeta)\left[\frac{M^2-(1-a)p^2}{M^2}\right]^\zeta ;$$

$$P_1(a;p^2;\zeta) = a^\zeta(1-a)^{-\zeta}\left\{\frac{(1-a)^2}{M^2} + \frac{aM^2-a(1-a)p^2}{(1+\zeta)M^2} - 2(1-a+a^2)\right\},$$

$$P_2(a;p^2;\zeta) = a^\zeta(1-a)^{-\zeta}\left\{\frac{aM^2-a(1-a)p^2}{1+\zeta} - M^2\right\}.$$

Разлагая (7.16) в ряд по степеням $(M^2\ell^2)$, получим:

$$\tilde{\Sigma}_{\mu\nu}(p) = -\frac{e^2}{8\pi^2}\left[\frac{M^2+3p^2}{4M^2}\frac{C_A}{\ell_A^2}\left\{g_{\mu\nu}(p^2-3M^2) - \right.\right.$$

$$- p_\mu p_\nu\Big\} + \sum_{n\geq 0}^{\infty}\frac{u(n)}{(n!)^3}\left(\frac{M^2\ell_A^2}{4}\right)^n\Big\{(F_{1\mu\nu}(n;p) +$$

$$+ F_{2\mu\nu}(n;p))\left[\log\frac{M^2\ell_A^2}{4} + \frac{u'(n)}{u(n)} - 3\psi(n+1)\right] + \qquad (7.17)$$

$$\left.+ F'_{1\mu\nu}(n;p) + F'_{2\mu\nu}(n;p)\Big\}\right].$$

Здесь

$$C_A = \frac{1}{4} \int_0^\infty dt \quad V_A \ (t) \ .$$

Легко убедиться, что поправка второго порядка по e в собственную массу с точностью до членов $0 \, (log \, M^2 \, \ell^2_A)$, равна

$$\delta M^2 = \frac{e^2}{4\pi^2} \frac{C_A}{\ell^2_A} \ . \tag{7.18}$$

4) Собственная энергия заряженного лептона

Матричные элементы, соответствующие графам собственной энергии электрона, (мюона) рис. 5(в)) и собственной энергии бозона (рис. 5г) со слабыми вершинами, вычисляются аналогично тому, как это было сделано в предыдущем пункте, поэтому мы приведем только результаты.

Оператор собственной энергии электрона (мюона) равен:

$$\tilde{\Sigma}^i (p) = \frac{f^2 \hat{p} (1 + \gamma_5)}{4\pi} \frac{1}{2i} \int_{-\beta + i\infty}^{-\beta - i\infty} d\zeta \frac{u(\zeta)}{Sin^2 \pi \zeta \, \Gamma^3 (1 + \zeta)} \left(\frac{\ell^2 M^2}{4} \right)^\zeta F(p;\zeta);$$

$$F(p;\zeta) = \frac{1}{\Gamma(1-\zeta)} \int_0^1 da \ a^\zeta (1-a)^{-\zeta} [2a +$$

$$+ \frac{1}{M^2} \{ (a-4) \frac{aM^2 - a(1-a)p^2}{1+\zeta} - (a + a^2 - a^3) p^2 \}] \left(\frac{M^2 - (1-a)p^2}{M^2} \right)^\zeta , \tag{7.19}$$

$F(p;\zeta)$ – регулярна в полуплоскости $Re \, \zeta > -2$, кроме точки $\zeta = -1$, где $F(p;\zeta)$ имеет полюс первого порядка; $1 < \beta < 2$.

Поправка в собственную массу электрона (мюона) имеет вид:

$$\delta m_i = \frac{3}{2} \frac{f^2 m_i}{\pi^2} \frac{C_\nu}{M^2 \ell^2_{\nu_i}} + 0 \left(\log M^2 \ell^2_\nu \right) =$$

$$= \frac{3}{2\sqrt{2}} \frac{G m_i}{\pi^2} \frac{C_\nu}{\ell^2_{\nu_i}} + 0 \left(\log M^2 \ell^2_\nu \right) . \tag{7.20}$$

Здесь

$$C_\nu = \frac{1}{4} \int_0^\infty dt \; V_\nu(t) .$$

5) Поправка в собственную энергию векторного бозона в слабых взаимодействиях

В этом случае оператор собственной энергии имеет вид:

$$\tilde{\Sigma}^W_{\mu\nu}(p) = \tilde{\Sigma}^W_{\mu\nu}(p; m_e) + \tilde{\Sigma}^W_{\mu\nu}(p; m_\mu) ;$$

$$\tilde{\Sigma}^W_{\mu\nu}(p; m_i) = \frac{f^2}{8\pi} \frac{1}{2i} \int_{-\beta+i\infty}^{-\beta-i\infty} d\zeta \frac{u(\zeta)}{\sin^2 \pi\zeta \, \Gamma^3(1+\zeta)} \left(\frac{m_i^2 \ell_\nu^2}{4} \right)^\zeta \times \tag{7.21}$$

$$\times F_{\mu\nu}(p; \zeta; m_i) ;$$

где

$$F_{\mu\nu}(p;\zeta;m_i) = \frac{1}{\Gamma(1-\zeta)} \int_0^1 da\ a^{\zeta}(1-a)^{-\zeta} \times$$

$$\times \{ 8 g_{\mu\nu} [a(1-a)p^2 - \frac{a m_i^2 - a(1-a)p^2}{\zeta + 1}] - 16a(1-a)\, p_\mu p_\nu \} \times$$

$$\times [\frac{m_i^2 - (1-a)p^2}{m_i^2}]^{\zeta} ; \qquad 1 < \beta < 2 ,$$

$F_{\mu\nu}(p;\zeta;\ m_i)$ – аналитична в полуплоскости $Re\,\zeta > -2$, за исключением полюса первого порядка в $\zeta = -1$.

Поправка в собственную массу W –бозона за счёт слабых взаимодействий равна:

$$\delta M^2 = \frac{f^2}{4\pi^2} \frac{m_e^2 + m_\mu^2}{M^2} \frac{C_\nu}{\ell_\nu^2} + 0(\log m_e^2 \ell_\nu^2) =$$

$$= \frac{G}{4\sqrt{2}\,\pi^2} (m_e^2 + m_\mu^2) \frac{C_\nu}{\ell_\nu^2} + 0(\log m_e^2 \ell_\nu^2). \tag{7.22}$$

§9. К вопросу о выборе констант a_m

В предыдущих параграфах мы показали, что выбор констант $a_m = 0\ (m=0,2,\ 4)$ связан с вполне разумными требованиями, накладываемыми на матричные элементы S –матрицы в низших приближениях теории возмущений. Остановимся теперь на тех следствиях, к которым приводит такой выбор в высших порядках. Итак, будем рассматривать заряженные циклы с произвольным числом внешних фотонных и нейтринных линий.

Условие градиентной инвариантности приводит к тому, что наличие одной внешней фотонной линии уменьшает расходимость всего матричного элемента, являющегося суммой всевозможных диаграмм Фейнмана, на единицу (см., например,/1/). Поэтому матричный элемент с достаточно большим числом внешних фотонных линий будет сходиться. С точки зрения нашей регуляризации это означает, что числа a_m, соответствующие главным расходимостям отдельных диаграмм Фейнмана, будут отсутствовать в матричных элементах с достаточно большим числом внешних фотонных линий. Следовательно, число матричных элементов, реально зависящих от чисел a_m, конечно. Анализ всех диаграмм довольно прост. В таблице 1 приведены графы, условно обозначающие матричные элементы, являющиеся суммой всевозможных заряженных циклов с определенной структурой по внешним линиям, и указаны числа a_m, от которых зависят эти матричные элементы. Все остальные матричные элементы не зависят от a_m.

Таким образом, введение нелокальности во взаимодействие приводит к перенормируемости рассматриваемой теории с обычной точки зрения. Если воспользоваться методикой Боголюбова и Ширкова/1/, явный вид контрчленов можно легко выписать, используя результаты, сведенные в таблицу 1.

Наш выбор регуляризации с дополнительными условиями на коэффициенты c_i исключает необходимость введения контрчленов, делая теорию конечной в любом порядке теории возмущений.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность профессору Д.И. Блохинцеву, а также С.М. Биленькому, Е.А. Иванову, В.И. Огиевецкому и Д.А. Славнову за полезные обсуждения.

Литература

1. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей. Гостехиздат, 1957 г.
2. G.V. Efimov, Sh.Z. Seltser. Annals of Physics., 567, 124, 1971.
3. Г.В. Ефимов. Препринт ОИЯИ, Р2-5694, Дубна, 1971.
4. Г.В. Ефимов. Commun.Math.Phys. 5, 42, 1967; 7, 138, 1968; ЯФ, 4, 432, 1966. Препринт ИТФ-68-52, 54, 55, Киев, 1968. Проблемы физики ЭЧАЯ, том. 1, вып. 1, 256, 1970.
5. Г.В. Ефимов, О.А. Могилевский. Препринт ИТФ-71-84, Ктев, 1971 г.
6. T.D. Lee, C.N. Yang. Phys.Rev., 128, 885, 1962.
   T.D. Lee. Phys.Rev., 128, 899, 1962.
7. M. Shienblatt, R. Arnowitt. Phys.Rev., D 1, 1603, 1970.
8. В.С. Ваняшин. ЖЭТФ, 43, 689, 1962.
   А.Д. Суханов. ЖЭТФ, 44, 2087, 1963.
9. Г. Вентцель. Введение в квантовую теорию волновых полей, Гостехиздат, 1947.
10. В. Паули. Релятивистская теория элементарных частиц, ИИЛ, 1947.
11. С. Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. ИИЛ, 1963.
12. В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов. Nuovo Cim., 23, 173, 1962. ЖЭТФ, 45, 237, 1963.
13. Х. Умедзава. Квантовая теория поля, ИИЛ, 1958.
14. Д.А. Славнов. ДАН СССР, 143, 570, 1962; ЖЭТФ, 42, 1543, 1962; 47, 224, 1964.
15. П. Метьюс. Релятивистская квантовая теория взаимодействий элементарных частиц, ИИЛ, 1959.

Рукопись поступила в издательский отдел
19 ноября 1971 года.

Таблица 1

$2N_2$ / N_1	0	2	4	6	8
0		 $a_0; a_2$	 $a_0; a_2$	 a_0	 a_0
1		 a_0	 a_0		
2	 $a_0, a_2; a_4$	 a_0	 a_0		
4	 a_0				